This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

10, 7

P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen**, der **Technischen** und **Naturwissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter obiger Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geo nd in einem Schl n besprechen wir athematikern bes

Library
of the
University of Wisconsin

n und natur- wis Die **Mathe-** mat eitschrift für Ges **der Mathe-** mat **thematiker-** Ver lk (Organ für ang ischen und nat isch-naturwissenschaftlichen Blätter,** ferner **Natur und Schule** (Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen), die **Geographische Zeitschrift** u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“.** Diese jährlich zweimal erscheinenden „Mitteilungen“, die in 30000 Exemplaren im In- und Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, das meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags durch ausführliche Selbstanzeigen der Verfasser in Kenntnis setzen und sind ebenso wie das bis auf die Jüngstzeit fortgeführte **Ausführliche Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der Technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten,** 100. Ausgabe [XLVIII u. 272 S. gr. 8], in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststraße 3.

B. G. Teubner.

EINFÜHRUNG IN DIE GEODÄSIE

VON

DR. O. EGGERT

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU DANZIG

MIT 237 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1907

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

115000
FEB 3 1908
SQ
G3
62/58.7

Vorwort.

Den Anlaß zur Herausgabe des vorliegenden Buches gaben Vorlesungen, die der Verfasser im Jahre 1904 an der Universität Berlin hielt, und deren Veröffentlichung der Verlagsbuchhandlung wünschenswert erschien. Auf Grund seiner jetzigen Lehrtätigkeit hielt es der Verfasser jedoch für zweckmäßig, den Inhalt über den Rahmen der früheren Vorlesungen hinausgehen zu lassen und auch einen kurzen Abriß der Ausgleichungsrechnung hinzuzufügen, um einzelne Messungsmethoden gründlicher behandeln zu können. Da der Umfang des Buches dennoch in engen Grenzen bleiben sollte, so wurde von den üblichen Methoden und Hilfsmitteln nur eine Auswahl zur Darstellung gebracht, die sich indessen auf fast alle Gebiete der niederen Geodäsie erstreckt. Dabei konnte der Besprechung der Instrumente mit wenigen Ausnahmen die hiesige geodätische Sammlung zugrunde gelegt werden. Für weitere Studien wurden den einzelnen Kapiteln Literaturnachweise beigefügt, in denen aber nur spezielle Lehrbücher genannt sind. Nahezu erschöpfende Literaturangaben finden sich in dem auch für eingehendere geodätische Studien an erster Stelle zu nennenden Handbuch der Vermessungskunde von W. Jordan. Einige weitere Lehrbücher, die sich auf mehrere Kapitel oder den ganzen Inhalt des vorliegenden Buches beziehen und auch zum Teil bei der Bearbeitung desselben benutzt wurden, sind am Schluß des Inhaltsverzeichnisses näher angegeben.

Der Verfasser möchte es nicht unterlassen, denjenigen Mechaniker-Werkstätten, die die Abbildungen ihrer Instrumente zur Verfügung stellten, sowie auch namentlich der Verlagsbuchhandlung, die in bezug auf die Ausstattung des Buches allen Wünschen bereitwilligst nachkam, seinen Dank auszusprechen.

Danzig-Langfuhr, im Mai 1907.

O. Eggert.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

§ 1. Einleitung 1

I. Abschnitt. **Geometrische und trigonometrische Horizontalaufnahmen.**

1. Kapitel. Horizontalaufnahmen mit einfachen Hilfsmitteln.

§ 2. Bezeichnung von Punkten und Geraden im Gelände 5
§ 3. Meßlatten 7
§ 4. Das Stahlmeßband 10
§ 5. Hilfsmittel zum Abstecken rechter Winkel 13
§ 6. Aufnahmen nach rechtwinkligen Koordinaten 18
§ 7. Koordinatenberechnung der Bindepunkte 20

2. Kapitel. Die Fehlertheorie.

§ 8. Zufällige Beobachtungsfehler 23
§ 9. Genauigkeitsmaße 25
§ 10. Fehlerfortpflanzung 25
§ 11. Das arithmetische Mittel. Gewichte 27
§ 12. Berechnung des mittleren Fehlers 29
§ 13. Allgemeines arithmetisches Mittel 31
§ 14. Mittlerer Fehler aus Beobachtungsdifferenzen 35
§ 15. Genauigkeit der Punktbestimmung 36

3. Kapitel. Theorie optischer Instrumente.

§ 16. Brechung an Kugelflächen 38
§ 17. Geometrische Beziehungen in einem abbildenden System . . . 41
§ 18. Zusammensetzung mehrerer Systeme 44
§ 19. Optische Systeme 45
§ 20. Die Konstanten optischer Systeme 47
§ 21. Die Abbildungsfehler. Blenden 49
§ 22. Das Auge 52
§ 23. Die Lupe und das Mikroskop 53
§ 24. Das astronomische Fernrohr 55
§ 25. Objektive und Okulare 58
§ 26. Die äußere Form des Fernrohrs 60
§ 27. Die Visierachse 61

Seite

4. Kapitel. Libellen und Ablesevorrichtungen.

§ 28. Die Röhrenlibelle 62
§ 29. Bestimmung der Libellenangabe 64
§ 30. Äußere Form der Röhrenlibelle 66
§ 31. Gebrauch und Berichtigung der Röhrenlibelle 68
§ 32. Die Dosenlibelle 72
§ 33. Der Nonius 72

5. Kapitel. Der Theodolit.

§ 34. Die Bestandteile des Theodolits 74
§ 35. Kompensation der Achsenfehler 80
§ 36. Berechnung des Einflusses der Achsenfehler 83
§ 37. Justierung des Theodolits 84
§ 38. Exzentrizität der Albidadenachse und der Visierachse 86
§ 39. Die Methoden der Winkelmessung 87

6. Kapitel. Polygonometrische Punktbestimmung.

§ 40. Polygonmessungen 90
§ 41. Koordinatenberechnung 92
§ 42. Beispiel 95
§ 43. Polygonzüge 96
§ 44. Graphische Verteilung der Widersprüche 99
§ 45. Knotenpunkte 102
§ 46. Grobe Winkel- und Streckenfehler 103
§ 47. Die Bussole 104
§ 48. Bussolenzüge 107

7. Kapitel. Trigonometrische Punktbestimmung.

§ 49. Auswahl der Dreieckspunkte 110
§ 50. Basismessung 112
§ 51. Winkelzentrierung 114
§ 52. Indirekte Bestimmung der Zentrierungselemente 117
§ 53. Zentrierung der Zielpunkte 119
§ 54. Auflösung der Dreiecke 120
§ 55. Abrisse und Koordinatenberechnung 122
§ 56. Das Vorwärtsabschneiden 124
§ 57. Genauigkeit des Vorwärtsabschneidens 126
§ 58. Das Seitwärtsabschneiden 128
§ 59. Das Rückwärtseinschneiden (Lösung von Collins) 130
§ 60. Das Rückwärtseinschneiden (Lösung von Burckhardt) 133
§ 61. Fehlertheorie des Rückwärtseinschneidens 135
§ 62. Aufgabe der beiden Punktpaare 139
§ 63. Aufgabe der sechs bzw. acht Punkte 141
§ 64. Graphische Ausgleichung des Vorwärtsabschneidens 144
§ 65. Graphische Ausgleichung des Rückwärtseinschneidens 148

Seite

§ 66. Anschluß der Polygonzüge 152
§ 67. Fehlertheorie der Polygon- und Bussolenzüge 153
§ 68. Koordinatenumformung 159

8. Kapitel. Das Planzeichnen.

§ 69. Kartierungsinstrumente 161
§ 70. Kartierung mit Hilfe eines Quadratnetzes 164
§ 71. Der Pantograph 166

9. Kapitel. Geometrische Meßtischaufnahme.

§ 72. Das Meßtischverfahren 168
§ 73. Justierung der Kippregel 170
§ 74. Die Aufnahme einfacher Figuren 171
§ 75. Das Stationieren 173
§ 76. Größere Meßtischaufnahmen 177
§ 77. Punkteinschaltung 178

10. Kapitel. Flächeninhaltsberechnungen.

§ 78. Verwendung der Messungszahlen 181
§ 79. Graphische Flächenberechnung 183
§ 80. Theorie der Umfahrungsplanimeter 185
§ 81. Das Polarplanimeter 186
§ 82. Das Stangenplanimeter 189

II. Abschnitt. **Höhenaufnahmen.**

11. Kapitel. Das geometrische Nivellement

§ 83. Das Nivelliergerät und sein Gebrauch 192
§ 84. Justierung der einfachen Nivellierinstrumente 196
§ 85. Nivellementszüge 198
§ 86. Nivellieren mit Meßproben 200
§ 87. Fehlerfortpflanzung in Nivellementszügen 202
§ 88. Längen- und Querprofile 203
§ 89. Flächennivellements 207
§ 90. Gefällmessungen 210
§ 91. Nivellierinstrumente mit Ringfernrohr 211
§ 92. Taschennivellierinstrumente 216

12. Kapitel. Die trigonometrische Höhenmessung.

§ 93. Der Höhenkreis 217
§ 94. Die Indexverbesserung des Höhenkreises 220
§ 95. Einfache Aufgaben der trigonometrischen Höhenmessung . . 222
§ 96. Einfluß der Erdkrümmung und der Strahlenbrechung 224
§ 97. Gegenseitige Zenitdistanzen 228

Seite

13. Kapitel. Die barometrische Höhenmessung.

§ 98. Die Messung des Luftdrucks 229
§ 99. Das Siedethermometer 230
§ 100. Das Quecksilberbarometer (Gefäßbarometer) 233
§ 101. Das Quecksilberbarometer (Heberbarometer) 235
§ 102. Die Korrektionen des Quecksilberbarometers 236
§ 103. Das Aneroidbarometer 243
§ 104. Die Korrektionen des Aneroids 247
§ 105. Die barometrische Höhenformel 252
§ 106. Die Messung der Lufttemperatur u. des Wasserdampfdruckes 256
§ 107. Die vereinfachte barometrische Höhenformel 257
§ 108. Beispiele 261
§ 109. Mängel der barometrischen Höhenmessung 262
§ 110. Barometrische Höhenaufnahmen 263
§ 111. Höhenaufnahmen mit nur einem Aneroid 266

III. Abschnitt. **Gleichzeitige Horizontal- und Höhenaufnahmen.**

14. Kapitel. Die Tachymetrie.

§ 112. Distanzmesser nach Reichenbach und Porro 268
§ 113. Die Bestimmung der Konstanten 271
§ 114. Geneigte Visuren 273
§ 115. Reduktionshilfsmittel 276
§ 116. Distanzmesser mit selbsttätiger Reduktion 280
§ 117. Die Berechnung des Diagramms 284
§ 118. Die Justierung d. Hammer-Fennelschen Reduktionsvorrichtung 286
§ 119. Der tachymetrische Theodolit 289
§ 120. Tachymetrische Aufnahmen 291
§ 121. Beispiele 293
§ 122. Kompaß-Meßbandzüge 296
§ 123. Das Entwerfen der Karte 297
§ 124. Meßtischtachymetrie 299

15. Kapitel. Die Topographie.

§ 125. Topographisch-tachymetrische Aufnahmen 303
§ 126. Topographische Karten 307
§ 127. Flüchtige Aufnahmen auf Reisen 310

16. Kapitel. Die Photogrammetrie.

§ 128. Grundaufgaben der Photogrammetrie 312
§ 129. Das Photogrammeter 315
§ 130. Der Phototheodolit 318
§ 131. Justierung des Phototheodolits 320
§ 132. Orientierung der Aufnahmen 321

Literatur.

Bauernfeind, C. M. v., Elemente der Vermessungskunde. 7. Aufl. Stuttgart 1890.

Hartner-Dolezal, Hand- und Lehrbuch der Niederen Geodäsie. 9. Aufl. Wien, Bd. I 1903, Bd. II 1905.

Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. Stuttgart, Bd. I 5. Aufl. 1904, Bd. II 6. Aufl. 1904, Bd. III 5. Aufl. 1907.

Laussedat, Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographiques. Paris, Tome I 1898, Tome II 1901/1903.

Vogler, Ch. A., Lehrbuch der praktischen Geometrie. Braunschweig, 1. Teil 1885, 2. Teil 1. Halbband 1894.

— Abbildungen geodätischer Instrumente. Berlin 1892.

§ 1. Einleitung.

Die Geodäsie beschäftigt sich mit der Ausmessung und Darstellung der Erdoberfläche, entweder in ihrer Gesamtheit oder in ihren einzelnen Teilen. Diesen verschiedenen Aufgaben dienen verschiedene Methoden und Hilfsmittel, deren einfachste zur Ausmessung kleinster Teile der Erdoberfläche genügen, während in der Erdmessung, der Bestimmung der Figur und Größe unseres ganzen Planeten, sowohl die eigentlichen geodätischen Methoden und Hilfsmittel in ihrer höchsten Entwicklung, als auch astronomische und physikalische Messungen verwendet werden müssen.

Das Arbeitsgebiet der *niederen Geodäsie* sind einzelne Teile der Erdoberfläche, im Höchstfalle ganze Staatsgebiete, das Ziel der *höheren Geodäsie* ist die Bestimmung der Gestalt der ganzen Erde. Unter Erdoberfläche verstehen wir für die Arbeiten der niederen Geodäsie die wirklich sichtbare *physische* Erdoberfläche oder das *Gelände*. In der höheren Geodäsie handelt es sich lediglich um die allgemeine Gestalt der Erde oder die *mathematische* Erdoberfläche. Da nur etwa $^3/_{11}$ der Erdoberfläche vom Festland eingenommen werden, und die geodätischen Messungen mit geringen Ausnahmen nur auf dem Festland bzw. auf Inseln ausgeführt werden können, so wäre die Aufgabe der höheren Geodäsie unlösbar, wenn die mathematische Erdoberfläche eine ganz regellose Fläche bildete. Wäre die ganze Oberfläche der Erde mit Wasser bedeckt, so würde sie überall senkrecht zur Richtung der Schwerkraft stehen, also eine *Niveaufläche* bilden. Diesem einfachen Bildungsgesetz entspricht die Meeresoberfläche, wenn wir von ihrer fortwährenden Veränderung durch Ebbe und Flut, Strömungen, Winde usw. absehen. Denken wir uns diese ideelle Meeresfläche von der Küste ausgehend unter den Kontinenten verlängert, so daß sie stets senkrecht

zur Lotrichtung bleibt, so erhalten wir eine den ganzen Erdkörper umschließende Niveaufläche, die wir als *mathematische* Erdoberfläche oder als *Geoid* bezeichnen.

Das Endziel aller Arbeiten aus dem Gebiete der niederen Geodäsie sind *Karten* oder *Pläne*, ebene Abbildungen der physischen Erdoberfläche. Die Aufnahme erfolgt dadurch, daß alle wichtigen Punkte des Geländes durch ihre Lotrichtungen auf das Geoid projiziert werden, die Gestalt und Größe der Projektion durch Messung bestimmt und eben abgebildet wird. Das Geoid spielt also in der niederen Geodäsie die Rolle einer Referenzfläche. Die Höhenverhältnisse des Geländes, die hierbei keine Berücksichtigung finden, werden durch besondere Messungen aufgenommen.

Das Geoid hat annähernd die Gestalt einer Kugel, deren Radius etwa 6370 km beträgt. Hieraus geht hervor, daß die Krümmung der Geoidfläche gering und auf kleinerem Gebiete nur wenig wahrnehmbar ist. Beschränken wir uns auf ein sehr kleines Gebiet, so kann die Krümmung überhaupt vernachlässigt werden, und die Geoidfläche ist dann innerhalb dieses Gebietes als horizontale Ebene zu betrachten. Es läßt sich leicht nachweisen, daß in einem Quadrat von 10 km Seite diese Vernachlässigung in Rücksicht auf die erreichbare Messungsgenauigkeit eingeführt werden kann; nur die Methoden der Höhenmessung lassen sich nicht ganz ohne Rücksichtnahme auf die Erdkrümmung anwenden, worauf später zurückzukommen ist. Bleiben die Aufnahmen auf die angegebenen engen Grenzen beschränkt, so gestaltet sich die Herstellung der Karte sehr einfach, da die Horizontalprojektion in einer Ebene liegt und nur in verkleinertem Maßstabe wiederzugeben ist.

Man bezeichnet eine solche Aufnahme, bei der nur die Horizontalprojektion Berücksichtigung findet, als *Horizontalaufnahme* und in näherer Bezeichnung als *geometrische* oder *trigonometrische* Aufnahme, je nach den anzuwendenden Messungsmethoden. Die hiernach gezeichnete Karte nennt man *Lageplan*.

Zur Bestimmung der Höhenlage des Geländes ist es erforderlich, die lotrechten Abstände der einzelnen Geländepunkte vom Geoid, die *Meereshöhen*, zu kennen. Es gibt kein Verfahren, nach dem die Meereshöhen unmittelbar mit einiger Ge-

nauigkeit bestimmt werden können, die Methoden der Höhenmessung sind vielmehr nur imstande, Differenzen von Meereshöhen, also Höhenunterschiede zu liefern. Zur Bestimmung von Meereshöhen selbst ist es deshalb notwendig, von Punkten der Geoidfläche auszugehen. Die als Geoid bezeichnete ruhende Meeresfläche wird an der Küste durch die mittleren Wasserstände der Pegel bestimmt.

Nach den heutigen Erfahrungen scheint die Annahme berechtigt zu sein, daß die mittleren Wasserstände an allen Küsten eines Kontinents Abweichungen von 1—2 dm von einer gemeinsamen mittleren Niveaufläche zeigen. Es ist deshalb nicht ratsam, verschiedene Höhenbestimmungen innerhalb eines kleineren Gebiets an die Mittelwasser verschiedener Punkte der Meeresküste anzuschließen, da die Genauigkeit der Höhenmessung genügt, um die oben genannte Abweichung aufzudecken. So wurden in Deutschland früher die Höhenmessungen an verschiedene Pegel der Nord- und Ostsee angeschlossen, und es konnte leicht eintreten, daß ein Punkt im Binnenlande verschiedene Meereshöhen aus verschiedenen Messungen erhielt. Infolgedessen ist jetzt in den meisten Kulturstaaten durch eine Höhenmarke eine Niveaufläche festgelegt, die mit der mittleren Meeresfläche nahe zusammenfällt, und als Ausgangsfläche für alle Höhenmessungen innerhalb des betr. Gebiets gilt. So wurde im Jahre 1879 am Nordpfeiler der Berliner Sternwarte ein Normalhöhenpunkt angebracht, der genau 37 m über der für Deutschland geltenden *Normal-Null-Niveaufläche* liegt. Die Schwierigkeit einer gemeinsamen Höhenmarke etwa für einen ganzen Kontinent liegt darin, daß der Anschluß an diese Höhenmarke bei großer Entfernung ungenauer wird, als der unmittelbare Anschluß an das wenngleich ein wenig unbestimmte Mittelwasser der nächsten Küste.

Die Methoden der Höhenmessung sind, nach ihrer Genauigkeit geordnet, das *geometrische Nivellement*, die *trigonometrische Höhenmessung* und die *barometrische Höhenmessung*. Auf Grund der Höhenaufnahmen erfolgt die Darstellung der Höhenverhältnisse des Geländes in *Höhenplänen* oder *Nivellementsplänen*.

Für viele Zwecke ist es wünschenswert, die Horizontalprojektion und die Höhen gleichzeitig zu bestimmen und zur

Darstellung zu bringen. Solche Pläne sind namentlich beim Entwurf von Ingenieurarbeiten unentbehrlich. Diesen Aufgaben dienen die *tachymetrischen Aufnahmen* und die aus ihnen hervorgehenden *tachymetrischen Karten.*

Gleichzeitige Messung der Horizontalprojektion und der Höhen bezwecken auch die *topographischen Aufnahmen.* Da die *topographischen Karten* jedoch immer in kleinem Maßstabe entworfen werden, so genügt die Anwendung vereinfachter Messungsmethoden.

Die *geographischen Karten* endlich liegen außerhalb des Rahmens dieses Buches. Soweit ihre Herstellung nicht durch Verkleinerung, Generalisierung und Zusammenstellung topographischer Karten erfolgen kann, geschieht ihre Aufnahme teils durch unmittelbare astronomische Bestimmung der geographischen Länge und Breite einzelner Punkte, teils durch Anwendung topographischer Methoden, worüber noch einiges bei der Behandlung der Topographie gesagt werden soll.

I. Abschnitt.

Geometrische und trigonometrische Horizontalaufnahmen.

1. Kapitel.

Horizontalaufnahmen mit einfachen Hilfsmitteln.

§ 2. Bezeichnung von Punkten und Geraden im Gelände.

Da bei den Horizontalmessungen die verschiedenen Höhen, in denen die Punkte des Geländes liegen, keine Rolle spielen, so betrachten wir im folgenden statt der Punkte ihre Lotlinien, für die wir jedoch kurz die Bezeichnung *Punkt* beibehalten. Entsprechend dieser Anschauung erfolgt die Sichtbarmachung einzelner Geländepunkte, indem die Lotrichtungen dieser Punkte bezeichnet werden. Zur dauernden *Vermarkung* von Punkten eignen sich in den Erdboden eingesetzte Steine mit eingemeißeltem Kreuz in der Oberfläche, zylindrische Holzpflöcke, lotrechte Eisen- oder Tonröhren. Während der Vermessungsarbeiten ist eine Sichtbarmachung von Punkten auf größere Entfernungen erforderlich, und hierzu dienen Holzstäbe von 2—2,5 m Länge und ca. 3 cm Dicke, die unten mit einem eisernen spitzen Schuh versehen sind. Diese *Fluchtstäbe* oder *Baken* (Fig. 1) sind in der Regel mit schwarz-weißem oder rot-weißem Anstrich versehen, durch den sie sich vom Hintergrund stets deutlich abheben. Für größere Entfernungen wird die Sichtbarkeit durch Anbringen eines kleinen Fähnchens erhöht. Die Baken werden im Gelände lotrecht aufgestellt und be-

Fig. 1.

zeichnen durch ihre Längsachsen die Lage von Punkten. Zur genauen Lotrechtstellung bedient man sich eines *Lots*, das man wenige Schritte von der Bake entfernt mit wagerecht vorgestrecktem Arm frei herabhängen läßt. Durch das Auge und den Lotfaden wird eine Vertikalebene bestimmt und man sieht leicht, ob die Bake in dieser Ebene steht. Ist dies erreicht, so wiederholt man das Verfahren in einer zweiten zur ersten senkrechten Vertikalebene und erzielt damit die lotrechte Stellung der Bake.

Dem Vorstehenden entsprechend haben wir als gerade Linien im Gelände im Sinne der Horizontalmessungen Vertikalebenen zu verstehen. Geländepunkte liegen deshalb in einer Geraden, wenn sie einer Vertikalebene angehören; falls sie durch Baken bezeichnet sind, so müssen diese sich genau decken.

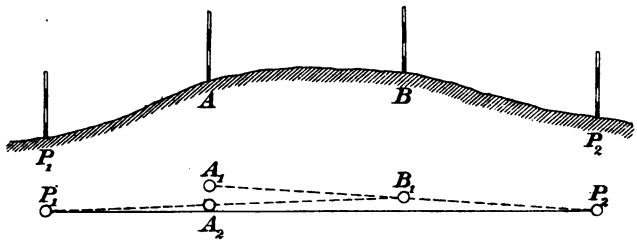


Fig. 2.

Hieraus ergeben sich sofort die einfachen Operationen der Verlängerung einer durch zwei Baken bezeichneten geraden Linie über die Endpunkte hinaus und der Einschaltung von Zwischenpunkten. Bei letzterer Aufgabe ist jedoch dann ein besonderes Verfahren anzuwenden, wenn die Sicht von einem Endpunkt der Linie zum andern nicht möglich ist (Fig. 2). Sind die beiden Endpunkte P_1 und P_2, so stellt man eine Bake A in der Nähe der Linie, etwa in A_1 auf und weist die Bake B eines Gehilfen in die Linie $A_1 P_2$ ein, so daß sie in B_1 steht. Hierauf wird von B_1 aus die Bake A nach A_2 in die Gerade $B_1 P_1$ eingeschaltet. Durch fortgesetztes Anwenden dieses Verfahrens kommen die beiden Baken der Geraden immer näher, bis schließlich eine weitere Verschiebung nicht mehr notwendig ist. Man sieht, daß die Entfernung AB im Verhältnis zu $P_1 P_2$ nicht zu klein sein darf, da sonst das gegenseitige Einweisen ungenau wird.

In der Regel bedient man sich beim Abstecken von Geraden eines kleinen Handfernrohrs, wodurch die Genauigkeit bei größeren Entfernungen erhöht wird.

§ 3. Meßlatten.

Unter der *Länge* einer Linie verstehen wir den Abstand der Lotlinien ihrer Endpunkte. Zur Längenmessung werden für die hier in Betracht kommenden Zwecke *Meßlatten* oder *Meßbänder* benutzt.

Meßlatten sind hölzerne Stäbe (Fig. 3) meistens von 5 m Länge und ovalem Querschnitt, der von der Mitte aus nach beiden Enden kleiner wird. Die Latten werden mit heißem Öl getränkt, um gegen Feuchtigkeitseinflüsse weniger empfindlich zu sein, und ihre Enden mit Metallkappen versehen, die senkrecht zur Achse abgeschnitten sind. Durch weiße und rote bzw. weiße und schwarze Felder wird die Latte in einzelne Meter geteilt, die überdies noch, wie die einzelnen Dezimeter durch Messingstifte genauer bezeichnet werden.

Der Abstand der Endflächen soll genau gleich 5 m sein, jedoch sind Meßlatten auch dann sehr wohl verwendbar, wenn geringe Abweichungen von dieser Länge vorhanden sind, nur muß man diese Abweichungen kennen, um sie bei der Messung berücksichtigen zu können. Es sind deshalb Hilfsmittel erforderlich, mit denen man die wahre Länge der Meßlatten jederzeit bestimmen kann. Eine solche Nachmessung der Lattenlänge ist auch noch durch ihre Veränderlichkeit infolge des Einflusses der Luftfeuchtigkeit geboten, der durch den Anstrich nicht ganz aufgehoben ist.

Als Vergleichsmaßstäbe sind zwei *Normalmeter* erforderlich, prismatische Stahlstäbe von 1 m Länge mit rechtwinklig sich kreuzenden Endschneiden. Die Länge der Stäbe, die durch den Schneidenabstand bestimmt ist, muß für alle Temperaturen bekannt sein; gewöhnlich ist sie auf Grund genauer Prüfung für jeden Stab in Form einer Gleichung gegeben. So ergab die Prüfung zweier Normal-

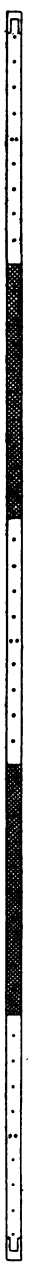


Fig. 3.

meter der hiesigen geodätischen Sammlung durch die Kaiserliche Normal-Eichungs-Kommission in Berlin die beiden Gleichungen

$$l_1 = 1\text{ m} - 0{,}02\text{ mm} + 0{,}011\,(t - 18)\text{ mm}$$
$$l_2 = 1\text{ m} - 0{,}01\text{ mm} + 0{,}011\,(t - 18)\text{ mm}.$$

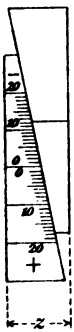


Fig. 4.

Wird die Temperatur t durch Auflegen eines Thermometers bestimmt, so kann hiernach die Länge der Stäbe berechnet werden.

Mit Normalmetern lassen sich nur ganze Meter messen; zur Messung kurzer Reststrecken dient ein Paar *Meßkeile*, bestehend aus dem eigentlichen *Meßkeil* und dem *Indexkeil*, die sich zu einem Parallelepiped ergänzen. Die Oberfläche des ersteren trägt an der Schrägkante eine Einteilung mit Bezifferung, die des letzteren einen Zeigerstrich. Der Abstand z (Fig. 4) der beiden parallelen Seitenflächen ist eine lineare Funktion der Zeigerablesung oder *Keilablesung* k. Für das Keilpaar der hiesigen Sammlung besteht die Gleichung $z = 19{,}73 + 0{,}199\,k$,

woraus z in mm erhalten wird.

Der *Lattenkomparator* der hiesigen Sammlung (Fig. 5), auf dem die Prüfung der Meßlatten erfolgt, besteht aus einer starken Holzbohle von ca. 6 m Länge, in der zwei Bolzen im Abstand von etwa 5,04 m mit einander zugewendeten Schneiden befestigt sind. Der Abstand der Schneiden wird mit den Normal-

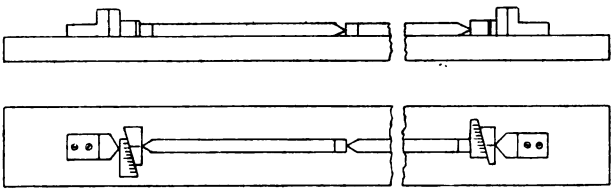


Fig. 5.

metern und den Meßkeilen durch mehrfache Messung ermittelt. Wird dieselbe Messung hierauf mit einer Meßlatte und den Keilen wiederholt, so ergibt sich die Länge der Meßlatte. Es wurde z. B. zur Bestimmung des Schneidenabstandes der Stab l_1 dreimal und der Stab l_2 zweimal angelegt und an den Keilen im Anfangspunkt $k_1 = +2{,}8$, im Endpunkt $k_2 = -3{,}55$ bei einer Temperatur $t = +19{,}5^0$ abgelesen. Dies gab $z_1 = 20{,}29$,

$z_2 = 19{,}02$ und $3l_1 + 2l_2 = 5000{,}00$ für $t = +19{,}5^0$. Somit ist der Schneidenabstand gleich 5039,31 mm.

Nachdem eine Meßlatte aufgelegt war, wurden die Keilablesungen $k_1 = -2{,}1$ und $k_2 = -7{,}0$ gefunden. Dies gab $z_1 + z_2 = 37{,}65$, folglich für die Meßlatte die Länge 5001,66 mm.

Zur Streckenmessung sind stets zwei Latten von verschiedenem Anstrich zu verwenden. Vor der Messung werden in der Geraden mehrere Zwischenpunkte durch Baken bezeichnet, längere Strecken auch durch kleine Pflöcke in mehrere Abschnitte zerlegt, die einzeln gemessen werden. Bei horizontalem Gelände erfolgt die Messung durch Aneinanderlegen der Latten in der Geraden, das jedoch vorsichtig ohne Verschiebung der jedesmal liegenden Latte geschehen muß. Die zurückgelegten Lattenlängen werden summiert, und der Rest wird an der letzten Latte, nötigenfalls unter Zuhilfenahme eines kleinen Zentimetermaßstabes, abgelesen. Zur Prüfung der Richtigkeit wird die Messung in umgekehrter Richtung mit unrunder Anlage und Ablesung der ersten Latte wiederholt.

Bei geneigtem Gelände ist die *Staffelung* anzuwenden. Hierbei ruht die Latte nur mit einem Ende auf dem Boden, während sie durch Anheben des andern Endes in die horizontale Lage gebracht wird. Ist dies geschehen, so wird das hochgehaltene Ende mit einem Stab oder einem Lot heruntergelotet und die folgende Latte an den gefundenen Punkt angelegt. Zur Wagrechtstellung der Latte genügt das Augenmaß. Bei steilen Hängen ist das Staffeln mit einer Fünfmeterlatte nicht möglich, es muß häufig ein Stab von nur 1 m Länge verwendet werden.

Ist die Neigung des Geländes gering, so kann von dem umständlichen Staffelverfahren abgesehen werden. Die Latten werden unmittelbar auf den Boden gelegt, jedoch mit einem jedesmal zu bestimmenden Zwischenraum. Wird der Endpunkt B der horizontalen Latte (Fig. 6) nach dem Staffelverfahren heruntergelotet, so ist die folgende Latte an B' anzulegen. Bei Messung auf dem Gelände

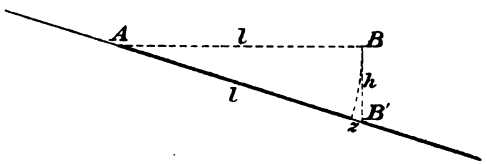


Fig. 6.

selbst ist mithin der Zwischenraum z frei zu lassen. Es ist aber

$$(l + z)^2 - l^2 = h^2$$

oder

$$(l + z + l)(l + z - l) = h^2,$$

also

$$z = \frac{h^2}{2l + z}.$$

Da die kleine Größe z im Nenner den Wert des Bruches wenig beeinflußt, so können wir auch mit genügender Genauigkeit setzen

$$z = \frac{h^2}{2l}.$$

Nehmen wir $l = 5$ m, h in Dezimetern und z in Millimetern an, so ist

$$z = h^2.$$

Die Größe h kann durch Wagrechthalten der Latte bequem geschätzt und z dann mit einem Millimetermaßstabe abgesetzt werden.

§ 4. Das Stahlmeßband.

Das *Stahlmeßband* (Fig. 7) wird gewöhnlich in der Länge von 20 m angewendet. Zu seiner Handhabung sind an den beiden Enden mit Scharnieren Messingringe befestigt, deren Mitten die Länge des Meßbandes bestimmen und durch seitliche Striche kenntlich gemacht sind. Die Einteilung ist bis auf Dezimeter durch größere und kleinere Niete verschiedener

Fig. 7.

Form, zum Teil auch durch eingestanzte Löcher bewirkt. Außer Gebrauch wird das Band auf einen Eisenring gerollt und darauf befestigt.

Zur Benutzung des Meßbandes sind noch zwei Stäbe (Fig. 8a) von der Stärke des inneren Ringdurchmessers und von etwa 1 m Länge erforderlich, die unten mit einer Spitze und einem kurzen Riegel versehen sind. Endlich gehören zum Meßgerät noch zehn

Zählnadeln (Fig. 8b), die gewöhnlich an einem kleinen Eisenring getragen werden.

Auch Meßbänder bedürfen einer Prüfung ihrer Länge, damit die Abweichungen vom Sollmaß berücksichtigt werden können. Fig. 9 zeigt zum Teil die Einrichtung des Meßbandkomparators der hiesigen geodätischen Sammlung. Auf einer mit Granitsteinen bedeckten Mauer von ca. 22 m Länge sind im Abstand von 20,04 m zwei Bolzen ähnlich denen des Lattenkomparators S. 8 befestigt, deren Schneidenabstand mit Hilfe von Normalmetern und Meßkeilen genau bestimmt werden kann. Hierauf wird das Meßband auf die Mauer gelegt und durch zwei über Rollen laufende und durch Gewichte belastete Ketten festgehalten. Zur Messung des Abstandes der Ringmitten von den Schneiden dient ein kurzer prismatischer Maßstab mit $^1/_2$ mm-Teilung, der zwei Nullpunkte in der Nähe der Enden trägt. Der

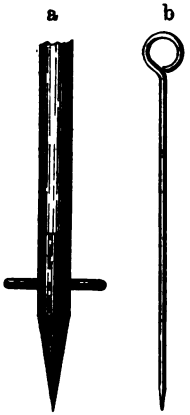


Fig. 8.

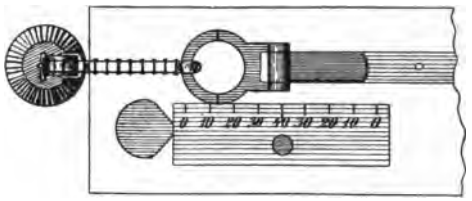


Fig. 9.

Maßstab wird mit einer Endfläche an die Schneide gelegt und hierauf an der Strichmarke des Meßbandringes abgelesen. Addiert man zu der Summe der Ablesungen an beiden Enden des Meßbandes noch die beiden Abstände der Skalennullpunkte von den Endflächen, so erhält man die Differenz des Bolzenabstandes und der Meßbandlänge.

Es wurde z. B. für den Schneidenabstand der Wert 20048,79 mm gefunden und mit dem kleinen Maßstab an den beiden Meßbandenden 24,05 bzw. 22,35 abgelesen. Die Abstände der Maßstabnullpunkte von den Endflächen betrugen zusammen 4,86 mm, folglich war die Differenz zwischen dem Schneidenabstand und der Meßbandlänge 51,26 mm und die Meßband-

länge gleich 19997,53 mm. Hierbei war die Temperatur des Meßbandes gleich + 4° und die Belastung gleich 10 kg.

Die Messung kann nach geringer Verschiebung des im Gleichgewicht ruhenden Meßbandes mit anderen Ablesungen wiederholt werden.

Das Verfahren der Streckenmessung mit dem Meßband ist das folgende: Nachdem die beiden Endringe von oben auf die Meßbandstäbe bis zu den Querstiften aufgestreift sind, wird der hintere Stab mit der Spitze auf den Anfangspunkt der Strecke gestellt und lotrecht gehalten. Ist das Gelände horizontal, so wird das Band mit Hilfe des vorderen Stabes gespannt, die Spitze desselben lotrecht in den Boden gedrückt und zur Bezeichnung der Stelle eine Zählnadel daneben gesteckt. Hierauf wird das Meßband um 20 m vorwärts gezogen, die Spitze des hinteren Stabes in das Loch gesetzt, und so fort. Es ist selbstverständlich, daß hierbei der vordere Stab stets in die Messungslinie eingerichtet werden muß. Der Träger des hintern Stabes nimmt die Zählnadeln auf und befestigt sie auf einem Ringe. Am Ende der Strecke wird die Anzahl der gesammelten Nadeln mit 20 multipliziert und die Reststrecke an dem Meßbande abgelesen.

Muß bei steilem Gelände die *Staffelmethode* angewendet werden, so kann hierzu des Durchhanges wegen immer nur ein kleiner Abschnitt des Bandes benutzt werden, der wagrecht und ausgespannt zu halten ist.

Bei geringerer Neigung des Geländes, etwa unter 10°, ist es auch hier bequemer, auf dem Gelände selbst zu messen und zwischen den einzelnen Meßbandlängen einen kleinen Zwischenraum zu lassen. Die Ermittlung des Neigungswinkels, den man hierzu mit einer Genauigkeit von 1° braucht, erfolgt mit einem *Gefällmesser*, wie ihn z. B. nach Fig. 10 verschiedene Werkstätten anfertigen. Die vierkantige Diopterröhre ist mit einer zylindrischen Büchse verbunden, in der sich ein Rädchen um eine horizontal zu haltende Achse dreht. Das Rädchen trägt auf seinem zylindrischen Rand eine Einteilung, die durch ein Fenster der Büchse sichtbar ist, und wird durch einseitige Belastung stets in derselben Lage festgehalten. Beim Gebrauch wird das Diopter auf das Ziel gerichtet und durch eine geringe

seitliche Bewegung des Auges die Stellung des Objektivdiopters in bezug auf die Einteilung durch eine Lupe abgelesen. Dieses Instrument setzt man bei der Streckenmessung auf den hinteren Meßbandstab und liest dann den Höhenwinkel nach dem oberen Ende des vorderen Stabes ab. Ist l die Länge des Meßbandes α der Höhenwinkel, so ist nach der Gleichung

$$z = l\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)$$

der Zwischenraum zwischen zwei Meßbandlagen zu berechnen. Auf dem Deckel des Gefällmessers befinden sich Tabellen, aus denen z unmittelbar entnommen werden kann.

Aus den Methoden der Längenmessung geht hervor, daß die Messung auf geneigtem Gelände weniger genau wird als auf horizontalem; aber auch hier bleiben mehrere Fehlerquellen bestehen, so z. B. die Abweichung von der Geraden, infolge deren alle Strecken zu lang gemessen werden. Derselbe Fehler entsteht bei ungeschicktem Aneinanderlegen der Meßlatten durch Zurückstoßen der liegenden Latte. Andererseits werden die Meßbandstäbe beim Anziehen des Meßbandes in lockerem Boden stets ein wenig nachgeben, wodurch die Strecken zu kurz erhalten werden. Hierzu kommt noch der nicht zu berücksichtigende Einfluß der Temperatur, der Schwankungen der Meßbandlänge um 2—3 mm leicht verursachen kann.

Fig. 10.

§ 5. Hilfsmittel zur Absteckung rechter Winkel.

Wenn Winkelmeßinstrumente auch zunächst nicht näher besprochen werden sollen, so sind doch auch bei den einfachsten Messungen solche Instrumente nicht entbehrlich, mit denen bestimmte Winkel, so vor allem Winkel von 90° abgesteckt werden können. Aus der Definition der geraden Linie für Horizontalmessungen ergibt sich, daß man als Winkel zwischen zwei Geraden den Winkel zwischen den beiden entsprechenden

Vertikalebenen anzusehen hat. Solche Winkel werden auch noch näher als *Horizontalwinkel* bezeichnet.

Die schon im Altertum zum Abstecken rechter Winkel benutzte *Kreuzscheibe* (Fig. 11) besteht aus einem Holzkreuz, an dessen beiden Stäben *Diopter* angebracht sind. Bei lotrechter Stellung des als Stativ dienenden Stabes bestimmen die beiden Diopter zwei sich rechtwinklig schneidende Vertikalebenen, die man im Gelände durch Einweisen von Baken abstecken kann. Die Genauigkeit der Absteckung ist von dem Abstand der beiden Visiervorrichtungen abhängig, der in der Regel etwa 25 cm beträgt. Aus Versuchen ist zu entnehmen, daß sich eine Genauigkeit von 2—3 Bogenminuten leicht erreichen läßt. Um zu prüfen, ob der Winkel der Kreuzscheibe genau ein rechter ist, wird im Gelände eine Gerade durch drei Punkte (Baken) etwa in Abständen von je 50 m bezeichnet. Hierauf konstruiert man im mittleren Punkte mit Hilfe der Kreuzscheibe von beiden Endpunkten aus rechte Winkel. Decken sich die freien Schenkel derselben, so stehen die Diopter der Kreuzscheibe richtig. Hiermit ist zugleich der Weg angedeutet, auf dem man auch bei nicht richtiger Diopterstellung rechte Winkel als Mittel zweier Absteckungen von verschiedenen Seiten her erhalten kann. Häufig ist an den Dioptern auch eine Justiervorrichtung vorhanden, die eine Verstellung derselben zuläßt.

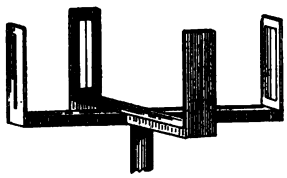


Fig. 11.

Fig. 12.

Die Kreuzscheibe erhielt eine bequemere Form, als man die Diopter auf dem Mantel eines Zylinders oder eines Kegels anbrachte (*Winkelkopf*, Fig. 12), wodurch sich zugleich Gelegenheit bot, das Instrument auch für andere Winkel, z. B. von 45°, zu benutzen.

Bei nahezu horizontalem Gelände bedient man sich am besten der durch ihre geringe Größe weit bequemeren Spiegelinstrumente, des *Winkelspiegels* oder des *Winkelprismas*.

Der *Winkelspiegel* besteht in seiner einfachsten Form aus

zwei Planspiegeln, deren Ebenen sich unter einem Winkel von 45^0 schneiden. Wir denken uns die Schnittkante lotrecht gehalten und die beiden Spiegel in Fig. 13 durch eine Horizontalebene geschnitten. Das in O befindliche Auge wird ein Objekt A infolge zweimaliger Reflexion der Sehlinie in der Richtung OB erblicken. Für die hierbei erfolgte Ablenkung β haben wir nach Fig. 13

$$\beta = 180^0 - \varphi - \psi,$$

und da

$$\varphi + \psi = 2\alpha$$

ist, so ist auch

$$\beta = 180^0 - 2\alpha.$$

Ist $\alpha = 45^0$, so wird hiernach $\beta = 90^0$.

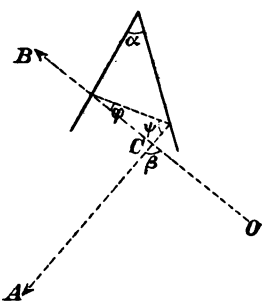


Fig. 13.

Eine in A stehende Bake erscheint dem Auge in der Richtung OB, und wird eine zweite Bake in diese Richtung eingewiesen, so bildet der Punkt C den Scheitel eines rechten Winkels. Für die praktische Anwendung dieses Prinzips liegt eine kleine Ungenauigkeit darin, daß der Punkt C in bezug auf die Spiegel veränderlich ist, also an dem Instrument nicht bezeichnet werden kann. Da jedoch die Spiegel nur eine sehr geringe Größe haben, so sind dem Punkt C sehr enge Grenzen gesetzt und es genügt, an dem Instrument einen passend gewählten Punkt als Winkelscheitel dauernd zu bezeichnen. Die hierdurch entstehende Ungenauigkeit liegt innerhalb der Visierfehler. Fig. 14 zeigt den Winkelspiegel in der jetzt gebräuchlichen Gestalt, in der die beiden Spiegel durch Schrauben in einem Metallgehäuse befestigt sind. Ein hölzerner Handgriff dient zur Handhabung des Instruments und zur Bezeichnung des Winkelscheitels, zu welchem letzteren Zweck an seinem unteren Ende auch noch ein Lot befestigt werden kann.

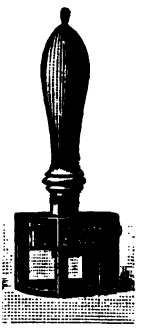


Fig. 14.

Die Prüfung des Winkelspiegels erfolgt in derselben Weise, wie die der Kreuzscheibe; meistens ist durch Verstellen der Befestigungsschrauben auch eine Justierung der Spiegel möglich.

Als guter Ersatz für den Winkelspiegel wurden Glaspris-

men durch *Bauernfeind* im Jahre 1851 als *Winkelprismen* zum Abstecken rechter Winkel eingeführt, und diese haben, soweit sie überhaupt anwendbar sind, die andern Hilfsmittel fast vollständig verdrängt. Das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck ABC in Fig. 15 stelle den Horizontalschnitt durch ein Glasprisma mit lotrecht stehenden Kanten dar. Dem von O aus schief auf die Kathetenfläche BC blickenden Auge bietet die spiegelnde Fläche AC ein Bild $AB'C$ des Prismas, und da $B'C$ wiederum reflektiert, so wird ein zweites Bild $B'A'C$ sichtbar. Da an der Reflexion auch alle auf AB auffallenden Strahlen teilnehmen, so erhält ein Strahl PQ, der senkrecht zu OR steht, nach der zweiten Reflexion die Richtung $P''Q''$, und da das Spiegelbild $B'A'C$ gegen BAC um 90° gedreht ist, so wird $P''Q'' \parallel RO$ sein. Bevor der Strahl $P''Q''$ ins Auge gelangt, wird er infolge der Brechung an den beiden Parallelflächen $B'A'$ und BC eine Parallelverschiebung erleiden. Ist P durch eine Bake bezeichnet, so kann eine zweite Bake in die Richtung $Q''P''$ gebracht werden, und das Prisma steht dann im Scheitel eines rechten Winkels. Auch hier bleibt eine Unbestimmtheit in der genauen Lage des Scheitelpunktes, die jedoch in Anbetracht der geringen Größe des Prismas ($AB = BC = 2\frac{1}{2}$ cm) in Rücksicht auf die Visierfehler zu vernachlässigen ist. Fig. 16 zeigt das Winkelprisma in einer für den Gebrauch bequemen Fassung.

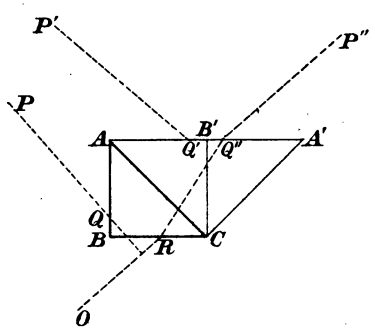


Fig. 15.

Winkelprismen haben den Winkelspiegeln gegenüber den Vorzug der Unveränderlichkeit und der geringeren Größe. Beide Instrumente sind nur bei ganz geringen Höhenunterschieden im Gelände anwendbar, da sonst bei lotrechter Spiegel- bzw. Prismenkante zwei Baken in ungleich hohen Geländepunkten nicht mehr zur Deckung gebracht werden können. Im Hügelland bleibt deshalb die Kreuzscheibe bzw. der Winkelkopf allein anwendbar.

Fig. 16.

Bogenschlag. Es kommen nicht selten Fälle vor, in denen auch die steileren Visuren des Winkelkopfes nicht ausreichen. Als allein anwendbares Hilfsmittel zur Absteckung rechter Winkel bleibt dann die Streckenmessung übrig. Dieses Verfahren ermöglicht die Bestimmung des Fußpunktes des von einem Punkte auf eine Gerade gefällten Lotes. In Fig. 17 liege der Punkt P in bezug auf die Gerade AB sehr hoch, so daß die beschriebenen Instrumente zur Ermittlung des Lotfußpunktes Q nicht ausreichen. Es werden auf der Geraden zwei Punkte A und B angenommen, die mit P ein nahe gleichseitiges Dreieck bilden, und die Strecken a, b und s gemessen. Es ist dann

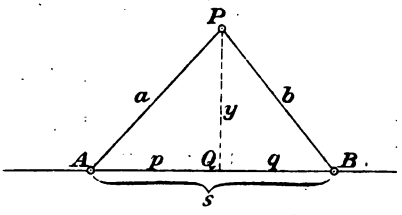


Fig. 17.

$$p^2 - q^2 = a^2 - b^2$$

oder

$$\frac{p-q}{2} = \frac{(a+b)(a-b)}{2s},$$

da

$$\frac{p+q}{2} = \frac{s}{2}.$$

Aus den letzten beiden Gleichungen ergeben sich p und q. Zugleich kann auch y aus

$$y = \sqrt{a^2 - p^2} = \sqrt{b^2 - q^2}$$

berechnet werden.

Dieses Verfahren ist auch bei horizontalem Gelände dann anzuwenden, wenn y sehr groß ist, da dann die Visiergenauigkeit der Kreuzscheibe und der Reflexionsinstrumente nicht genügt.

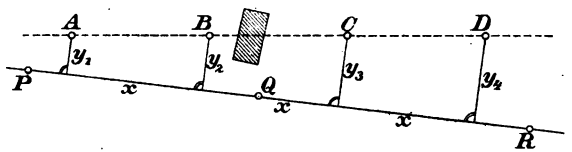


Fig. 18.

Die Hilfsmittel zur Absteckung rechter Winkel spielen auch eine Rolle bei der Absteckung gerader Linien und bei der

Streckenmessung in Fällen, in denen die direkten Methoden versagen. Ist z. B. in Fig. 18 die Gerade AB über ein Hindernis hinaus zu verlängern, so wird eine Hilfslinie PQR abgesteckt und die Strecke x, sowie die Länge der Ordinaten y_1 und y_2 bestimmt. Hierauf wird die Strecke x auf der Hilfslinie mehrmals abgemessen und da

$$y_3 = y_2 + (y_2 - y_1)$$

und

$$y_4 = y_2 + 2\,(y_2 - y_1)$$

ist, so können die Punkte C und D konstruiert werden. Dasselbe Verfahren ist auch zum Einschalten der Punkte B und C anzuwenden, wenn A und D im Gelände vorhanden sind.

Ein weiteres Beispiel einfacher geometrischer Hilfskonstruktionen im Gelände ist die Ermittlung der unzugänglichen Strecke x_2 in der Geraden AB (Fig. 19). Es wird hierzu wieder eine Hilfslinie PQR abgesteckt, die AB etwa unter einem Winkel von 45° schneidet. Sind die Strecken x_1, y_1 und y_2 gemessen, so ist

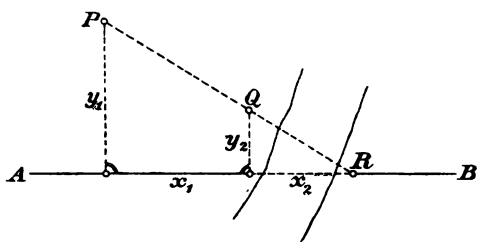


Fig. 19.

$$x_2 = x_1 \frac{y_2}{y_1 - y_2}.$$

Solche Konstruktionen sind jedoch nur im Notfalle anzuwenden, da sie nie die Genauigkeit direkter Absteckungen und Messungen liefern können.

§ 6. Aufnahmen nach rechtwinkligen Koordinaten.

Die Aufnahme geradlinig begrenzter Figuren erfolgt mit den bisher besprochenen einfachen Hilfsmitteln durch Messung der Koordinaten ihrer Eckpunkte in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Entgegen dem Brauche in der Mathematik wird hierbei die Ordinatenachse durch rechtläufige Drehung der Abszissenachse um 90° entstanden gedacht. Die Wahl des Koordinatensystems ist beliebig, jedoch wird man die Achsen so legen, daß die zu messenden Strecken möglichst klein sind.

In dem nebenstehenden Beispiel (Fig. 20), das die im Felde durch Steine vermarkten Grenzen eines Grundstücks darstellt, ist eine Diagonale als Abszissenachse angenommen worden. Im Felde wird nach dem Augenmaß eine Skizze gezeichnet, in die die Messungszahlen, wie es die Abbildung zeigt, eingetragen werden. Jede Messungszahl muß so geprüft werden, daß Fehler aufgedeckt und durch Nachmessung beseitigt werden können. In dem Beispiel sind hierzu die Seiten der Figur gemessen; da diese sich auch aus den Koordinaten unter Anwendung einer Quadrattafel leicht berechnen lassen, so ergibt sich eine wertvolle *Meßprobe*.

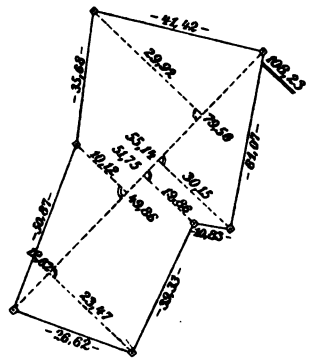


Fig. 20.

Es ist nicht erforderlich, häufig auch nicht möglich, alle Punkte bei der Messung auf dasselbe Koordinatensystem zu beziehen, vielmehr können mehrere Systeme angewendet werden, die dann miteinander verbunden werden müssen. Bei kleinen Entfernungen erfolgt diese Verbindung wieder durch direkte Messung rechtwinkliger Koordinaten einzelner Punkte, wie in Fig. 21 angedeutet ist, in der ein Grundstück auf zwei Seiten unregelmäßig, etwa durch das Ufer eines Baches begrenzt ist. Die Abbildung zeigt zugleich, wie zur Aufnahme von Geländegegenständen, z. B. von Häusern oder Wegen, weitere Messungslinien eingeschaltet werden, deren Endpunkte, *Bindepunkte* oder *Kleinpunkte* genannt, lediglich durch Streckenmessung festgelegt oder *eingebunden* werden.

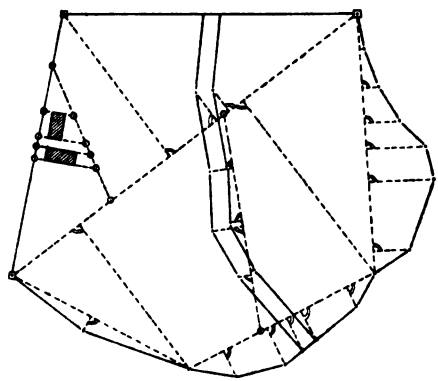


Fig. 21.

Bei größerer Ausdehnung der Figur macht, wie früher be-

merkt wurde, die genaue Ermittlung der Ordinatenfußpunkte Schwierigkeiten, deshalb ist hier zur Verbindung der Koordinatensysteme am besten das Verfahren des *Bogenschlags* anzuwenden. Als zweckmäßige Grundform des Liniennetzes wird in vielen Fällen ein Viereck mit seinen beiden Diagonalen gewählt, das sich der aufzunehmenden Figur möglichst anpaßt. In Fig. 22 sind die Grenzen einer Feldmark skizziert, zu deren Aufnahme ein Viereck $ABCD$ mit seinen beiden Diagonalen abgesteckt wurde. Die Messung der sechs Strecken ergab die eingeschriebenen Resultate. Aus den Dreiecken ABE und CDE wurden nach S. 17 die Koordinaten der Punkte B und D berechnet, und es fand sich

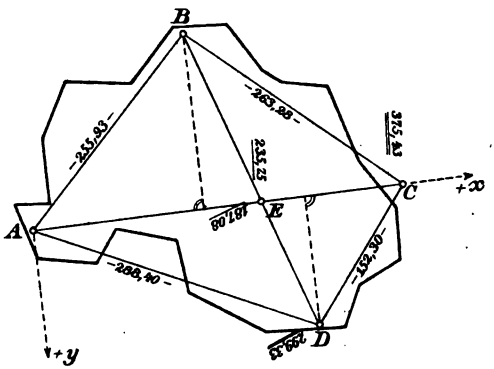


Fig. 22.

$$y_b = -\,179{,}37 \qquad x_b = +\,182{,}56$$
$$y_d = +\,107{,}61 \qquad x_d = +\,267{,}66\,.$$

Als Meßprobe können die Strecken BC und AD gelten, die sich aus den Koordinaten zu 263,38 bzw. 288,49, also in genügender Übereinstimmung mit der Messung ergeben. Das Viereck bildet die Grundlage der eigentlichen Vermessung, indem die Seiten und Diagonalen weitere Bindelinien aufnehmen, die dann als Abszissenachsen für die Kleinaufnahme dienen.

§ 7. Koordinatenberechnung der Bindepunkte.

Aus der Vermessung gehen nur für einige Hauptpunkte die rechtwinkligen Koordinaten hervor. Es ist aber wünschenswert, auch für einen großen Teil der Bindepunkte oder Kleinpunkte die Koordinaten zu berechnen, da dann die Längen der Bindelinien ermittelt und mit der Messung verglichen werden können. In Fig. 23 seien die Koordinaten der beiden Punkte A und B gegeben, und auf der Linie AB die Bindepunkte P_1

und P_2 durch Messung der Strecken s_1, s_2 und s_3 bestimmt. Die Berechnung der Koordinaten von P_1 und P_2 könnte ohne weiteres ausgeführt werden, wenn bei der Streckenmessung keine Messungsfehler vorgekommen wären, wenn also die aus den Koordinaten berechnete Strecke $AB = S$ mit der Summe $s_1 + s_2 + s_3 = [s]$ übereinstimmen würde. Vor der Koordinatenberechnung muß die Differenz $[s] - S$ auf die einzelnen Strecken ihrer Größe proportional verteilt werden. Hiermit erhält man die verbesserten Strecken

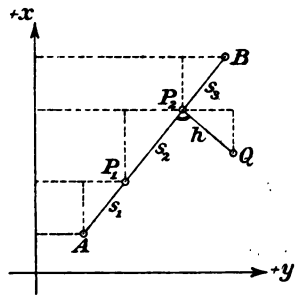


Fig. 23.

$$AP_1 = s_1 - \frac{[s] - S}{[s]} s_1$$

$$P_1P_2 = s_2 - \frac{[s] - S}{[s]} s_2$$

$$P_2B = s_3 - \frac{[s] - S}{[s]} s_3,$$

deren Summe gleich S ist. Aus ähnlichen Dreiecken findet man dann

(1) $\quad y_1 = y_a + \frac{y_b - y_a}{S} AP_1 \quad \text{und} \quad x_1 = x_a + \frac{x_b - x_a}{S} AP_1$

oder

$$y_1 = y_a + \frac{y_b - y_a}{S} s_1 - \frac{(y_b - y_a)}{S} \frac{([s] - S)}{[s]} s_1$$

und

(2) $\quad x_1 = x_a + \frac{x_b - x_a}{S} s_1 - \frac{(x_b - x_a)}{S} \frac{([s] - S)}{[s]} s_1.$

Hieraus ergibt sich

(3) $\quad y_1 = y_a + \frac{y_b - y_a}{[s]} s_1 \quad \text{und} \quad x_1 = x_a + \frac{x_b - x_a}{[s]} s_1.$

Setzen wir

(4) $\quad \frac{y_b - y_a}{[s]} = o \quad \text{und} \quad \frac{x_b - x_a}{[s]} = a,$

und wenden das Vorstehende auch auf den Punkt P_2 an, so haben wir

(5)
$$y_1 = y_a + os_1 \qquad x_1 = x_a + as_1$$
$$y_2 = y_1 + os_2 \qquad x_2 = x_1 + as_2$$

und als Rechenprobe

$$(6) \qquad y_b = y_3 + o s_3 \qquad x_b = x_3 + a s_3 .$$

In derselben Weise können auch die Koordinaten eines Punktes Q berechnet werden, der in bezug auf AB durch die Abszisse AP_2 und die Ordinate P_2Q bestimmt ist. Nach Fig. 23 ist

$$(7) \qquad y_q - y_2 = \frac{x_b - x_a}{S} h$$

und

$$x_q - x_2 = -\frac{y_b - y_a}{S} h .$$

Ersetzen wir hierin mit einer kleinen Vernachlässigung S durch $[s]$, so erhalten wir die bequemen Ausdrücke

$$(8) \qquad \begin{aligned} y_q &= y_2 + ah \\ x_q &= x_2 - oh . \end{aligned}$$

Es ist darauf zu achten, daß h mit dem richtigen Vorzeichen eingeführt wird, da es für Punkte links von AB negativ anzunehmen ist.

Beispiel: Die Punkte A und B sind durch Koordinaten gegeben, ferner liegt die in Fig. 24 dargestellte Messung vor. Es sind die Koordinaten der Punkte P_2 und Q und hierzu auch die des Ordinatenfußpunktes P_1 zu berechnen.

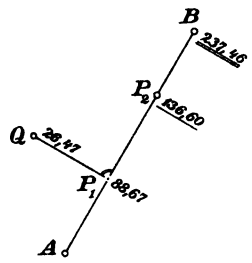


Fig. 24.

$y_b = +173{,}66$	$x_b = +226{,}49$
$y_a = +386{,}25$	$x_a = +120{,}97$
$y_b - y_a = -212{,}59$	$x_b - x_a = +105{,}52.$

Hieraus findet sich die Strecke $AB = S = 237{,}34$, es ist also ein Messungsfehler von 0,12 m vorhanden. Ferner ergibt sich nach (4) S. 21

$$o = -\frac{212{,}59}{237{,}46} = -0{,}89527 \qquad a = +\frac{105{,}52}{237{,}46} = +0{,}44437 ,$$

und nach Fig. 24 ist $s_1 = 88{,}67$, $s_2 = 47{,}93$, $s_3 = 100{,}86$.

Berechnet man nun die Werte von os_1, as_1, os_2 usw., so erhält man die nebenstehende Koordinatenberechnung. Mit $h = -26{,}47$ ist auch zugleich die Berechnung der Koordinaten des Punktes Q angeschlossen worden.

Punkt	y Δy	x Δx
A	+ 386,25 — 79,38	+ 120,97 + 39,40
P_1	+ 306,87 — 42,91	+ 160,37 + 21,30
P_2	+ 263,96 — 90,30	+ 181,67 + 44,82
B	+ 173,66	+ 226,49
P_1	+ 306,87 — 11,76	+ 160,37 + 23,70
Q	+ 295,11	+ 184,07

Die Zahlenrechnung wurde mit Hilfe der Rechenmaschine ausgeführt, die für solche Zwecke am geeignetsten ist. Es können hierzu aber auch Multiplikationstafeln oder fünfstellige Logarithmen angewendet werden, wobei dann ein Rechenschema zu entwerfen ist, in dem die ganze logarithmische Rechnung Platz findet.

2. Kapitel.

Die Fehlertheorie.

§ 8. Zufällige Beobachtungsfehler.

Es wurde bereits für die bisher geschilderten Messungen die Regel aufgestellt, daß die Richtigkeit jedes Messungsergebnisses in irgend einer Weise, z. B. durch Wiederholung der Messung zu prüfen ist. Diese Vorsicht ist zur Vermeidung *grober Fehler*, die durch irgend einen Irrtum bei der Messung unterlaufen, notwendig.

Ebenso ist in dem vorhergehenden Kapitel auf die Fehler hingewiesen worden, die aus den Mängeln der Meßinstrumente hervorgehen und durch Wiederholung der Messung mit denselben Hilfsmitteln und unter denselben äußeren Umständen in der Regel nicht aufgedeckt werden. Ist z. B. ein Meßband zu kurz, so wird die gemessene Strecke stets zu lang gefunden werden. Ähnliche *regelmäßige* Fehler werden wir bei allen

Meßinstrumenten kennen lernen. Sie werden entweder durch Ermittlung der Instrumentalfehler und ihres Einflusses auf die Messungen (z. B. Meßband oder Meßlatten), oder durch Justierung der Instrumente (z. B. Winkelspiegel), oder endlich durch Anwendung besonderer Messungsmethoden beseitigt.

Die Erfahrung lehrt aber, daß auch nach Ausschaltung der groben und der regelmäßigen Fehler mehrere Messungen ein und derselben Größe nicht genau übereinstimmen, daß also noch weitere Fehler vorhanden sein müssen, die trotz aller Sorgfalt nicht vermieden werden können. Diese *zufälligen* Beobachtungsfehler werden sich aus einer ganzen Reihe von Einzelfehlern zusammensetzen. Betrachten wir z. B. die Längenmessung mit Meßlatten, so können hier folgende Fehler auftreten: 1. Änderungen der Lattenlänge infolge von Witterungseinflüssen, 2. Abweichungen von der geraden Messungslinie, 3. Verschiebung der Latten beim Aneinanderlegen, 4. Durchbiegung der Latten, 5. Staffelfehler, 6. Ablesungsungenauigkeiten u. a. Diese Einzelfehler werden sich teils gegenseitig aufheben, teils summieren und geben schließlich zusammen den *zufälligen Beobachtungsfehler*.

Wenn die Beobachtungsfehler selbst uns in der Regel unbekannt bleiben werden, so erkennen wir doch, daß positive und negative Fehler gleicher Größe gleich wahrscheinlich sind, und daß die Wahrscheinlichkeit der Fehler mit ihrer Größe abnimmt. Sind wir somit berechtigt, die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε als Funktion von ε anzusehen, so muß diese Funktion für positive und negative Fehler gleicher Größe denselben Wert haben. Bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit des Fehlers ε mit $\varphi(\varepsilon)$, so ist demnach $\varphi(\varepsilon)$ eine *gerade Funktion* von ε, also

$$\varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon).$$

Unter Einführung gewisser Annahmen, deren Zulässigkeit durch die Erfahrung bestätigt wird, hat *C. F. Gauß* in seiner Theoria motus corporum coelestium im Jahre 1809 den analytischen Ausdruck der Funktion $\varphi(\varepsilon)$, der sog. *Fehlerfunktion*, aufgestellt, nach dem mit großer Annäherung die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Fehler einer Beobachtungsreihe berechnet werden kann.

§ 9. Genauigkeitsmaße.

Die Genauigkeit einer Beobachtungsreihe wird um so größer sein, je kleiner die Fehler ε sind. Zur einheitlichen Definition der Genauigkeit sind von *Gauß* verschiedene Genauigkeitsmaße eingeführt worden. Das Nächstliegende ist es, aus den Beobachtungsfehlern ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen einen Mittelwert zu bilden. Der Durchschnittswert aller bei einer Beobachtungsreihe möglichen Fehler ist

$$\vartheta = \pm \Sigma |\varepsilon| \varphi(\varepsilon), \tag{1}$$

und wird als *durchschnittlicher Fehler* bezeichnet.

Statt dieses Fehlermaßes hat sich jedoch ein anderes eingebürgert, das einerseits aus theoretischen Gründen die zuverlässigste Beurteilung der Genauigkeit verspricht, andererseits den Einfluß der Fehler der Beobachtungen auf die Genauigkeit der aus den letzteren berechneten Größen bequem verfolgen läßt. Man bildet hierzu den Mittelwert aus den Quadraten aller möglichen Beobachtungsfehler und bezeichnet ihn als das Quadrat des *mittleren (zu befürchtenden) Fehlers.* Drücken wir den mittleren Fehler durch μ aus, so ist

$$\mu^2 = \Sigma \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon). \tag{2}$$

§ 10. Fehlerfortpflanzung.

Ohne zunächst der wirklichen Berechnung von μ näher zu treten, betrachten wir die Fortpflanzung der Beobachtungsfehler auf eine lineare Funktion der Beobachtungen. Es seien die Größen $l_1\, l_2 \cdots l_n$ mit gleicher Genauigkeit gemessen und aus ihnen sei die Funktion

$$x = f_0 + f_1 l_1 + f_2 l_2 + \cdots + f_n l_n \tag{1}$$

zu berechnen. Fügen wir zu den Beobachtungen die Fehler ε hinzu, so erhalten wir links den wahren Wert von x, der mit X bezeichnet werde. Es ist

$$X = x + \varepsilon = f_0 + f_1(l_1 + \varepsilon_1) + f_2(l_2 + \varepsilon_2) + \cdots + f_n(l_n + \varepsilon_n),$$

woraus folgt

$$\varepsilon = f_1 \varepsilon_1 + f_2 \varepsilon_2 + \cdots f_n \varepsilon_n. \tag{2}$$

Durch Quadrieren erhalten wir

$$\varepsilon^2 = f_1^2\varepsilon_1^2 + f_2^2\varepsilon_2^2 + \cdots + f_n^2\varepsilon_n^2 + 2f_1f_2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \cdots + 2f_{n-1}f_n\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n.$$

Da die wahren Fehler selbst unbekannt sind, so führen wir in die einzelnen Glieder Durchschnittswerte aus allen möglichen Werten ein, die die ε annehmen können. Die Durchschnittswerte der ersten n Glieder rechts sind nach (2) § 9 S. 25 $f_1^2\mu_1^2$, $f_2^2\mu_2^2 \cdots f_n^2\mu_n^2$, die der übrigen Glieder dagegen infolge des *geraden* Fehlergesetzes gleich Null. Wir erhalten somit

$$\mu_x^2 = f_1^2\mu_1^2 + f_2^2\mu_2^2 + \cdots + f_n^2\mu_n^2 \tag{3}$$

und da die Beobachtungen gleich genau sein sollen,

$$\mu_x^2 = (f_1^2 + f_2^2 + \cdots f_n^2)\mu^2. \tag{4}$$

Wenn x keine lineare Funktion der l ist, so muß vor der Anwendung der Gl. (3) bzw. (4) eine Reihenentwicklung mit Hilfe des *Taylor*schen Lehrsatzes vorgenommen werden. Ist

$$x = F(l_1, l_2 \cdots l_n), \tag{5}$$

so haben wir

$$X = x + \varepsilon = F(l_1 + l_2 + \cdots + l_n) + \frac{\partial F}{\partial l_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial F}{\partial l_2}\varepsilon_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial l_n}\varepsilon_n, \tag{6}$$

wobei wir uns auf Glieder von der ersten Ordnung in bezug auf die ε wegen der Kleinheit der letzteren beschränken können. Setzen wir

$$\frac{\partial F}{\partial l_1} = f_1, \quad \frac{\partial F}{\partial l_2} = f_2 \cdots \frac{\partial F}{\partial l_n} = f_n,$$

so erhalten wir aus (5) und (6)

$$\varepsilon = f_1\varepsilon_1 + f_2\varepsilon_2 + \cdots + f_n\varepsilon_n \tag{7}$$

übereinstimmend mit Gl. (2) und können hierauf wieder die Ausdrücke (3) bzw. (4) anwenden. Der in diesen Gleichungen ausgesprochene Satz heißt die *Fehlerhäufungsregel.*

Als einfaches Beispiel für die Anwendung dieses wichtigen Satzes betrachten wir die Längenmessung mit Meßbändern oder Meßlatten. Bezeichnen wir die Länge des Bandes oder der Latte mit l, so ist die gemessene Strecke

$$s = l_1 + l_2 + \cdots + l_n.$$

Ist bei jeder Anlage ein mittlerer Fehler $\pm\mu$ zu befürchten, so ist nach (4)

$$\mu_s^2 = n\mu^2 \text{ oder } \mu_s = \pm\mu\sqrt{n}$$

und da

$$n = \frac{s}{l}$$

ist, so erhalten wir

$$\mu_s = \pm \frac{\mu}{\sqrt{l}} \sqrt{s} \cdot \tag{8}$$

Die Größe $\frac{\mu}{\sqrt{l}}$ ist für ein bestimmtes Messungshilfsmittel konstant. Es sagt also die vorstehende Gleichung aus, daß der mittlere Fehler der Längenmessung mit der Quadratwurzel aus der gemessenen Länge wächst.

Die Konstante $\frac{\mu}{\sqrt{l}}$, *der mittlere Fehler der Längeneinheit,* ist aus Versuchsmessungen zu ermitteln. In runden Zahlen hat man gefunden

$$\begin{aligned} &\text{für Bandmessungen} \quad \mu_s = \pm 0{,}006 \sqrt{s} \\ &\text{für Lattenmessungen} \quad \mu_s = \pm 0{,}003 \sqrt{s} \end{aligned} \tag{9}$$

in Metern. Das Gesetz (8) und damit auch die vorstehenden Ausdrücke haben jedoch nur Bedeutung für eine ungefähre Genauigkeitsschätzung, da außer den betrachteten unregelmäßigen Fehlern auch noch solche auftreten, die einfach proportional der Länge der Messungslinie wachsen und die häufig die ersteren überwiegen. Namentlich bei sehr sorgfältig ausgeführten Messungen scheint, wie *Reinhertz* gezeigt hat, das Fehlergesetz die Form

$$\mu_s = \pm \frac{\mu}{l} s$$

anzunehmen.

Die Konstante $\frac{\mu}{\sqrt{l}}$ wird übrigens bei solchen Messungen wesentlich kleiner als die in (9) enthaltenen Zahlen sein.

§ 11. Das arithmetische Mittel. Gewichte.

Ist eine Größe mehrmals gemessen, so wird das arithmetische Mittel der Messungen als vorteilhaftester Wert der Unbekannten angenommen. Bezeichnen wir die Messungen mit $l_1, l_2 \cdots l_n$, das arithmetische Mittel mit x, so ist

$$x = \frac{[l]}{n} \cdot \tag{1}$$

Für die Beurteilung der Genauigkeit spielen noch die Abweichungen λ der Messungen vom arithmetischen Mittel oder die *Verbesserungen der Beobachtungen* eine wichtige Rolle. Es ist

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= x - l_1 \\ \lambda_2 &= x - l_2 \\ &\vdots \\ \lambda_n &= x - l_n . \end{aligned} \tag{2}$$

Setzen wir hierin den Wert von x aus (1) ein und summieren die Gleichungen, so ergibt sich

$$[\lambda] = 0 . \tag{3}$$

Wir können das arithmetische Mittel auch in folgender Form schreiben

$$x = \frac{1}{n} l_1 + \frac{1}{n} l_2 + \cdots + \frac{1}{n} l_n ,$$

und wenn wir hierauf die Fehlerhäufungsregel anwenden, so erhalten wir

$$\mu_x^2 = \frac{1}{n^2} \mu_1^2 + \frac{1}{n^2} \mu_2^2 + \cdots + \frac{1}{n^2} \mu_n^2$$

und bei gleicher Genauigkeit der Beobachtungen

$$\mu_x^2 = \frac{1}{n} \mu^2$$

oder

$$\mu_x = \pm \frac{\mu}{\sqrt{n}} . \tag{4}$$

Hieraus sieht man, daß durch mehrfache Wiederholung der Beobachtungen eine wesentliche Erhöhung der Genauigkeit erzielt wird, die im Anfange sehr rasch vor sich geht. Während bei vier Beobachtungen der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels bereits auf die Hälfte reduziert wird, sind sechzehn Beobachtungen erforderlich, um ihn auf den vierten Teil zu bringen.

Nehmen wir an, es liege statt des berechneten Wertes x eine *Beobachtung* von derselben Genauigkeit vor, deren mittlerer Fehler also auch gleich μ_x ist, so wird diese Beobachtung soviel wert sein, wie die n Beobachtungen zusammen, man sagt deshalb, die Beobachtung x habe das *Gewicht* $g_x = n$, wenn die Beobachtungen $l_1, l_2 \cdots l_n$ das Gewicht $g = 1$ haben. Es ist folglich auch

$$\mu_x = \pm \frac{\mu}{\sqrt{g_x}}, \tag{5}$$

wobei μ *der mittlere Fehler der Gewichtseinheit* ist.

Für eine andere Beobachtung mit dem Gewicht g_y gilt entsprechend

$$\mu_y = \pm \frac{\mu}{\sqrt{g_y}}$$

und es ist folglich

$$g_x : g_y = \frac{1}{\mu_x^2} : \frac{1}{\mu_y^2}, \tag{6}$$

d. h. es verhalten sich die Gewichte umgekehrt wie die Quadrate der dazugehörigen mittleren Fehler.

§ 12. Berechnung des mittleren Fehlers.

Zur zahlenmäßigen Berechnung des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit nach (2) § 9 S. 25 ist die Kenntnis der wahren Fehler unendlich vieler Messungen gleicher Genauigkeit erforderlich, weshalb eine strenge Berechnung nie möglich ist. Jedoch wird man einen genäherten Wert des mittleren Fehlers auch aus einer endlichen Anzahl wahrer Fehler ermitteln können, der um so zuverlässiger ist, je größer die Anzahl der Fehler ist. Wir setzen deshalb statt der strengen Formel (2) § 9 S. 25

$$\mu^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}. \tag{1}$$

Die zweite Schwierigkeit in der Berechnung von μ besteht darin, daß die wahren Fehler ε nie bekannt sind. Wir sind deshalb auch hier auf eine Näherungsrechnung angewiesen, indem wir $\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}$ durch die Verbesserungen λ der Beobachtungen ausdrücken. Nehmen wir wieder n Messungen $l_1, l_2 \cdots l_n$ an, deren arithmetisches Mittel x ist, so haben wir nach (2) § 11 S. 28

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + x \\ \lambda_2 &= -l_2 + x \\ &\vdots \\ \lambda_n &= -l_n + x. \end{aligned} \tag{2}$$

Bezeichnen wir den *wahren* Wert der gemessenen Größe mit X, so ist

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -l_1 + X \\ \varepsilon_2 &= -l_2 + X \\ &\vdots \\ \varepsilon_n &= -l_n + X \end{aligned} \tag{3}$$

und aus (2) und (3) erhalten wir

$$[\varepsilon] - [\lambda] = n(X - x)$$

oder, da nach (3) § 11 S. 28 $[\lambda] = 0$ ist,

$$\frac{[\varepsilon]}{n} = X - x. \tag{4}$$

Subtrahieren wir die Gl. (3) von den entsprechenden Gl. (2), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \varepsilon_1 - \frac{[\varepsilon]}{n} \\ \lambda_2 &= \varepsilon_2 - \frac{[\varepsilon]}{n} \\ &\vdots \\ \lambda_n &= \varepsilon_n - \frac{[\varepsilon]}{n} \end{aligned}$$

und hieraus durch Quadrieren und Addieren

$$[\lambda\lambda] = [\varepsilon\varepsilon] + \frac{[\varepsilon]^2}{n} - 2\frac{[\varepsilon]^2}{n}$$

oder

$$[\lambda\lambda] = [\varepsilon\varepsilon] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}.$$

Wird noch das zweite Glied rechts aufgelöst, so ist

$$[\lambda\lambda] = [\varepsilon\varepsilon] - \frac{1}{n}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \cdots 2\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n).$$

Die Glieder rechts lassen sich nicht berechnen, weil die wahren Fehler ε unbekannt sind. Es bleibt deshalb weiter nichts übrig, als die Durchschnittswerte der einzelnen Glieder zu schätzen, die sie bei unendlich vielen Beobachtungen annehmen. Der Durchschnittswert von $[\varepsilon\varepsilon]$ ist gleich $n\mu^2$, die Durchschnittswerte der Glieder $2\varepsilon_1\varepsilon_2$ usw. sind aber gleich Null. Es bleibt also

$$[\lambda\lambda] = n\mu^2 - \mu^2$$

oder

$$\mu^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n-1}. \tag{5}$$

Als Zahlenbeispiel entnehmen wir aus Versuchsmessungen, die Prof. *Reinhertz* im Jahre 1892 ausführen ließ, die folgenden

mit einem Stahlmeßband von 20 m Länge gewonnenen Ergebnisse

l	λ	$\lambda\lambda$
624,63 m	+ 4 cm	16
624,69	— 2	4
624,80	— 13	169
624,58	+ 9	81
624,64	+ 3	9
624,54	+ 13	169
624,73	— 6	36
624,80	— 13	169
624,54	+ 13	169
624,66	+ 1	1
624,77	— 10	100
624,70	— 3	9
$x = 624{,}67$		$[\lambda\lambda] = 932$

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{932}{11}} = \pm 9{,}2 \text{ cm}.$$

Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels

$$\mu_x = \pm \frac{9{,}2}{\sqrt{12}} = \pm 2{,}7 \text{ cm}.$$

§ 13. Allgemeines arithmetisches Mittel.

Sind die einzelnen Beobachtungen nicht gleich genau, so können sie nicht ohne weiteres zu einem arithmetischen Mittel vereinigt werden. Wenn die mittleren Fehler der Messungen bekannt sind, so lassen sich hieraus nach (6) § 11 S. 29 ihre Gewichte berechnen, indem man einer Messung ein beliebiges Gewicht, z. B. Eins gibt. Eine Beobachtung l_i mit dem Gewicht g_i läßt sich aber nach S. 28 als arithmetisches Mittel von g_i Messungen auffassen, deren Gewicht gleich Eins und deren Summe gleich $g_i l_i$ ist. Hiermit ist der Weg gezeigt, der zu einem allgemeinen arithmetischen Mittel führt. Die Summe der auf die Gewichtseinheit reduzierten Messungen ist

$$l_1 g_1 + l_2 g_2 + \cdots + l_n g_n = [lg]$$

und ihre Anzahl

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_n = [g],$$

folglich ist ihr arithmetisches Mittel

$$x = \frac{[lg]}{[g]}. \tag{1}$$

Multiplizieren wir die *Verbesserungen*

$$\lambda_1 = -l_1 + x$$
$$\lambda_2 = -l_2 + x$$
$$\vdots$$
$$\lambda_n = -l_n + x$$

der Reihe nach mit $g_1, g_2 \cdots g_n$, so gibt ihre Summe

$$[\lambda g] = -[lg] + x[g]$$

und nach (1)

$$[\lambda g] = 0. \tag{2}$$

Zur Berechnung des mittleren Fehlers von x schreiben wir die Gl. (1) in der Form

$$x = \frac{g_1 l_1}{[g]} + \frac{g_2 l_2}{[g]} + \cdots + \frac{g_n l_n}{[g]}.$$

Diese n Glieder können wir nach den obigen Ausführungen auflösen in $[g]$ Glieder, deren Koeffizienten sämtlich gleich $\frac{1}{[g]}$ sind. Wenden wir hierauf die Fehlerhäufungsregel an, so erhalten wir

$$\mu_x^2 = [g] \cdot \frac{1}{[g]^2} \mu^2 = \frac{\mu^2}{[g]}$$

oder

$$\mu_x = \pm \frac{\mu}{\sqrt{[g]}}, \tag{3}$$

worin μ der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist. Es folgt hieraus der Satz, daß das Gewicht des arithmetischen Mittels gleich der Summe der Gewichte der einzelnen Messungen ist.

Wir schließen hier die Berechnung des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit an. Haben die Beobachtungen $l_1, l_2 \cdots l_n$ die Gewichte $g_1, g_2 \cdots g_n$, so sind die Gewichte der Größen $l_1\sqrt{g_1}$, $l_2\sqrt{g_2} \cdots l_n\sqrt{g_n}$ sämtlich gleich der Einheit. Zu diesen Größen gehören die wahren Fehler

$$\varepsilon_1\sqrt{g_1},\ \varepsilon_2\sqrt{g_2} \cdots \varepsilon_n\sqrt{g_n},$$

und wenn wir hieraus das Mittel der Quadrate bilden, so erhalten wir für den mittleren Fehler einer Beobachtung vom Gewicht Eins die Gleichung

$$\mu^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon g]}{n}. \tag{4}$$

Um statt der ε die λ einzuführen, schlagen wir den Weg von

S. 29 u. 30 ein, indem wir jedoch die Gl. (2) und (3) § 12 mit g multiplizieren. Es ist

$$(5)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 g_1 &= -l_1 g_1 + x g_1 & \varepsilon_1 g_1 &= -l_1 g_1 + X g_1 \\ \lambda_2 g_2 &= -l_2 g_2 + x g_2 & \varepsilon_2 g_2 &= -l_2 g_2 + X g_2 \\ &\vdots & &\vdots \\ \lambda_n g_n &= -l_n g_n + x g_n & \varepsilon_n g_n &= -l_n g_n + X g_n . \end{aligned}$$

Aus den Summen dieser beiden Gleichungssysteme erhalten wir

$$[\varepsilon g] - [\lambda g] = [g](X - x),$$

und da $[\lambda g] = 0$ ist,

$$(X - x) = \frac{[\varepsilon g]}{[g]}.$$

Die Gleichungssysteme (5) geben ferner nach Division durch $\sqrt{g_1}$, $\sqrt{g_2}$ usw. und Einsetzen des vorstehenden Wertes von $X - x$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \sqrt{g_1} &= \varepsilon_1 \sqrt{g_1} - \frac{[\varepsilon g]}{[g]} \sqrt{g_1} \\ \lambda_2 \sqrt{g_2} &= \varepsilon_2 \sqrt{g_2} - \frac{[\varepsilon g]}{[g]} \sqrt{g_2} \\ &\vdots \\ \lambda_n \sqrt{g_n} &= \varepsilon_n \sqrt{g_n} - \frac{[\varepsilon g]}{[g]} \sqrt{g_n} . \end{aligned}$$

Durch Quadrieren und Summieren finden wir aus diesen Gleichungen

$$\begin{aligned} [\lambda\lambda g] &= [\varepsilon\varepsilon g] - \frac{[\varepsilon g]^2}{[g]} \\ &= [\varepsilon\varepsilon g] - \frac{1}{[g]} (\varepsilon_1^2 g_1^2 + \varepsilon_2^2 g_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2 g_n^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 g_1 g_2 + \cdots \\ &\qquad + 2\varepsilon_{n-1}\, \varepsilon_n g_{n-1}\, g_n). \end{aligned}$$

Die Durchschnittswerte der Glieder $\varepsilon_1^2 g_1^2$, $\varepsilon_2^2 g_2^2$ usw. sind nach (4) gleich $g_1 \mu^2$, $g_2 \mu^2$ usw., der Glieder $2\varepsilon_1 \varepsilon_2 g_1 g_2$ usw. aber gleich Null, es ergibt sich somit

$$[\lambda\lambda g] = n\mu^2 - \mu^2$$

oder

$$(6)\qquad \mu = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda g]}{n-1}}.$$

Als Zahlenbeispiel benutzen wir die nachstehenden ebenfalls den *Reinhertz*schen Versuchen entnommenen 18 Messungen, die

mit 5 m-Latten, 4 m-Latten und einem 20 m-Meßband ausgeführt wurden.

1) 5 m-Latten		2) 4 m-Latten		3) 20 m-Band	
l	λ	l	λ	l	λ
312,540 m	— 10 mm	520	0 mm	58	— 3 cm
531	— 1	506	+ 14	54	+ 1
532	— 2	530	— 10	65	— 10
537	— 7	533	— 13	52	+ 3
517	+ 13	518	+ 2	53	+ 2
522	+ 8	513	+ 7	49	+ 6
$x_1 = 312{,}530$		$x_2 = 312{,}520$		$x_3 = 312{,}55$	
$[\lambda\lambda] = 387$		$[\lambda\lambda] = 478$		$[\lambda\lambda] = 15900$	
$\mu_1^2 = \frac{387}{5} = 77{,}4$		$\mu_2^2 = 95{,}6$		$\mu_3^2 = 3180$	

In der dritten Serie sind die Messungen auf cm abgerundet worden. Zur Bestimmung der drei Gewichte ist für jede Serie ein Mittelwert x und das Quadrat des mittleren Fehlers einer Messung berechnet worden. Hiermit erhalten wir

$$g_1 : g_2 : g_3 = \frac{1}{77{,}4} : \frac{1}{95{,}6} : \frac{1}{3180}$$

oder

$$g_1 : g_2 : g_3 = 39{,}8 : 32{,}2 : 1 .$$

Hierfür führen wir die runden Werte ein

$$g_1 = 40 \quad g_2 = 30 \quad g_3 = 1$$

und finden dann nach (1) das allgemeine arithmetische Mittel

$$x = \frac{40x_1 + 30x_2 + x_3}{71} = 312{,}526.$$

Mit diesem Werte von x werden nun die endgültigen Verbesserungen λ und für die drei Serien die Quadratsummen $[\lambda\lambda g]$ berechnet. Als Gesamtsumme ergibt sich

$$[\lambda\lambda g] = 44416$$

und hiermit wird der mittlere Fehler der Gewichtseinheit nach (6)

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{44416}{17}} = \pm \sqrt{2613} = \pm 51{,}0 \text{ mm}.$$

Da den Messungen der dritten Serie das Gewicht Eins beigelegt war, so ist zugleich

$$\mu_3 = \pm 51{,}0 \text{ mm}$$

der mittlere Fehler *einer* Messung der dritten Serie.

Ferner erhalten wir nach (5) § 11 S. 29

$$\mu_2 = \pm \sqrt{\frac{2613}{30}} = \pm 9{,}0 \text{ mm}$$

und

$$\mu_1 = \pm \sqrt{\frac{2613}{40}} = \pm 8{,}1 \text{ mm}.$$

Endlich finden wir noch den mittleren Fehler des allgemeinen arithmetischen Mittels nach (3)

$$\mu_x = \pm \sqrt{\frac{2613}{426}} = \pm 2{,}5 \text{ mm}.$$

§ 14. Mittlerer Fehler aus Beobachtungsdifferenzen.

Sind mehrere gleichartige Größen, z. B. nahezu gleich lange Strecken, je zweimal gemessen, so lassen die *Messungsdifferenzen* auch einen Schluß auf die Genauigkeit der Messungen zu. Bezeichnen wir die Messungen mit l und l', ihre Differenzen mit d und ihre wahren Fehler mit ε und ε', so ist

$$\begin{aligned} l_1' - l_1 &= d_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_1' \\ l_2' - l_2 &= d_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_2' \\ &\cdot \\ &\cdot \\ l_n' - l_n &= d_n = \varepsilon_n - \varepsilon_n'. \end{aligned} \tag{1}$$

Hieraus erhalten wir

$$[dd] = [\varepsilon\varepsilon] + [\varepsilon'\varepsilon'] - 2[\varepsilon\varepsilon'].$$

Der Durchschnittswert des letzten Gliedes ist Null, derjenige der beiden ersten Glieder ist gleich $n\mu^2$, wenn μ den mittleren Fehler der einzelnen Beobachtungen bezeichnet. Es ist folglich

$$[dd] = n\mu^2 + n\mu^2$$

oder

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{2n}}. \tag{2}$$

Beziehen sich die Differenzen d auf Messungen mit verschiedenen Gewichten $g_1\ g_2 \cdots g_n$, so multiplizieren wir die Gl. (1) mit den Quadratwurzeln aus den Gewichten und erhalten

$$[ddg] = [\varepsilon\varepsilon g] + [\varepsilon'\varepsilon' g] - 2[\varepsilon\varepsilon' g].$$

Die Einführung der Durchschnittswerte für die einzelnen Glieder rechts gibt dann nach (4) § 13 S. 32

(3) $$\mu = \pm \sqrt{\frac{[ddg]}{2n}}$$

als mittleren Fehler einer Messung vom Gewicht Eins.

Beispiel. Aus den nachstehenden gleich genau ausgeführten Doppelmessungen ist der mittlere Fehler einer Messung zu ermitteln.

l	l'	d	dd
132,45 m	132,54 m	9 cm	81
135,26	135,21	5	25
134,77	134,73	4	16
132,59	132,69	10	100
136,62	136,58	4	16
134,09	134,09	0	0
			$[dd] = 238$

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{238}{12}} = \pm 4{,}45 \text{ cm}.$$

§ 15. Genauigkeit der Punktbestimmung.

Die Genauigkeit eines Punktes, dessen rechtwinklige Koordinaten aus Messungen unmittelbar oder durch Rechnung gefunden sind, kann durch die mittleren Fehler der Koordinaten angegeben werden. Jedoch ist sie hierdurch nicht eindeutig bestimmt, da die beiden mittleren Fehler von der Richtung der Koordinatenachsen abhängig sind.

Analog dem mittleren Fehler einer Größe können wir auch den mittleren Fehler der Lage eines Punktes angeben. Bezeichnen wir die wahren Fehler der Koordinaten eines Punktes mit ε_x und ε_y, so ist der wahre Fehler des Punktes

(1) $$\Delta = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2},$$

und da nach (2) § 9 S. 25 für den mittleren Fehler des Punktes die Gleichung

$$M^2 = \sum \Delta^2 \varphi(\Delta)$$

gilt, so erhalten wir

$$M^2 = \sum\sum (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2) \varphi(\Delta).$$

Nach einem Satz aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Auftretens zweier Er-

eignisse gleich dem Produkt aus den Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse. Also ist

$$\varphi(\Delta) = \varphi(\varepsilon_x)\varphi(\varepsilon_y),$$

und

$$M^2 = \sum\sum(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2)\varphi(\varepsilon_x)\varphi(\varepsilon_y)$$

oder

$$M^2 = \sum\varepsilon_x^2\varphi(\varepsilon_x)\sum\varphi(\varepsilon_y) + \sum\varepsilon_y^2\varphi(\varepsilon_y)\sum\varphi(\varepsilon_x).$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß von mehreren Ereignissen eins eintrifft, ist gleich der Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten. Da aber irgend ein Fehler ε_x und ein Fehler ε_y bestimmt auftreten müssen, so ist

$$\sum\varphi(\varepsilon_x) = 1 \quad \text{und} \quad \sum\varphi(\varepsilon_y) = 1,$$

also

$$M^2 = \sum\varepsilon_x^2\varphi(\varepsilon_x) + \sum\varepsilon_y^2\varphi(\varepsilon_y).$$

Die beiden Glieder rechts sind aber nach (2) § 9 S. 25 die Quadrate der mittleren Fehler μ_x und μ_y. Es ist also

$$M^2 = \mu_x^2 + \mu_y^2. \tag{2}$$

Die Gl. (1) gilt für beliebige Richtungen der Koordinatenachsen, es ist also auch der Wert von M von dem Koordinatensystem unabhängig und deshalb als eindeutiges Genauigkeitsmaß brauchbar. μ_x und μ_y bezeichnen die mittleren Fehler der Punktlage in zwei beliebigen zueinander senkrechten Richtungen.

Das vorstehende Kapitel beschäftigt sich mit der Fehlertheorie unabhängiger Beobachtungen und ihrer Funktionen. Da die meisten Messungen vor ihrer weiteren Verwendung einer Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate unterzogen werden, so hat die Fehlertheorie der *ausgeglichenen*, also nicht mehr voneinander unabhängigen Beobachtungen eine wesentlich größere Bedeutung. Diese Theorie wird im Zusammenhange mit der Ausgleichungsrechnung im vierten Abschnitt eingehend behandelt, und es wird am Schluß dieses Abschnitts auch auf die spezielle Literatur hingewiesen.

3. Kapitel.

Theorie optischer Instrumente.

§ 16. Brechung an Kugelflächen.

Zum vollen Verständnis der geodätischen Instrumente ist die Kenntnis der Grundlehren der *geometrischen Optik* erforderlich, soweit sie die Abbildung von Objekten durch Linsensysteme behandelt. Wir betrachten zunächst den Fall einer einzigen brechenden Kugelfläche. Von einem leuchtenden Punkt P (Fig. 25) gehe ein unendlich dünnes Büschel von Lichtstrahlen

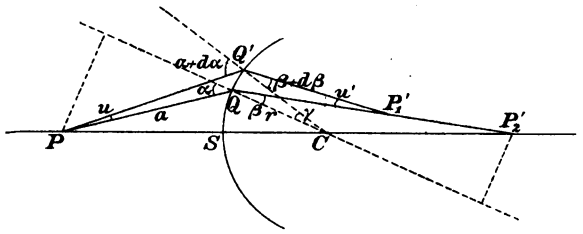


Fig. 25.

aus und treffe eine zwei verschiedene Medien trennende Kugelfläche. Da die einzelnen Strahlen des Büschels die Fläche in verschiedenen Punkten schneiden, so werden sie verschiedene Brechungen erleiden und sofern sie in verschiedenen Einfallsebenen liegen, sich nach der Brechung kreuzen. Zwei benachbarte Strahlen PQ und PQ', die in derselben Einfallsebene liegen (*meridionale Strahlen*), schneiden sich nach der Brechung in einem Punkte P_1', den wir als den *meridionalen Bildpunkt* von P bezeichnen. Ferner gibt es zwei andere benachbarte Strahlen des Büschels, die mit PC gleiche Winkel bilden (*sagittale Strahlen*), infolgedessen auch dieselbe Brechung erleiden und sich wieder in einem Punkt P_2' der Geraden PC, dem *sagittalen Bildpunkt* von P, treffen. Die Punkte P_1' und P_2' werden auch die *astigmatischen Bildpunkte* von P für das betrachtete Lichtbüschel genannt. Nur diese beiden Strahlenpaare des Büschels liefern Bildpunkte.

Um aus der Objektweite a die meridionale Bildweite b be-

rechnen zu können, haben wir in Fig. 25 nach dem Brechungsgesetz

$$v \sin \alpha = v' \sin \beta, \tag{1}$$

wo v und v' die Brechungsindices der beiden Medien sind. Ferner ist, wenn $QQ' = ds$ und $QP_1' = b$ gesetzt wird,

$$u = \frac{ds}{a} \cos \alpha, \quad u' = \frac{ds}{b} \cos \beta \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{ds}{r}$$

und hiermit wird

$$d\alpha = \gamma + u = ds \left(\frac{1}{r} + \frac{\cos \alpha}{a}\right).$$

$$d\beta = \gamma - u' = ds \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos \beta}{b}\right).$$

Aus dem Brechungsgesetz (1) erhalten wir

$$v \cos \alpha d\alpha = v' \cos \beta d\beta$$

oder

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{v' \cos \beta}{v \cos \alpha} = \frac{\frac{1}{r} + \frac{\cos \alpha}{a}}{\frac{1}{r} - \frac{\cos \beta}{b}}$$

und hieraus

$$\frac{v \cos^2 \alpha}{a} + \frac{v' \cos^2 \beta}{b} = \frac{1}{r} (v' \cos \beta - v \cos \alpha). \tag{2}$$

Für die sagittale Abbildung haben wir, wenn $QP_2' = b'$ ist,

$$\frac{a \sin \alpha}{b' \sin \beta} = \frac{a \cos \alpha + r}{b' \cos \beta - r} = \frac{\frac{a}{r} \cos \alpha + 1}{\frac{b'}{r} \cos \beta - 1} = \frac{av'}{b'v},$$

und dies gibt

$$\frac{v}{a} + \frac{v'}{b'} = \frac{1}{r} (v' \cos \beta - v \cos \alpha). \tag{3}$$

Besondere Bedeutung hat der Fall, in dem das Lichtbüschel die Fläche unter einem kleinen Einfallswinkel trifft, so daß die zweiten und höheren Potenzen von α und deshalb auch von β vernachlässigt werden können. Führen wir noch die Bestimmung ein, daß a, b und r positiv gerechnet werden, wenn sie von S aus in der Richtung der Lichtbewegung, also rechts liegen, so gehen die beiden Gleichungen (2) und (3) über in

$$\frac{v'}{b} - \frac{v}{a} = \frac{v' - v}{r}. \tag{4}$$

Man sieht, daß jetzt beide Bildpunkte in einem Punkte zu-

sammenfallen, der auf PC liegt und den wir mit P' bezeichnen wollen. Da in (4) α und β nicht mehr auftreten, so werden alle von P ausgehenden Strahlen, die die Fläche unter kleinen Einfallswinkeln treffen, sich in P' vereinigen. Wir wollen diese Strahlen kurz als *Achsstrahlen* bezeichnen.

In P liege eine Ebene senkrecht zu PC, und ein Punkt A derselben werde in A' durch Achsstrahlen abgebildet (Fig. 26).

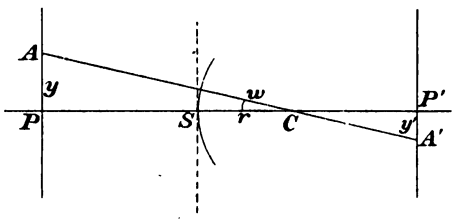


Fig. 26.

Wird der Winkel w von derselben Ordnung wie α und β angenommen, so liegt auch A' in der Ebene, die PC in P' senkrecht schneidet, und die brechende Fläche kann auch als eine PC in S senkrecht schneidende Ebene angesehen werden. Diese Abbildung gilt mit der Beschränkung auf kleine Winkel für alle Punkte der Normalebenen in P und P', es werden also Figuren der ersten Ebene, der Objektebene, in der zweiten, der Bildebene, ähnlich abgebildet. Liegt auf PC der Mittelpunkt einer zweiten Kugelfläche, so gilt jetzt die Ebene in P' als Objektebene und wird in P'' in einer zweiten Bildebene abgebildet. Dasselbe gilt für beliebig viele Flächen, deren Mittelpunkte auf derselben Geraden liegen, die also *zentriert* sind. Alle Objektpunkte, von denen Lichtstrahlen auf die erste brechende Fläche treffen, liegen im *Objektraum*, alle Bildpunkte, die durch Schnitt dieser Strahlen nach der letzten Brechung entstehen, liegen im *Bildraum*.

Jeder Geraden, die durch einen Objektpunkt geht, entspricht eine Gerade, die durch den Bildpunkt des letzteren geht, und jeder achsensenkrechten Ebene im Objektraum eine solche im Bildraum, in der Figuren der ersteren ähnlich abgebildet werden. Dieses Verhältnis, in dem Objektraum und Bildraum zueinander stehen, wird in der projektiven Geometrie als *kollineare Verwandtschaft* bezeichnet. Ohne hierauf näher einzugehen, können wir einige einfache Gesetze leicht angeben.[1])

1) Vgl. J. Classen, Mathematische Optik. Leipzig 1901. Kap. VII.

§ 17. Geometrische Beziehungen in einem abbildenden System.

Wir wollen hierbei zunächst von der Verwirklichung der Abbildung durch ein optisches System absehen und die entwickelten Beziehungen zwischen Objekt- und Bildraum ohne Einschränkung gelten lassen. Die Achse des Systems sei die Abszissenachse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Ordinaten nach oben positiv gerechnet werden. Einem Punkt P (Fig. 27) im Objektraum entspricht ein Punkt P' im Bildraum, und das Verhältnis der Ordinaten $\beta = \frac{y'}{y}$ ist die *Lateralvergrößerung* der Abbildung. Ist der Wert von β für alle konjugierten Ebenen-

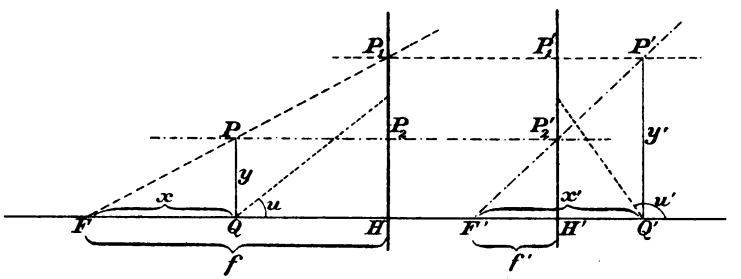


Fig. 27.

paare derselbe, so wird die Abbildung als *teleskopische* bezeichnet. In diesem Falle werden parallelen Geraden des Objektraums auch parallele Geraden im Bildraum entsprechen. Bei nicht teleskopischer Abbildung ist β für alle Ebenenpaare verschieden, und es werden parallelen Geraden im Objektraum solche Geraden im Bildraum zugehören, die durch einen Punkt in endlicher Entfernung gehen. Der unendlich fernen Objektebene ist daher eine Bildebene in endlicher Entfernung konjugiert, die *Brennebene* des Bildraums. Ebenso entspricht der Brennebene des Objektraums die unendlich ferne Bildebene. Die Brennebenen schneiden die Achse in den *Brennpunkten* F und F'.

Der Geraden FP entspricht nach dem Vorhergehenden die Achsenparallele durch P', und der Geraden $F'P'$ die Achsenparallele durch P. Der Ausdruck $\beta = \frac{y'}{y}$ gibt die Lateral-

vergrößerung der beiden Ebenen, in denen P und P' liegen, an. Verschieben wir P auf PF, so wird P' auf der Achsenparallelen wandern, und die Vergrößerung β wird stets eine andere sein, da y' konstant bleibt. Gelangt P nach P_1, so wird $\beta = 1$. Wird andrerseits P' auf $P'F'$ verschoben, so wird die Vergrößerung $\beta = 1$, wenn P' nach P_2' gelangt. Hierbei ist es noch zweifelhaft, wo die zu P_1 bzw. P_2' konjugierten Punkte auf den Geraden P_1P' bzw. $P_2'P$ liegen. Man sieht aber, daß die beiden Ebenen in P_1 und P_2' mit derselben Vergrößerung $\beta = 1$ abgebildet werden und da im nicht teleskopischen System zwei Ebenenpaare nicht denselben Wert von β haben können, so sind die beiden Ebenen einander konjugiert und damit ist auch die Lage von P_1' bzw. P_2 bekannt. Diese beiden Ebenen, die einander mit der Vergrößerung 1 abbilden, heißen *Hauptebenen* und ihre Schnittpunkte H und H' mit der Achse *Hauptpunkte*. Die Abstände f und f' der Hauptpunkte von den Brennpunkten sind die *Brennweiten* des Systems. Auch f und f' sind als Strecken zu rechnen, die positiv sind, wenn H und H' rechts von F und F' liegen.

Betrachten wir ferner ohne Rücksicht auf Fig. 27 einen beliebigen Strahl, der durch P geht, und die Achse unter einem Winkel u schneidet, so wird sein Bildstrahl durch P' gehen und die Achse unter einem Winkel u' schneiden. Das Verhältnis

$$\gamma = \frac{\operatorname{tang} u'}{\operatorname{tang} u}$$

heißt das *Konvergenzverhältnis* oder die *Winkelvergrößerung*. Es wird nun zwei konjugierte Strahlen geben, deren Konvergenzverhältnis gleich 1 ist, bei denen also $u = u'$ ist. Die Schnittpunkte dieser Strahlen mit der Achse heißen nach *Listing* die *Knotenpunkte* des Systems.

Die Brennpunkte F und F' (Fig. 27) seien die Nullpunkte zweier Koordinatensysteme, in denen P und P' die Abszissen x und x' haben. Es ist alsdann

(1) $\frac{y'}{x'} = \frac{y}{f'}$, also $\beta = \frac{x'}{f'}$ und entsprechend auch $\beta = \frac{f}{x}$.

Hieraus ergibt sich

(2) $$ff' = xx'.$$

Führen wir statt F und F' die neuen Nullpunkte H und H' ein und bezeichnen die neuen Abszissen von P und P' mit a und b, so ist

$$x = f + a, \quad x' = f' + b,$$

also nach (2)

$$(a + f)(b + f') = ff'$$

oder

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{b} + 1 = 0. \tag{3}$$

Die Gl. (1) gehen dann über in

$$\beta = \frac{f' + b}{f'} = -\frac{f}{f + a}. \tag{4}$$

Von Wichtigkeit ist noch der Wert des Konvergenzverhältnisses γ für beliebige Strahlenpaare, die durch die beiden konjugierten Achspunkte Q und Q' gehen. Nach Fig. 27 ist

$$\gamma = \frac{\operatorname{tang} u'}{\operatorname{tang} u} = \frac{f - x}{f' - x'},$$

also konstant für alle Strahlenpaare. Es ist aber

$$\frac{P_1P_2}{f - x} = \frac{y'}{f} \quad \text{und} \quad \frac{P_2'P_1'}{x' - f'} = \frac{y}{f'}$$

und da

$$P_1P_2 = P_1'P_2',$$

so ist

$$\frac{f - x}{f' - x'} = -\frac{y}{y'}\frac{f}{f'} = -\frac{1}{\beta}\frac{f}{f'},$$

also

$$\gamma = -\frac{f}{x'} = -\frac{x}{f'}. \tag{5}$$

Die Gl. (3) und (4) bestimmen den Abbildungsvorgang vollständig, indem zu einem durch die Werte von a und y gegebenen Objektpunkt die erstere die Größe von b, die letztere die Größe von y' für den entsprechenden Bildpunkt liefert. Wir bezeichnen einen Objektpunkt als *reell*, wenn er im Sinne der Lichtbewegung vor der zugehörigen Hauptebene, als *virtuell*, wenn er hinter der Hauptebene liegt. Für die Bildpunkte haben diese Bezeichnungen die umgekehrte Bedeutung.

Das einfache Gesetz, das in Gl. (3) ausgesprochen ist, wurde von *C. F. Gauß* in den „Dioptrischen Untersuchungen“ im Jahre 1841 gefunden, indem er durch Verfolgen der Achsstrahlen durch ein System brechender Kugelflächen zu der Ein-

führung der Haupt- und Brennpunkte des Systems gelangte. Daß diese Beziehungen von der Abbildung durch die einzelnen brechenden Flächen unabhängig sind, und daß sie vielmehr notwendig überall da auftreten müssen, wo die Abbildung eines Raumes in einen zweiten durch Strahlen stattfindet, wurde durch *Möbius* und später durch *Abbe* gezeigt, die die von *Gauß* gefundenen Gesetze ohne Rücksicht auf die Verwirklichung durch ein optisches System rein mathematisch ableiteten.

§ 18. Zusammensetzung mehrerer Systeme.

In Fig. 28 seien F_1, H_1, H_1', F_1' bzw. F_2, H_2, H_2', F_2' die Haupt- und Brennpunkte zweier abbildender Systeme, die zusammen wieder wie ein einzelnes System zu behandeln sind.

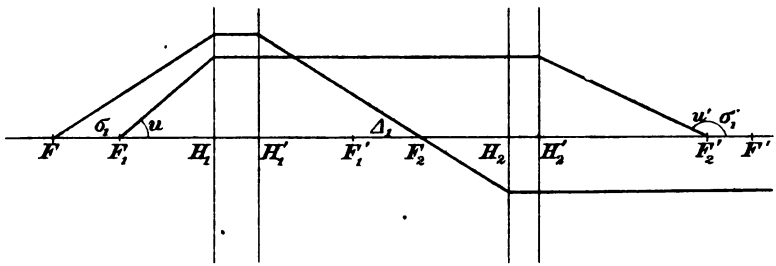


Fig. 28.

Wir bezeichnen die Brennpunkte des letzteren mit F und F', die Strecke $F_1'F_2$ mit Δ_1 und die Abstände der Punkte F_1 und F_2' von den Brennpunkten F und F' mit σ_1 und σ_1'.

Ein von F ausgehender Strahl muß nach dem Verlassen des gesamten Systems parallel der Achse laufen, infolgedessen auch durch F_2 gehen. Demnach sind F und F_2 konjugierte Punkte im ersten System.

Ebenso sieht man, daß die Punkte F_1' und F' im zweiten System einander konjugiert sind.

Nach Gl. (2) § 17 S. 42 ist dann

$$-\sigma\Delta = f_1 f_1' \quad \text{und} \quad \sigma'\Delta = +f_2 f_2'$$

oder

$$\sigma = -\frac{f_1 f_1'}{\Delta} \quad \text{und} \quad \sigma' = +\frac{f_2 f_2'}{\Delta}, \tag{1}$$

womit die Lage der Brennpunkte F und F' bekannt ist.

Sind f und f' die Brennweiten des Gesamtsystems, so ist nach (5) § 17 S. 43

$$\gamma = -\frac{f}{\sigma'} = -\frac{\sigma}{f'}.$$

Andrerseits ist nach Fig. 28 der Punkt F_2' in dem Gesamtsystem dem Punkte F_1 konjugiert, infolgedessen ist

$$\gamma = \frac{f_1}{f_2'},$$

folglich wird

$$f = -\sigma'\frac{f_1}{f_2'} \quad \text{und} \quad f' = -\sigma\frac{f_2'}{f_1}$$

und mit Hilfe von (1)

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} \quad \text{und} \quad f' = +\frac{f_1' f_2'}{\Delta}. \tag{2}$$

Wenn wir ein drittes System mit den Brennweiten f_3 und f_3' hinzufügen, für das die Strecke $F_2' F_3 = \Delta_2$ ist, so können wir die vorstehende Entwicklung unmittelbar anwenden, wenn wir die beiden ersten Systeme durch das gefundene Gesamtsystem ersetzen. Als Systemabstand ist hierbei $\Delta_2 - \sigma_1'$ einzuführen. Wir finden auf diese Weise als Gesamtbrennweite der drei Systeme

$$f = (-1)^2 \frac{f_1 f_2 f_3}{\Delta_1(\Delta_2 - \sigma_1')} \quad \text{und} \quad f' = +\frac{f_1' f_2' f_3'}{\Delta_1(\Delta_2 - \sigma_1')}. \tag{3}$$

Für k Systeme ergibt sich auf demselben Wege

$$f = (-1)^{k-1} \frac{f_1 f_2 \cdots f_k}{N_k} \quad \text{und} \quad f' = +\frac{f_1' f_2' \cdots f_k'}{N_k}, \tag{4}$$

wobei

$$N_k = \Delta_1 (\Delta_2 - \sigma_1')(\Delta_3 - \sigma_2') \cdots (\Delta_{k-1} - \sigma_{k-2}') \tag{5}$$

ist. Es folgt hieraus

$$\frac{f}{f'} = (-1)^{k-1} \frac{f_1 f_2 \cdots f_k}{f_1' f_2' \cdots f_k'}. \tag{6}$$

§ 19. Optische Systeme.

Die einfachen Abbildungsgleichungen, die wir aus rein geometrischen Beziehungen gefunden haben, müssen nun auch für die Abbildung durch eine Reihe brechender Kugelflächen ver-

mittelst Achsstrahlen gelten. Für eine einzelne Fläche haben wir nach (4) § 16 S. 39

$$\frac{v'}{b} - \frac{v}{a} = \frac{v' - v}{r}. \tag{1}$$

Setzen wir

$$\frac{v}{v' - v} r = f_1, \quad \frac{v'}{v' - v} r = -f_1', \tag{2}$$

so geht diese Gleichung in (3) § 17 S. 43 über; es fallen also hier die Hauptpunkte mit dem Kugelscheitel zusammen.

Aus (2) ergibt sich

$$\frac{f_1}{f_1'} = -\frac{v}{v'}$$

und für weitere brechende Kugelflächen gilt entsprechend

$$\begin{aligned} \frac{f_2}{f_2'} &= -\frac{v'}{v''} \\ \frac{f_3}{f_3'} &= -\frac{v''}{v'''} \\ &\vdots \\ \frac{f_k}{f_k'} &= -\frac{v^{(k-1)}}{v^{(k)}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Wird dies in die Gl. (6) des vorigen Paragraphen eingesetzt, so erhalten wir

$$\frac{f}{f'} = -\frac{v}{v^{(k)}}. \tag{4}$$

Es ist also das Verhältnis der beiden Brennweiten eines optischen Systems nur von dem ersten und letzten Brechungsindex abhängig. Sind die Brechungsindices des ersten und letzten Mediums gleich, wie es z. B. bei Luft von gleicher Beschaffenheit der Fall ist, so ist

$$f = -f'. \tag{5}$$

Aus den allgemeinen Abbildungsgleichungen ergibt sich noch eine weitere wichtige Beziehung für ein optisches System. Nach (1) und (5) § 17 S. 42 u. 43 ist

$$\beta\gamma = \frac{y' \operatorname{tang} u'}{y \operatorname{tang} u} = -\frac{f}{f'}. \tag{6}$$

Da y' und u' im optischen System aus der Brechung durch sämtliche Kugelflächen hervorgehen, so können wir $y^{(k)}$ und $u^{(k}$

an ihre Stelle setzen. Es folgt dann aus (6) und (4) die Beziehung

$$v y \operatorname{tang} u = v^{(k)} y^{(k)} \operatorname{tang} u^{(k)}, \tag{7}$$

die als *Lagrange-Helmholtz*sche Gleichung bezeichnet wird.

§ 20. Die Konstanten optischer Systeme.

Um die Gl. (3) § 17 S. 43 auf ein gegebenes System brechender Kugelflächen anwenden zu können, ist es notwendig, die Lage der Haupt- und Brennpunkte zu ermitteln. Gegeben seien hierzu die Radien r der brechenden Flächen und die Abstände d der Scheitelpunkte. Statt der Brechungsindices $v_1\ v_2 \cdots$ führen wir die *Brechungsquotienten*

$$n_1 = \frac{v_2}{v_1}, \qquad n_2 = \frac{v_3}{v_2} \cdots$$

ein, die für zwei Nachbarmedien gelten.

Erhält die letzte Abbildung den Index k, so haben wir nach Gl. (4) § 16 S. 39

$$\begin{aligned}
&\frac{n_1}{b_1} - \frac{1}{a_1} = \frac{n_1 - 1}{r_1}, && -a_2 = d_1 - b_1\\
&\frac{n_2}{b_2} - \frac{1}{a_2} = \frac{n_2 - 1}{r_2}, && -a_3 = d_2 - b_2\\
&\quad\vdots\\
&\frac{n_k}{b_k} - \frac{1}{a_k} = \frac{n_k - 1}{r_k}:
\end{aligned} \tag{1}$$

Setzen wir hierin $a_1 = \infty$ und berechnen b_k, so gibt dieser Wert den Abstand des hinteren Brennpunktes von der letzten Fläche an.

Kehren wir das ganze System um und wiederholen die Berechnung, so erhalten wir den Abstand des vordern Brennpunktes von der ersten Fläche.

Zur Bestimmung der Brennweiten selbst betrachten wir in Fig. 29 einen parallel der Achse in der Höhe h_1 auf die erste Fläche fallenden Strahl. Bezeichnen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ die beiden Hauptebenen des Systems, so ist

$$\frac{h_1}{f'} = \operatorname{tang} u' \quad \text{und auch} \quad -\frac{h_k}{b_k} = \operatorname{tang} u',$$

folglich ist

$$f' = \frac{h_1}{\operatorname{tang} u'} = \frac{h_1 h_2 \cdots h_k}{h_2 h_3 \cdots h_k \operatorname{tang} u'}.$$

Es ist aber auch, wenn die Krümmung der brechenden Flächen wie bisher vernachlässigt wird,

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{b_1}{a_2}, \quad \frac{h_2}{h_3} = \frac{b_2}{a_3} \text{ usw., also}$$

$$f' = \frac{b_1 b_2 \cdots b_{k-1} h_k}{a_2 a_3 \cdots a_k \operatorname{tang} u'}$$

oder

$$f' = -\frac{b_1 b_2 \cdots b_k}{a_2 a_3 \cdots a_k} \tag{2}$$

und zur Berechnung von f hat man nach (4) § 19 S. 46

$$f = -f' \frac{v}{v^{(k)}}. \tag{3}$$

Für ein Zahlenbeispiel entnehmen wir aus *Steinheil* und *Voit*, Handbuch der angewandten Optik, 1. Band, Leipzig 1891,

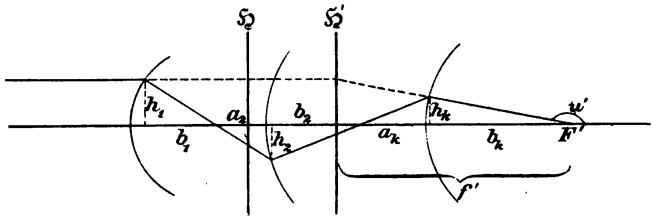


Fig. 29.

S. 167 die Zahlenwerte eines Systems von zwei Linsen. Hierfür ist gegeben

$r_1 = +174{,}39 \quad d_1 = +8{,}00 \quad r_2 = -572{,}36 \quad d_2 = +0{,}39$

$r_3 = -385{,}38 \quad d_3 = +5{,}00 \quad r_4 = +659{,}29,$

$$n_1 = \frac{1}{n_2} = 1{,}51806$$

$$n_3 = \frac{1}{n_4} = 1{,}61358.$$

Hiermit findet sich aus den Gl. (1) für den Durchgang des Strahls von der ersten zur vierten Fläche

$$b_4 = +702{,}58$$

und in umgekehrter Richtung

$$b_4' = +728{,}99.$$

Ferner gibt die Gl. (2)

$$f = -f' = +720{,}06,$$

und da der Abstand der Brennpunkte gleich

$$b_4 + b_4' + d_1 + d_2 + d_3 = 1444{,}96$$

ist, so erhält man für den Abstand der Hauptpunkte 4,84.

Zur experimentellen Bestimmung der Lage der Hauptpunkte und der Brennweiten eines vorliegenden Linsensystems, dessen Radien und Scheitelabstände nicht bekannt sind, können verschiedene Methoden angewendet werden.

Ein einfacher Weg bietet sich durch die Ermittlung der Lage konjugierter Punkte auf der Achse. Die unbekannten Abstände der beiden Brennpunkte von einem festen Punkt der Achse seien p und q. Werden von demselben Punkte aus die Abstände u_1 und v_1 zweier konjugierter Punkte gemessen, so erhält man nach Gl. (2) § 17 S. 42

$$(u_1 - p)(v_1 - q) = -f^2.$$

Wiederholt man die Messung für zwei andere Punktpaare, so ist auch

$$(u_2 - p)(v_2 - q) = -f^2$$
$$(u_3 - p)(v_3 - q) = -f^2,$$

und aus diesen drei Gleichungen können die drei Unbekannten p, q und f berechnet werden. *Gauß* hat in seinen Dioptrischen Untersuchungen die praktische Ausführung dieser Methode in eleganter Weise durchgeführt.

§ 21. Die Abbildungsfehler. Blenden.

Bisher wurde nur die Abbildung durch ein optisches System vermittelst Achsstrahlen betrachtet, die wir als *Gaußsche Abbildung* bezeichnen wollen. Bei optischen Instrumenten ist eine solche Abbildung nicht ausreichend. Für die hier interessierenden Zwecke ist entweder eine Abbildung kleiner Flächenelemente durch weit geöffnete Strahlenbüschel oder eine solche ausgedehnter Flächen durch enge Büschel erforderlich. Der erstere Fall tritt bei den Objektiven, der letztere bei den Okularen der Fernrohre auf. Wir wollen nun die Fehler betrachten, die durch

diese beiden Erweiterungen der Abbildungsgrenzen bei einer Linse auftreten.

Im ersteren Fall werden von einem leuchtenden Punkt der Achse außer den Achsstrahlen auch noch Randstrahlen auf die Linse fallen; diese werden nicht durch den *Gauß*schen Bildpunkt gehen, und man bezeichnet ihre Abweichung von dem letzteren als *sphärische Aberration.* Wird durch den *Gauß*schen Bildpunkt eine achsensenkrechte Ebene gelegt, so schneidet diese das Strahlenbüschel in einem kleinen Kreise, dem *Zerstreuungskreise.* Von dem Durchmesser des Zerstreuungskreises hängt die Verundeutlichung des Bildes ab, da erst von einer gewissen Größe des Durchmessers ab die Zerstreuungskreise dem Auge wahrnehmbar sind, während sie unterhalb dieser Grenze nur als Punkte gesehen werden. Es ist dies von Wichtigkeit für die Konstruktion *aberrationsfreier* Linsensysteme, da die Aberration sich wohl verkleinern aber nicht beseitigen läßt.

Ist keine Aberration vorhanden, so werden die Bilder der Achsstrahlen und der Randstrahlen zusammenfallen. Dabei kann aber noch die Vergrößerung dieser beiden Abbildungsarten verschieden sein, so daß die Bilder sich in verschiedener Größe überdecken. Bezeichnen wir wieder die Winkel, die zwei konjugierte Strahlen mit der Achse bilden, mit u und u', so läßt sich nachweisen, daß das Verhältnis $\frac{\sin u'}{\sin u}$ für alle Strahlenpaare konstant sein muß, wenn die Vergrößerung dieselbe sein soll. Die Gleichung ist unter dem Namen *Sinusbedingung* bekannt. Der Widerspruch, in dem diese Forderung zu der Gleichung von *Lagrange-Helmholtz* steht, ist nur dann ohne Einfluß, wenn die Winkel u und u' klein sind, wie es bei Fernrohren der Fall ist.

Im zweiten Fall wird in erster Linie der schon kurz besprochene *Astigmatismus* eine Rolle spielen und bewirken, daß eine ausgedehnte Objektebene durch unendlich dünne Büschel in zwei verschiedene Flächen abgebildet wird. Wenn es möglich ist, diese Flächen zum Zusammenfallen zu bringen, so bleibt die Bildfläche immer noch gekrümmt, es ist der als *Bildfeldkrümmung* bezeichnete Fehler vorhanden. Sind endlich diese beiden Fehler aufgehoben, so braucht noch nicht die Ähnlichkeit

zwischen Bild und Objekt zu bestehen, es kann *Verzeichnung* auftreten, oder die Bedingung der *Orthoskopie* nicht erfüllt sein.

Bisher wurde die Annahme einfarbiger Lichtstrahlen von gleicher Brechbarkeit gemacht. Gehen Strahlen mit verschiedenen Brechungsexponenten durch die Linse hindurch, so ist aus dem Früheren ersichtlich, daß sich für jeden Strahl andere Haupt- und Brennpunkte ergeben, daß also auch verschiedene Bilder entstehen.

Der wichtigste der hierdurch entstehenden Fehler ist die Verschiedenheit der Bildörter. Im *Gauß*schen Bildpunkte werden die Strahlen verschiedener Farbe einen *Zerstreuungskreis infolge der Farbenzerstreuung* bilden. Ferner wird mit der Änderung der Brennweite auch ein *Farbenfehler der Vergrößerung* verbunden sein. Es ist zu bemerken, daß diese beiden Fehler auch für die Achsstrahlen gelten.

Durch Kombination mehrerer Linsen zu einem einheitlichen System können die vorstehenden Fehler beliebig verändert werden. Die Aufgabe der praktischen Optik ist es, aus mehreren Linsen solche Systeme zusammenzustellen, die von einzelnen Fehlern je nach dem besonderen Zweck des Instruments soweit befreit sind, daß die Fehlerreste infolge der Unvollkommenheit unserer Sehorgane nicht mehr wahrnehmbar sind.

Da auch eine Kombination mehrerer Linsen immer nur eine sehr beschränkte Erweiterung des Abbildungsvorganges zuläßt, so müssen die schädlichen Strahlen durch Blenden abgehalten werden, die teils künstlich eingeführt, teils durch die Fassungen der Linsen gebildet werden. Zur Ausscheidung der Randstrahlen des in Fig. 30 von O ausgehenden Büschels sei in das Linsen-

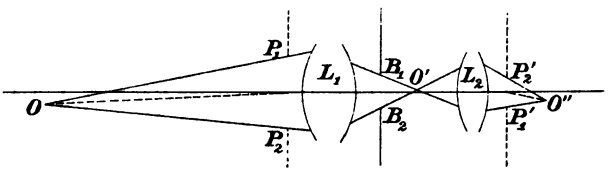


Fig. 30.

system $L_1 L_2$ die Blende $B_1 B_2$ eingeschaltet, von der durch die Linsen L_1 und L_2 die Bilder $P_1 P_2$ und $P_1' P_2'$ entworfen werden. Es ist ersichtlich, daß durch diese beiden Bilder das eintretende

und das austretende Strahlenbüschel begrenzt werden. Man bezeichnet $B_1 B_2$ als *Aperturblende*, und ihre Bilder $P_1 P_2$ bzw. $P_1' P_2'$ als *Eintritts-* bezw. *Austrittspupille.*

Der von dem Objektpunkt O auf die Mitte der Eintrittspupille fallende Strahl heißt *Hauptstrahl* des Büschels.

Eine zweite Blende ist erforderlich, um die Büschel mit großer Neigung der Hauptstrahlen gegen die Achse abzuhalten, also die Ausdehnung des Objekts zu begrenzen. Diese Blende ist derartig angebracht, daß ihr objektseitiges Bild in die Objektebene fällt, wodurch eine scharfe Begrenzung des Objekts erzielt wird. Man bezeichnet die Blende als *Gesichtsfeldblende* und den konstanten Winkel, unter dem ihr Bilddurchmesser vom objektseitigen Brennpunkt des Systems L_1 aus erscheint, als *Gesichtsfeldwinkel.*

§ 22. Das Auge.

Die unendlich dünn gedachte Hornhaut des Auges und die beiden Flächen der Augenlinse bilden als Trennungsflächen von vier verschiedenen Medien ein optisches System, das durch geringe Veränderungen in der Krümmung der Linsenflächen und in der Lage der Linse (*Akkommodation*) fähig ist, Bilder von beliebig weit entfernten Objekten auf der lichtempfindlichen Netzhaut zu entwerfen. Diese werden durch ein System von Nerven unserer Wahrnehmung zugeführt. Bei allzugroßer Annäherung des Objekts an das Auge versagt die Akkommodation, so daß das Bild hinter die Netzhaut fällt.

Deutlich wahrgenommen werden von uns diejenigen Bildpunkte, die auf einen bestimmten Punkt der Netzhaut, die *Netzhautgrube* (*Fovea centralis*) im gelben Fleck, fallen, da alle übrigen Teile der Netzhaut nur Bilder geringerer Deutlichkeit liefern. Durch die ungemein große Beweglichkeit des Auges in seiner Höhlung werden beim Anblick eines Gegenstandes nacheinander in schneller Folge die Bilder aller Punkte des Gegenstandes in die Netzhautgrube gebracht, und hierdurch wird in uns die Vorstellung des ganzen Objekts erzeugt. Die Netzhautgrube liegt nicht in der optischen Achse des Auges, sondern ein wenig seitlich derselben, so daß eine *Sehlinie* von der

optischen Achse des Auges unterschieden werden muß. *L. Heine* hat 1900 gezeigt, daß die Netzhautfläche in der *Fovea centralis* sich aus Stäbchenquerschnitten in der Form regelmäßiger Sechsecke zusammensetzt, deren Durchmesser etwa 0,004 mm beträgt.

Durch Versuche ist festgestellt worden, daß zwei leuchtende Punkte dann noch getrennt wahrgenommen werden, wenn ihr Winkelabstand etwa eine Bogenminute beträgt. Da der Stäbchendurchmesser auch einem Sehwinkel von etwa einer Bogenminute entspricht, so nimmt man an, daß die Trennung zweier Punkte nur dann möglich ist, wenn ihre Netzhautbilder mindestens durch ein Stäbchen getrennt werden.

Von diesem *Trennungsvermögen* muß man das Vermögen der *Breitenwahrnehmung* unterscheiden, durch das wir befähigt sind, Koinzidenzen von Linien wahrzunehmen. Die gegenseitige seitliche Verschiebung der beiden Striche *a* und *b* in Fig. 31 ist nach Versuchen des Verfassers bis zu Winkelabständen von 3″ wahrnehmbar. Es ist dies zugleich die Ablesegenauigkeit, die man mit Hilfe des Nonius erreichen kann.

Fig. 31.

Endlich ist noch eine dritte Fähigkeit des Auges für die Ausführung von Messungen von größter Bedeutung, nämlich die, geringe Helligkeitsunterschiede sehr schmaler Lichtstreifen wahrzunehmen. Es gelingt mit großer Genauigkeit, die Linie *c* Fig. 31 in die Mitte des Zwischenraumes zwischen *d* und *e* zu bringen, wenn die weißen Linien unendlich schmal sind und nur noch Lichthaare bilden, deren Intensität von der Netzhaut verglichen wird. Die Ausnutzung dieses *Haarphänomens* erfolgt bei allen feineren Einstell- und Ablesevorrichtungen.

§ 23. Die Lupe und das Mikroskop.

Die Leistungsfähigkeit des Auges wird durch Vergrößerung des Sehwinkels, unter dem ein Objekt erscheint, erhöht. Eine direkte Annäherung des Objekts an das Auge ist zu diesem Zweck ohne Anstrengung des Auges nur bis zur günstigen Sehweite, die etwa 25 cm beträgt, möglich. Jedoch kann unter Anwen-

dung optischer Hilfsmittel entweder eine Annäherung des wirklichen Objekts oder eines auf optischem Wege erzeugten Bildes desselben weit über diese Grenze hinaus ermöglicht werden. Für nahe Objekte sind beide Methoden (*Lupe* und *Mikroskop*), für entfernte Objekte ist nur die letztere (*Fernrohr*) anwendbar.

Die einfache Lupe besteht aus einer bikonvexen oder plankonvexen Linse, die so zwischen Objekt y (Fig. 32) und Auge eingeschaltet wird, daß ein vergrößertes virtuelles Bild y' in der günstigen Sehweite entsteht. Da eine Aperturblende meistens

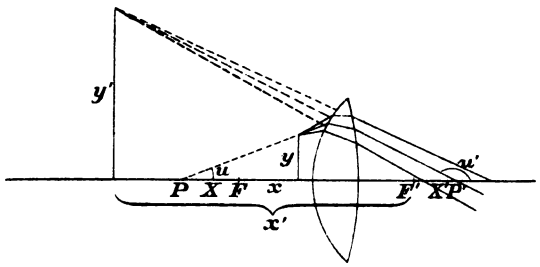


Fig. 32.

nicht vorhanden ist, so wird die Augenpupille, die wir uns in P' denken, als Austrittspupille dienen. Hiermit ist auch die Lage P der Eintrittspupille gegeben. Die Gesichtsfeldblende wird durch die Linsenfassung gebildet.

Die *Vergrößerung* v der Lupe sei das Verhältnis der Tangenten der Sehwinkel, unter denen das Bild des Objekts und das letztere selbst in der günstigen Sehweite l erscheinen. Es ist dann

$$v = \frac{l}{y} \operatorname{tang} u'.$$

Da aber

$$\operatorname{tang} u = \frac{y}{-X+x}$$

und nach den Gleichungen (5) § 17 S. 43

$\gamma = \frac{\operatorname{tang} u'}{\operatorname{tang} u} = -\frac{X}{f'}$ ist, so wird $\operatorname{tang} u' = -\frac{y\,X}{(-X+x)\,f'}$

und

$$v = -\frac{l}{f'}\frac{X}{(-X+x)} = -\frac{l}{f'}\frac{1}{\left(-1+\frac{x}{X}\right)}.$$

Nach (2) § 17 S. 42 ist

$$xx' = ff' = XX' \quad \text{und} \quad -f' = +f,$$

folglich ist

$$v = +\frac{l}{f}\frac{1}{\left(\frac{X'}{x'} - 1\right)},$$

wobei die günstige Sehweite l negativ einzuführen ist.

Der Kugel- und Farbenabweichung wegen sind einfache Linsen von kürzerer Brennweite als etwa 30 mm als Lupen nicht mehr zu verwenden, da bei den kleineren Radien die Krümmung zu groß wird. Bei größeren Brennweiten sind diese Fehler weniger gefährlich, namentlich wenn plankonvexe Linsen verwendet werden, deren ebene Flächen dem Auge zugekehrt sind.

Für kleinere Brennweiten wird die Lupe besser aus zwei plankonvexen, mit den gekrümmten Flächen gegeneinander gerichteten Linsen zusammengesetzt. Da sich die Brechung hier auf vier Flächen verteilt, so können die einzelnen Radien größer gewählt werden. Durch passende Wahl des Abstandes läßt sich auch die Farbenabweichung zum größten Teil beseitigen, wenn hierdurch auch der Objektabstand sehr verringert wird. Am meisten benutzt man bei Meßinstrumenten die in Fig. 33 abgebildete *Wilson*sche Lupe.

Das *Mikroskop* setzt sich aus zwei getrennten Linsensystemen, dem *Objektiv* und dem *Okular*, zusammen. Ersteres entwirft von dem Objekt ein reelles Bild, welches dem Auge durch das als Lupe dienende Okular zugeführt wird. Die stärkere Vergrößerung, die mit dem Mikroskop der Lupe gegenüber erreicht werden kann, spielt für geodätische Instrumente nicht die Hauptrolle. Seine große Bedeutung liegt vielmehr darin, daß in der Ebene des reellen Bildes eine Meßvorrichtung angebracht werden kann.

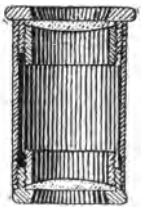


Fig. 33.

§ 24. Das astronomische Fernrohr.

Die Zusammensetzung und Wirkungsweise des astronomischen Fernrohrs ist dieselbe wie die des Mikroskops. Den verschiedenen Zwecken entsprechend ist jedoch die Konstruktion

der einzelnen Teile bei beiden Instrumenten verschieden. Fig. 34 zeigt das astronomische Fernrohr in seiner ursprünglichen Form (*Kepler*sches Fernrohr), in der Objektiv und Okular nur aus je einer bikonvexen Linse gebildet werden. Mit dem Okular ist die Gesichtsfeldblende verbunden, und da letztere jedem Auge in der günstigen Sehweite erscheinen soll, so ist das Okular ein wenig gegen die Blende verschiebbar. Da andrerseits auch die Bilder verschieden weit entfernter Objekte in die Blendenebene fallen sollen, so läßt sich auch die Okularröhre gegen das Objektiv verstellen.

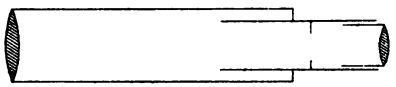


Fig. 34.

Als *Vergrößerung* des Fernrohrs definieren wir die negative Winkelvergrößerung der Strahlenpaare, die durch den vorderen Brennpunkt des Objektivs und den ihm konjugierten hinteren Brennpunkt des Okulars gehen. Nach S. 43 ist die Winkelvergrößerung für alle Strahlenpaare, die durch zwei konjugierte Achspunkte gehen, konstant. Es ist deshalb, wenn wir in Fig. 35 die Strahlen PF_1 und $F_2'P'$ betrachten,

$$\gamma = \frac{\text{tang } u'}{\text{tang } u} = -\frac{f_1}{f_2}, \quad \text{also} \quad v = \frac{f_1}{f_2}.$$

Ist $G_1 G_2$ die Gesichtsfeldblende, so fällt ihr durch das Objektiv entworfenes Bild $G_1' G_2'$ in die Objektebene, falls das Okular auf das Objekt P eingestellt ist. Der Winkel α, unter dem der

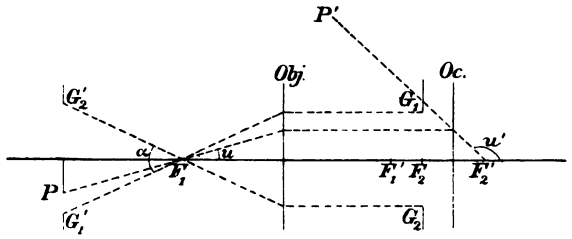


Fig. 35.

Durchmesser $G_1' G_2'$ des Blendenbildes vom vorderen Brennpunkt des Objektivs aus erscheint, wurde bereits S. 52 als *Gesichtsfeldwinkel* definiert.

Die Ermittlung des Gesichtsfeldes ergibt sich hiernach von selbst. Ist das eingestellte Objekt eine Skala, so kann die Strecke $G_1' G_2'$ unmittelbar abgelesen werden. Wird hierzu noch der Abstand der Skala vom vorderen Brennpunkte gemessen, so läßt sich α berechnen. Um die Lage des Brennpunktes zu kennen, ist die Bestimmung der Brennweite erforderlich, die man genau genug erhält, indem man das Okular auf ein unendlich fernes Ziel einstellt und den Abstand des Objektivs von der auch außen am Fernrohr erkennbaren Blende mißt. Der Gesichtsfeldwinkel beträgt bei den Fernrohren geodätischer Meßinstrumente in der Regel etwa $1^0 - 1{,}5^0$.

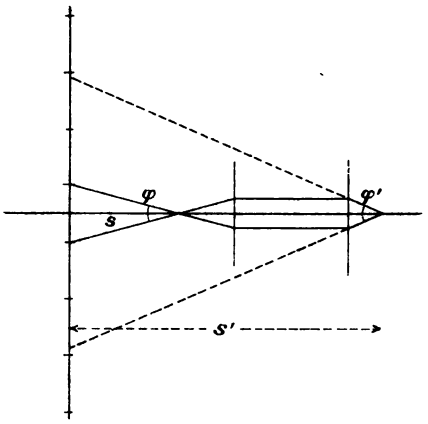


Fig. 36.

Dieselbe Skala kann auch zur Bestimmung der Vergrößerung dienen. Sieht man mit einem Auge durch das Fernrohr, mit dem andern Auge gleichzeitig daran vorbei, so gelingt es nach einiger Übung, mit dem unbewaffneten Auge die Anzahl n der Skalenteile zu zählen, die einem vergrößerten Skalenteil gleichkommen. Unter der ziemlich genau zutreffenden Annahme, daß das Auge sich im hinteren Brennpunkt des Okulars befindet, hat man nach Fig. 36

$$v = \frac{\tan\frac{\varphi'}{2}}{\tan\frac{\varphi}{2}} = \frac{n}{2s'}\,2s = n\,\frac{s}{s'}.$$

Für geodätische Instrumente werden Fernrohre von zehn- bis fünfzigfacher Vergrößerung benutzt.

Die Helligkeit des Fernrohrs. Die Augenpupille falle nach Lage und Größe mit der Austrittspupille zusammen, so daß jedes Strahlenbüschel ohne Verlust ins Auge gelangt. Als *Helligkeit* des Fernrohrs definieren wir das Verhältnis der Lichtmengen, die von einem fernen Punkte aus auf die Flächeneinheit der Netz-

haut durch das bewaffnete und durch das freie Auge fallen. Hierbei wird dem freien Auge ein Lichtkegel zugeführt, dessen Basis die Augenpupille ist, dem bewaffneten Auge ein solcher, der die Eintrittspupille als Basis hat. Das Verhältnis der Radien beider Grundflächen ist gleich der Vergrößerung v, also ist die Lichtmenge, die durch das Fernrohr ins Auge gelangt, v^2mal so groß, als die, die in das freie Auge eintritt. Jedoch ist auch die Fläche des Netzhautbildes im ersteren Falle v^2mal so groß, infolgedessen ist die Beleuchtung der Flächeneinheit dieselbe, und die Helligkeit gleich der Einheit. Ist die Austrittspupille größer als die Augenpupille, so geht ein Teil des Lichtes verloren, während das Netzhautbild dieselbe Größe wie vorher behält, und die Helligkeit wird kleiner als die Einheit.

Einen Sonderfall bilden die Fixsterne als Fernrohrobjekte. Bei ihnen bleibt das Netzhautbild im bewaffneten wie im freien Auge nur ein Punkt. Hier wird im ersteren Falle die Lichtmenge, die sich auf den Punkt konzentriert, v^2 mal so groß sein, als im letzteren, folglich auch die Helligkeit in demselben Maße größer sein.

§ 25. Objektive und Okulare.

Von dem einfachen *Kepler*schen Fernrohr ist man schon im 18. Jahrhundert der Abbildungsfehler wegen zu der heutigen Form des astronomischen Fernrohrs übergegangen, bei der Objektiv und Okular aus je zwei Linsen zusammengesetzt werden. Bei größerer Brennweite des Objektivs wird die Neigung der Hauptstrahlen gegen die Achse klein, infolgedessen auch die Güte des Bildes innerhalb des ganzen Gesichtsfeldes dieselbe sein, und es genügt hier die Forderung der Beseitigung der Aberration und der Erfüllung der Sinusbedingung. Bei solchen Fernrohren werden die Bildfehler außerhalb der Achse hauptsächlich durch das Okular erzeugt werden.

Bei den hier mehr interessierenden Objektiven kleinerer Brennweite werden auch größere Neigungswinkel der Hauptstrahlen gegen die Achse auftreten, deshalb auch die Fehler des Astigmatismus, der Bildfeldkrümmung und der Verzeichnung wahrnehmbar sein. Es bietet sich hier aber die Möglichkeit,

Objektiv und Okular derartig zu wählen, daß die genannten Fehler sich in dem virtuellen Bilde nahezu kompensieren.

Da die Beseitigung der Farbenabweichung durch zwei Linsen gleicher Glasart einen größeren Abstand derselben erforderlich macht, dieser aber die Brennweite des Systems verkleinert, so müssen für die Konstruktion von Objektiven Linsen verschiedener Glasarten angewendet werden. Man setzt in der Regel eine bikonvexe Kronglaslinse mit einer bikonkaven oder konkav-konvexen Flintglaslinse zusammen, wobei die erstere dem Objekt zugewendet ist.

Für die Konstruktion des Okulars sind ähnliche Grundsätze maßgebend, wie für die einer zusammengesetzten Lupe. Bei den Fernrohren geodätischer Instrumente gelangt meistens das Okular von *Ramsden* zur Anwendung (Fig. 37), bei dem die Brennweiten der beiden Linsen einander gleich und zur Aufhebung der Farbenabweichung auch gleich ihrem Abstand sind.

Bei der zweiten Grundform, dem Okular von *Huyghens* (Fig. 38), entsteht das reelle Bild des Objekts zwischen den beiden Okularlinsen, wo also auch die Blende angebracht sein muß. Die Konstanten sind so gewählt, daß $f_1 = 2f_2$, und der Abstand der Linsen $= \frac{3}{2}f_2$ ist. Zur Beseitigung der Abbildungsfehler sind hier ebenfalls zwei plankonvexe Linsen verwendet, bei beiden jedoch die konvexen Flächen nach dem Objekt gerichtet.

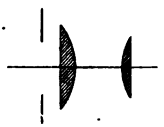


Fig. 37.

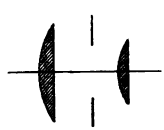


Fig. 38.

Durch die Okulare von *Ramsden* und *Huyghens* lassen sich die aus dem Astigmatismus und der Bildfeldkrümmung hervorgehenden Fehler genügend beseitigen, jedoch kann die Verzeichnung nicht vermieden werden. Um auch diese unschädlich zu machen, hat man in neuerer Zeit Okulare konstruiert, bei denen die hintere Okularlinse, das *Augenglas*, durch Kombination zweier Linsen für sich achromatisch gemacht ist. Die vordere Okularlinse, das *Kollektivglas*, kann dann noch zur Aufhebung der Verzeichnung passend gewählt werden. Eine solche Verbesserung des *Ramsden*schen Okulars bildet das *orthoskopische* Okular von *Kellner*.

Fig. 39.

§ 26. Die äußere Form des Fernrohrs.

Fig. 39 stellt einen vertikalen Längsschnitt durch ein astronomisches Fernrohr dar. Den Hauptteil bildet das *Objektivrohr*, auf das vorn der *Objektivkopf* aufgeschraubt ist. Die Zeichnung zeigt, wie die Linsen in ihrer Fassung durch einen Ring festgehalten werden, und wie die Fassung in den Objektivkopf eingesetzt ist. Das Innere des Rohrs ist schwarz gefärbt, um störende Spiegelungen zu vermeiden; demselben Zweck dienen auch eingesetzte Blendringe, deren Öffnungen jedoch den Strahlengang nicht beeinflussen dürfen. In dem Objektivrohr bewegt sich vermittelst des *Okularstriebs* die *Okularröhre*, die im Innern ebenfalls mit Blenden versehen ist. Die *Gesichtsfeldblende* wird durch die engere Öffnung einer konischen Röhre gebildet und durch zwei Paare von Druckschrauben festgehalten, durch die sie in vertikaler und horizontaler Richtung ein wenig verschoben werden kann. In der Zeichnung sind nur die beiden vertikalen Schrauben sichtbar. Das Okularrohr wird hinten durch ein *Ramsden*sches Okular abgeschlossen, dessen verschiedene Teile in der Figur deutlich erkennbar sind. Das Okular wird nur durch Reibung in der Okularröhre festgehalten, so daß es für jedes Auge besonders eingestellt werden kann.

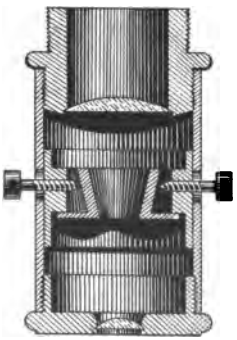


Fig. 40.

In Fig. 40 ist die Ausführung des Okulars von *Huyghens* zur Darstellung gebracht, das mit dem oben erkennbaren Schraubengewinde in das Okularrohr hineingeschraubt wird. Damit die Blende jedem Auge in der günstigen Sehweite erscheint, ist sie an einem besonderen Ringe befestigt, mit dem sie in der Längsrichtung des Fernrohrs ein wenig verschoben werden kann. Für die Druckschrauben sind in der Außenwand des Okulars elliptische Löcher ausgeschnitten.

§ 27. Die Visierachse.

Um das Fernrohr als Visiervorrichtung benutzen zu können, ist es notwendig, im Gesichtsfelde einen bestimmten Punkt zu bezeichnen, auf den das Bild eines Objekts *eingestellt* werden kann. Hierzu werden in der Ebene der Gesichtsfeldblende zwei sich rechtwinklig schneidende Spinnfäden ausgespannt, deren Schnittpunkt die Einstellmarke bezeichnet. Durch Verschieben der Blende innerhalb ihrer Ebene kann das Fadenkreuz an eine beliebige Stelle des Gesichtsfeldes gebracht werden.

Würde der Fadenkreuzschnittpunkt bei jeder Stellung der Okularröhre in der optischen Achse des Objektivs liegen, so würde bei der Einstellung eines Ziels die optische Achse des Objektivs auch als *Visierachse* bezeichnet werden können. Im allgemeinen beschreibt jedoch der Fadenkreuzschnittpunkt bei der Bewegung des Okulartriebs eine Gerade, die ein wenig gegen die optische Achse des Objektivs geneigt ist. Betrachten wir diese Gerade als einen Lichtstrahl, der durch das Objektiv eine Brechung erleidet, so wird bei der Einstellung eines beliebigen Ziels der äußere Teil des Strahls durch das Ziel gehen, und da er in bezug auf das Fernrohr eine konstante Lage hat, so kann man ihn als *Visierachse* des Fernrohrs bezeichnen (*Hauptvisierachse* nach *Vogler*).

Beim Fernrohr mit *Huyghens*schem Okular genügt diese Definition noch nicht. Alle vom Fadenkreuzschnittpunkt K (Fig. 41) ausgehenden Strahlen werden von der Kollektivlinse so gebrochen, als ob sie von K', dem Bilde von K, herkommen. Einer dieser Strahlen wird nach der Brechung durch die Kollektivlinse in der Richtung $K'S$ parallel zur Bewegungsrichtung des

Fadenkreuzes laufen und nach der Brechung im Objektiv in die Richtung QP gelangen. Da diese Gerade wieder die Eigen-

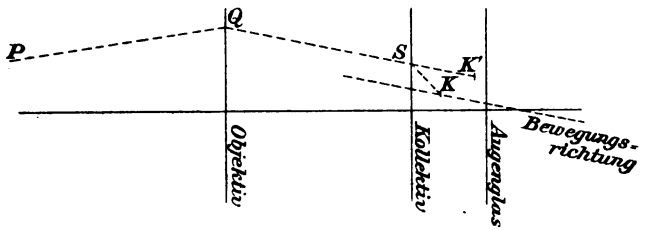


Fig. 41.

schaften der Visierachse hat, so ist hiermit auch das Vorhandensein einer solchen für das *Huyghens*sche Okular erwiesen.

Für ein eingehendes Studium des in vorstehendem Kapitel behandelten Gegenstandes verweisen wir auf *Siegfried Czapski*, Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente nach Abbe. 2. Aufl., herausgegeben von *O. Eppenstein*. Leipzig 1904.

4. Kapitel.

Libellen und Ablesevorrichtungen.

§ 28. Die Röhrenlibelle.

Die grundlegende Bedeutung der Lotrichtung für die Ausführung geodätischer Messungen ist bereits aus den im 1. Kapitel geschilderten Arbeiten hervorgegangen. Zur Ermittlung der Lotrichtung und damit auch der horizontalen Richtung wurde dort lediglich das Lot benutzt. Die geringe Genauigkeit des letzteren hat schon im Altertum dazu geführt, die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit zur Bestimmung der Lotrichtung nutzbar zu machen. Diese Methode wird heute fast ausschließlich angewendet, und aus der einfachen Wasserwage der Alten hat sich die *Röhrenlibelle* (erfunden von *Thévenot* 1660 in Paris) bis zu einem hohen Grade von Vollkommenheit entwickelt.

Die *Röhrenlibelle* besteht aus einer Glasröhre, deren innere Fläche durch Rotation eines Kreisbogens um seine Sehne ent-

standen gedacht werden kann. Der Radius des Kreisbogens schwankt etwa zwischen 5 m und 500 m. Die Oberfläche des Rotationskörpers wird durch Parallelkreise senkrecht zur Rotationsachse in Zonen geteilt, deren Breite durchweg eine Pariser Linie = 2,256 mm beträgt (Fig. 42). Bei der wirklichen Ausführung der Libelle sind die Kreise auf der Außenseite der dünnen Glaswandung eingeätzt. Die Rotationsachse wird *Libellenachse* genannt, die Kreise bilden zusammen die *Libellenskala*, und der größte Kreis, der Äquator des Rotationskörpers, führt den Namen *Mittelmarke*. Der Winkelwert γ eines Skalenteils, die *Angabe* der Libelle, schwankt bei den oben angegebenen Grenzen für den Radius zwischen 1′ und 1″. Bezeichnet r den Radius in mm, so ist die Angabe in Sekunden

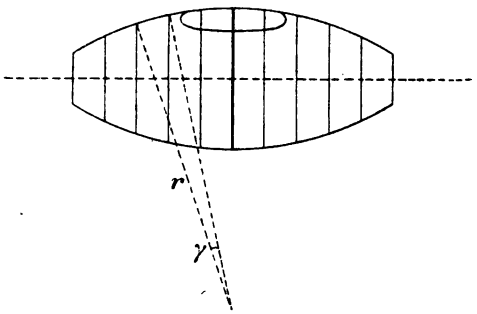


Fig. 42.

$$\gamma'' = \frac{2{,}256}{r}\,206265''.$$

Die Röhrenlibelle ist mit einer Flüssigkeit, in der Regel mit Äther, bis auf einen kleinen Rest gefüllt, der lediglich Dämpfe der Flüssigkeit enthält, die sogenannte *Luftblase*. Die Enden der Glasröhre werden nach der Füllung zugeschmolzen.

Infolge der Schwerkraft steht die Mitte der Luftblasenoberfläche stets im höchsten Punkt des Libellenhohlraums, folglich bei horizontaler Lage der Libellenachse in der Mittelmarke. Man sagt dann, *die Libelle spielt ein.*

Bei geneigter Libellenachse heißt der Winkel, um den die Ebene der Mittelmarke gegen die Lotrichtung geneigt ist, der *Ausschlag* der Libelle. Wie Fig. 43 zeigt, ist der Ausschlag α gleich der Neigung der Libellenachse gegen die Horizontale. Die Größe des Ausschlags wird in Teilen der Libellenskala gemessen durch Ablesen der beiden Luftblasenenden und Mittelung der Ablesungen. Hierzu sind die Kreise der Skala häufig

von der Mittelmarke aus in positiver und negativer Richtung beziffert. In Fig. 43 ist z. B.

$$\alpha = \frac{+0{,}7 + 4{,}3}{2} = +2{,}5.$$

Da bei allen Messungen mit Hilfe der Libelle nur der jeweilige lotrechte Meridian des Rotationskörpers in Betracht

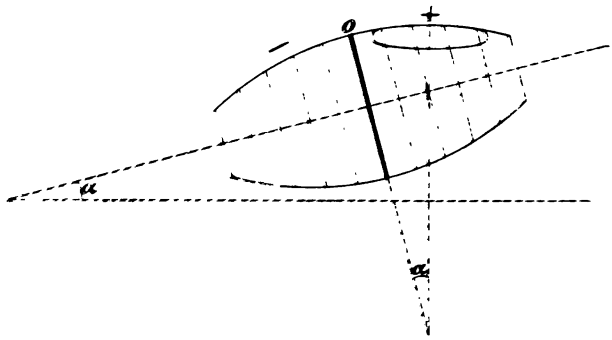


Fig. 43.

kommt, so kann auch von *Punkten* der Libellenskala gesprochen werden, so z. B. von der Mittelmarke als *Nullpunkt*.

§ 29. Bestimmung der Libellenangabe.

Um den Ausschlag in Gradmaß angeben zu können, ist die Kenntnis der Libellenangabe erforderlich. Diese wird am bequemsten mit Hilfe eines *Legebretts* oder *Libellenprüfers* bestimmt. In seiner einfachsten, in Fig. 44 dargestellten Form besteht das Legebrett aus einem Brett von der Gestalt eines gleichschenkligen Dreiecks, das durch zwei gleich lange Füße und eine Schraube getragen wird. Das Muttergewinde der Schraube ist in dem Brett befestigt, während das obere Ende der Spindel eine am Rande eingeteilte Scheibe, eine *Schraubentrommel*, trägt. Ein auf dem Brett feststehender Zeiger in Gestalt eines dreikantigen Stifts dient zum Ablesen der Trommelstellung. Zwei

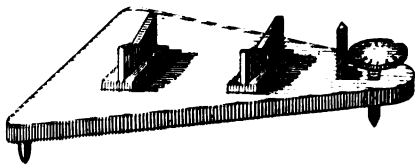


Fig. 44.

mit Ausschnitten versehene kleine Aufsätze sind zum Tragen der Libelle während der Untersuchung bestimmt. Bevor die Prüfung einer Libelle erfolgen kann, ist die *Konstante des Legebretts*, d. i. der Winkel, um den das Legebrett bei einer ganzen Umdrehung der Schraubentrommel geneigt wird, zu ermitteln. Ist g die Ganghöhe der Schraube, l der senkrechte Abstand der Schraubenachse von der Verbindungslinie der beiden andern Füße, so ist die Konstante in Sekunden

$$\varphi'' = \frac{g}{l} 206265''.$$

Zur Bestimmung von l werden die 3 Füße gleich lang gemacht und ihre Spitzen in einen untergelegten Bogen Papier gedrückt. In dem so gefundenen Dreieck kann l unmittelbar gemessen werden.

Um g zu ermitteln, wird die Schraubenspindel aus ihrer Mutter herausgeschraubt, auf einem Blatt Papier abgedrückt und die Gesamtgröße eines Vielfachen der Ganghöhe gemessen. Hierdurch wird die einfache Ganghöhe mit großer Genauigkeit erhalten.

Es wurde z. B. für das *Ertel*sche Legebrett der hiesigen geodätischen Sammlung fünfmal die 55fache Ganghöhe der Schraube mit einem Millimetermaßstab gemessen, dessen erstes Millimeter in fünf Teile geteilt ist. Es ergaben sich die fünf Werte

29,28 mm
29,22 „
29,16 „
29,21 „
29,25 „ ,

im Mittel $55\,g = 29{,}224$ mm. Da $l = 555{,}4$ mm ermittelt wurde, so ist

$$\varphi = 197{,}35''.$$

Zur Bestimmung der Angabe ist das Legebrett mit der Libelle so aufzustellen, daß die Verbindungslinie der beiden Fußspitzen wagrecht liegt und die durch die Libellenachse gelegte Vertikalebene senkrecht schneidet. Durch Drehen der Schraubentrommel bringt man zunächst die Luftblase nach

einem Ende der Libellenskala und liest an beiden Luftblasenenden, sowie am Zeiger der Schraubentrommel ab. Das arithmetische Mittel der beiden Libellenablesungen sei n_1, die Schraubenablesung t_1. Hierauf dreht man die Trommel solange, bis die Luftblase das andere Ende der Skala erreicht hat, wo die Ablesungen n_2 und t_2 erhalten werden. Es ist dann die Libellenangabe

$$\gamma = \frac{t_2 - t_1}{n_2 - n_1} \varphi .$$

Die Differenz $t_2 - t_1$ ist hierbei als Bruchteil der ganzen Trommelumdrehung anzugeben.

Um den toten Gang in der Bewegung der Meßschraube unschädlich zu machen, ist es notwendig, für beide Einstellungen der Luftblase die Schraube nur in *einem* Sinne zu drehen.

Auf dem oben genannten Legebrett, dessen Schraubentrommel in 180 Teile geteilt ist, wurden für eine Libelle von *Hildebrand* in Freiberg folgende Ablesungen erhalten: Luftblase links: $-4{,}7$, $+10{,}1$ und $t_1 = 26{,}9$; Luftblase rechts: $+4{,}2$, $+19{,}0$ und $t_2 = 120{,}8$. Also ist $n_1 = +2{,}7$, $n_2 = +11{,}6$ und

$$\gamma = \frac{93{,}9}{8{,}9} \frac{197{,}35}{180} = 11{,}6'' .$$

§ 30. Äußere Form der Röhrenlibelle.

Für den Gebrauch wird die Röhrenlibelle mit einer Metallfassung versehen, die die Skala nur soweit als nötig freiläßt. Infolgedessen sind die Kreise der Libellenskala nicht vollständig ausgezogen, sondern nur als kürzere oder längere Teilstriche sichtbar. Die Fassung dient zugleich zur Befestigung zweier Füße, die je nach der Verwendung der Libelle verschieden geformt sind.

Die Röhrenlibelle dient bei der Handhabung der geodätischen Meßinstrumente vornehmlich zum Horizontalstellen von Geraden, die entweder auf der ebenen Oberfläche von Körpern liegen, oder Achsen zylindrischer Instrumententeile sind. Eine zweite geodätische Hauptanwendung findet die Röhrenlibelle beim Wagrechtstellen und Lotrechtstellen von Drehachsen beliebig gestalteter Körper. Weitere Anwendungen der Libelle,

die sich in Verbindung mit dem Fernrohr ergeben, werden später behandelt werden.

Im ersten Falle muß die Libelle zum Aufsetzen auf eine ebene oder zylindrische Fläche eingerichtet sein, weshalb ihre Fassung mit Füßen versehen wird, die nach Fig. 45 oder

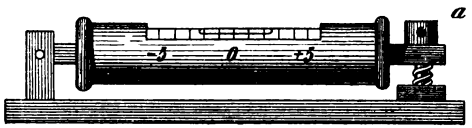


Fig. 45.

Fig. 46 geformt sind. Die Libelle wird hier als *Setzlibelle* (Fig. 45) oder *Reiterlibelle* (Fig. 46) und die wagrecht zu stellende Gerade als *Setzlinie* bezeichnet.

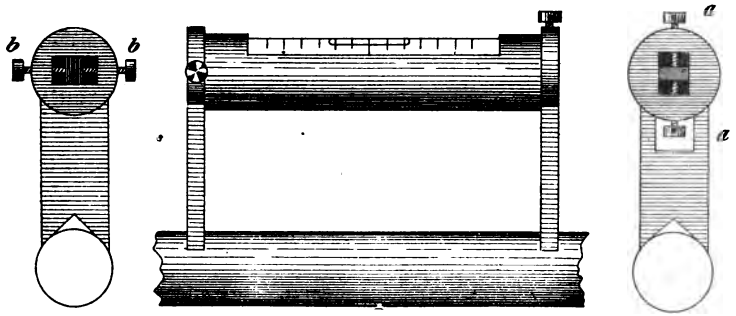


Fig. 46.

Um die Setzlinie und die Libellenachse einander parallel zu stellen, oder die Libelle zu justieren, ist in Fig. 45 und Fig. 46 ein Heben und Senken des einen Libellenendes durch die Justierschrauben a, in Fig. 46 außerdem noch eine notwendige seitliche Verschiebung des andern Libellenendes mittels der Justierschrauben b möglich.

Im zweiten Falle muß die Libelle mit dem sich drehenden Körper bis auf die Justierbewegung starr verbunden sein, oder wenigstens als starr verbunden angenommen werden.

Zum Wagrechtstellen einer Drehachse dd läßt die Fassung den Libellenkörper an zwei entgegengesetzten Seiten frei (Fig. 47), so daß die Stellung der Luftblase abgelesen werden kann, wenn

die Libelle sich über oder unter der Drehachse befindet. Zum Parallelstellen von Libellen- und Drehachse sind die Libellenfüße wieder mit den Justierschrauben *a* und *b* versehen. Eine

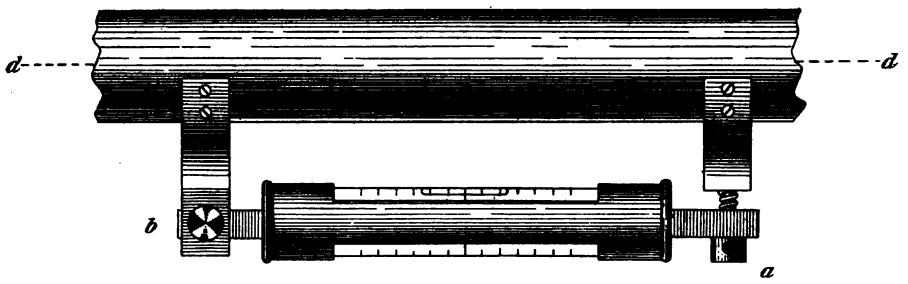


Fig. 47.

solche Libelle wird als *Wendelibelle* bezeichnet. Die Wendelibelle ist 1859 zum erstenmal von Professor *Amsler* in Schaffhausen angewendet worden.

Zum Lotrechtstellen einer Drehachse ist die Libelle mit dem Körper derartig zu verbinden, daß ihre Achse die Drehachse nahezu rechtwinklig kreuzt oder schneidet. Zu einer geringen Änderung des Kreuzungs- oder Schnittwinkels muß die Hebung oder Senkung eines Libellenendes durch Justierschrauben ermöglicht sein.

§ 31. Gebrauch und Berichtigung der Röhrenlibelle.

Die Lösung der vorstehenden vier Aufgaben soll im folgenden an schematischen Figuren erläutert werden.

a) Das Wagrechtstellen einer Ebene ist unmittelbar auszuführen, wenn die Libellenachse parallel der durch den Libellenfuß (Fig. 45) bestimmten Ebene liegt, wenn also die Libelle justiert ist. Wird die Ebene dann derartig geneigt, daß die Libelle einspielt, so ist die Projektion der Libellenachse auf die Ebene, die Setzlinie, horizontal. Wird noch eine zweite Setzlinie horizontal gestellt, die die erstere unter einem Winkel von 90^0 schneidet, so ist die Ebene selbst wagrecht.

Ist die Libelle nicht justiert, so verliert die Mittelmarke die ihr vorstehend beigelegte Bedeutung. Es kommt dann vielmehr darauf an, den Punkt S der Libellenskala zu finden,

dessen Radius senkrecht zur Setzlinie steht. Ist dieser Punkt, der *Spielpunkt in bezug auf die Setzlinie*, bekannt, so braucht man, um die letztere horizontal zu stellen, nur die Ebene so zu neigen, daß die Luftblase in S steht.

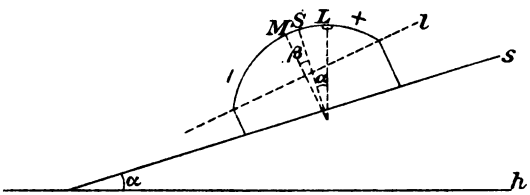


Fig. 48.

In Fig. 48 sei α die Neigung der Setzlinie gegen die Horizontale, β der Abstand des Spielpunktes S von der Mittelmarke M. Liest man die Stellung des Luftblasenmittelpunktes in der Libellenskala ab, so erhält man die Ablesung $\alpha + \beta$. Dreht man hierauf die Libelle um 180^0, oder *setzt die Libelle um*, so liest man (Fig. 49) $-(\alpha + \beta)$ ab. Das arithmetische Mittel beider Ablesungen gibt β, also die Lage von S in bezug auf M; die halbe Differenz gibt α, oder die Neigung der Setzlinie. Mit Hilfe des Spielpunktes ist die Setzlinie leicht horizontal zu stellen, und hierauf bietet die Justierung keine Schwierigkeit, da man nur die Libelle mit den Justierschrauben so weit zu neigen hat, daß die Luftblase in M steht. Es fällt dann auch S mit M zusammen.

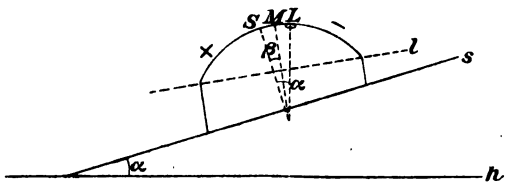


Fig. 49.

Ist die Libelle zu justieren, ohne daß man die Neigung der Setzlinie vorher beseitigen kann, so ist mit den Justierschrauben M nach S zu bringen, was dann erreicht ist, wenn man in der zweiten Lage (Fig. 49) $-\alpha$, in der ersten Lage (Fig. 48) $+\alpha$ abliest.

b) Ist die Achse eines Zylinders horizontal zu stellen, so liegt im Gegensatz zur Ebene eine bestimmte Setzlinie vor, und es ist deshalb zunächst zu prüfen, ob die Libellenachse und die Setzlinie in einer Ebene liegen oder ob sie sich kreuzen. Dies geschieht durch Drehen der auf den Zylinder aufgesetzten Libelle um die Zylinderachse. Wird der Zylinder zunächst so

gestellt, daß die Libelle einspielt, so ist die Libellenachse horizontal. Beim Drehen der Libelle um die Zylinderachse nach der einen oder nach der andern Seite (Fig. 50) wird bei vorhandener Kreuzung je ein Ende der Libellenachse sich über die Horizontale erheben und die Luftblase dorthin laufen. Läuft die Luftblase also beim Hin- und Herdrehen der Libelle nach verschiedenen Enden der Skala hin, so liegen die beiden Achsen nicht in einer Ebene. Mit den Justierschrauben b wird durch Probieren die Libellenachse so lange verschoben, bis die Kreuzung sich nicht mehr bemerkbar macht.

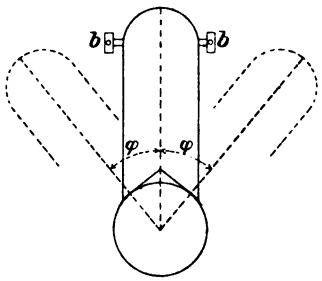


Fig. 50.

Nach der Beseitigung der Kreuzung ist das Verfahren der Horizontalstellung der Setzlinie und der Justierung der Libelle dasselbe, wie es für die Setzlibelle auf der Ebene erläutert wurde. Ist der Konvergenzwinkel zwischen der Setzlinie und der Libellenachse erheblich, so kann er bei der Prüfung der Kreuzung störend einwirken, wenn der Schwenkungswinkel φ in Fig. 50 sehr groß ist. Bei kleinem Winkel φ tritt die Kreuzung auch schon sehr deutlich hervor, ohne daß die Konvergenz einen Einfluß hat.

An dem Vorstehenden wird nichts geändert, wenn die Libelle mit dem Zylinder fest verbunden ist, und letzterer aus seinen Lagern herausgehoben werden kann. Es wird dann zur Bestimmung des Spielpunktes die Libelle zusammen mit dem Zylinder umgesetzt, wobei die Achse des letzteren wieder in ihre alte Lage zurückgelangt. Beide Formen der vorstehenden Aufgabe spielen bei den Nivellierinstrumenten eine Rolle.

c) Auch bei der Wagrechtstellung der Drehachse eines beliebigen Rotationskörpers (Fig. 47) ist die Libelle erst dann gebrauchsfähig, wenn die Kreuzung mit Hilfe der Schrauben b nach dem für die Reiterlibelle erläuterten Verfahren beseitigt ist. Zur Wagrechtstellung der Drehachse d wird diese zunächst so weit geneigt, daß die Libelle über der Achse einspielt (Fig. 51), also die Libellenachse l horizontal steht. Dreht man hierauf

den ganzen Rotationskörper um seine Achse um 180°, so wird die Libelle den Ausschlag 2α zeigen. Wird die Neigung von d nun so weit geändert, daß die Libelle in der unteren Lage den Ausschlag $-\alpha$, in der oberen $+\alpha$ zeigt, so ist d horizontal. Die Justierung der Libelle ist bei horizontaler Drehachse ohne Schwierigkeit auszuführen.

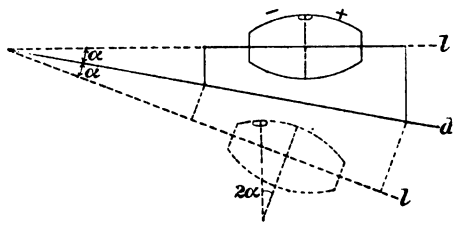


Fig. 51.

d) Die Drehachse eines beliebigen Rotationskörpers (*Stehachse*) ist dann lotrecht gestellt, wenn sie in zwei sich rechtwinklig schneidenden Vertikalebenen liegt. Fig. 52 möge dadurch entstanden sein, daß durch die Libellenachse eine Vertikalebene gelegt und die Drehachse auf diese projiziert worden ist. Die Neigung der Drehachse d wird dann nur als Projektion α sichtbar. Wir bezeichnen auch hier den Endpunkt S desjenigen Libellenradius, der parallel zu d läuft, als *Spielpunkt in bezug auf die Stehachse.* Sein Abstand von der Mittelmarke sei β. Für die Luftblasenmitte L erhält man die Ablesung $-(\alpha - \beta)$, und nach einer Drehung um 180° die Ablesung $+(\alpha + \beta)$. Man erhält also wieder als arithmetisches Mittel beider Ablesungen den Winkel β oder die Lage des Spielpunktes. Wird die Libelle in der Zeichnungsebene auf den Spielpunkt eingestellt, so steht die Projektion der Stehachse lotrecht. Wiederholt man das Verfahren nach Drehung der Libelle um 90°, so steht die Stehachse selbst lotrecht. Die Justierung der Libelle erfolgt hierauf wie früher.

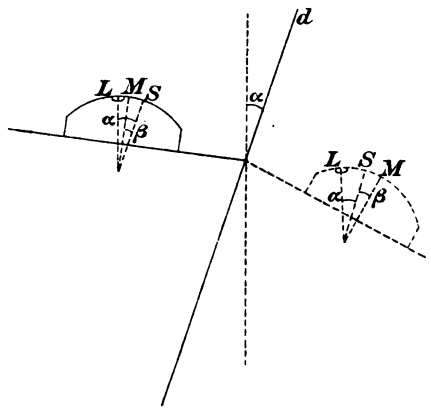


Fig. 52.

§ 32. Die Dosenlibelle.

In vielen Fällen genügt zum Wagrechtstellen von Ebenen und zum Lotrechtstellen von Drehachsen ein einfaches Hilfsmittel, die *Dosenlibelle.* Sie besteht aus einem zylindrischen Metallgefäß, dessen Boden eben abgeschliffen ist, und das oben durch einen kugelig ausgeschliffenen Glasdeckel verschlossen ist. Der Scheitel der Kugelfläche ist durch den Mittelpunkt eines auf der Außenseite des Glasdeckels eingeätzten Kreises, die *Mittelmarke,* bezeichnet. Die Dosenlibelle wird bis auf die *Luftblase* mit Alkohol gefüllt, zu welchem Zweck der Boden eine Durchbohrung enthält, die nach der Füllung durch eine Schraube verschlossen wird.

Für die Verwendung der Dosenlibelle zum Wagrechtstellen einer Ebene ist eine Justiervorrichtung nicht vorhanden, die Grundfläche muß vielmehr bei der Herstellung der Libelle so abgeschliffen sein, daß sie von dem Radius der Mittelmarke senkrecht durchschnitten wird.

Wird die Dosenlibelle zum Lotrechtstellen einer Drehachse benutzt, so ist sie in der Regel mit letzterer derartig verbunden, daß ihre Lage durch drei Stellschrauben ein wenig geändert werden kann, bis der durch die Mittelmarke gehende Libellenradius parallel zur Drehachse ist. Diese Justierung erfolgt in derselben Weise, wie die Justierung der Röhrenlibelle, die Ablesungen an der Libellenskala müssen hier durch Schätzung der Luftblasenstellung ersetzt werden. Am einfachsten gestaltet sich die Justierung, wenn die Drehachse mit Hilfe einer Röhrenlibelle lotrecht gestellt werden kann.

Die Anwendung der Dosenlibelle ist bequemer als die der Röhrenlibelle, sie wird jedoch dadurch sehr beschränkt, daß das Einstellen der Luftblase auf die Mittelmarke nur mit einer Genauigkeit von 1—2′ erfolgen kann. In vielen Fällen genügt diese Genauigkeit, in anderen benutzt man die Dosenlibelle zum vorläufigen Wagrecht- bzw. Lotrechtstellen, um die darauf vorzunehmende genaue Einstellung mit der Röhrenlibelle zu erleichtern.

§ 33. Der Nonius.

Im Jahre 1542 wurde von dem Portugiesen *Nunez* (lat. *Nonius*) ein Verfahren zum genaueren Ablesen an eingeteilten

Kreisen angegeben, das jedoch nur an wenigen Instrumenten zur Ausführung gelangt ist. Die noch heute unter dem Namen *Nonius* bekannte Ablesevorrichtung ist eine Erfindung des Franzosen *Pierre Vernier* aus dem Jahre 1631.

Der Nonius dient zur Ablesung der Stellung eines beweglichen Zeigers an einer feststehenden geradlinigen oder kreisförmigen eingeteilten Skala.

Bezeichnen wir in Fig. 53 den Abstand des Zeigers Z vom vorhergehenden Teilstrich der Skala A mit x, so ist die Ablesung gleich $23 + x$. Die Skala B, deren Nullstrich mit Z zu-

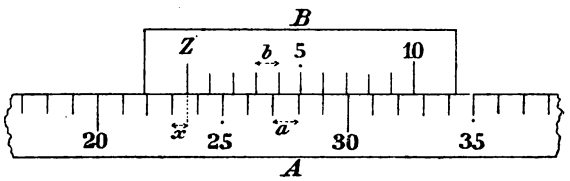


Fig. 53.

zusammenfällt, stellt einen Nonius dar, der durch Einteilung von 9 Intervallen der Teilung A in 10 Teile entstanden ist. Aus der Figur sieht man, daß der siebente Teilstrich des Nonius mit einem Strich der Hauptteilung zusammenfällt. Also ist

$$x = 6a - 6b = 6(a - b)$$

und da $b = \frac{9}{10} a$ ist, so ist auch $x = 0{,}6a$.

In der Teilung von A ist $a = 1$, folglich die ganze Ablesung gleich 23,6.

Man sieht, daß die Einheit der Ablesung gleich $a - b$ ist. Diese Größe bezeichnet man als *Noniusangabe.*

Sind allgemein bei der Konstruktion des Nonius $n - 1$ Teilungsintervalle der Skala in n Teile geteilt, so ist

$$(n - 1)\, a = nb \tag{1}$$

und die Noniusangabe

$$a - b = \frac{a}{n}. \tag{2}$$

In Fig. 54 ist ein Teil einer zur Winkelmessung dienenden kreisförmigen Skala abgebildet. Die einzelnen Grade sind durch längere Striche, je 20′ durch kürzere Striche kenntlich gemacht.

Um die Stellung des Zeigers bis auf 30″ angeben zu können, ist ein Nonius mit der Angabe von 30″ zu konstruieren. Es ist deshalb $a - b = 30''$ und da $a = 20'$ ist, so haben wir

$$n = \frac{20'}{30''} = 40.$$

Es sind hiernach 39 Intervalle der Kreisteilung in 40 Teile zu teilen. Die Bezifferung der Noniusstriche erfolgt nicht nach der Ordnungszahl derselben, sondern nach dem Produkt aus Ordnungszahl und Angabe, so daß man im vorliegenden Beispiel am *Koinzidenzstrich* die Stellung des Zeigers sofort in Gradmaß ablesen kann. In Fig. 54 steht der Zeiger auf 61° 26′ 00″.

Bei einiger Übung und guter Teilung ist es möglich, noch kleinere Unterabteilungen als die Noniusangabe zu schätzen,

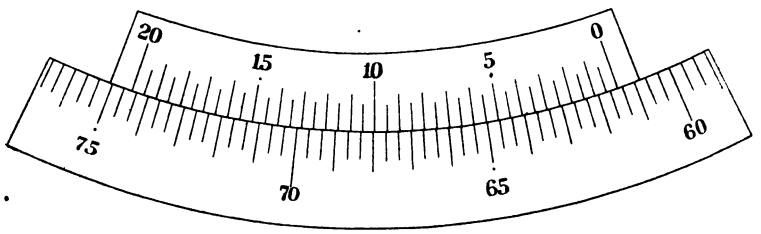


Fig. 54.

wenn eine genaue Koinzidenz nicht vorhanden ist. In der Nähe des ersten und letzten Noniusstrichs wird diese Schätzung durch *Überstriche* erleichtert, die nach beiden Richtungen über den Nonius hinausgehen.

Einen nach vorstehenden Grundsätzen konstruierten Nonius bezeichnet man als *nachtragend.* Beim *vortragenden* Nonius, der nur selten (z. B. beim Quecksilberbarometer) angewendet wird, werden $n + 1$ Intervalle der Skala in n Teile geteilt. Die Bezifferung dieses Nonius läuft der der Skala entgegen.

5. Kapitel.

Der Theodolit.

§ 34. Die Bestandteile des Theodolits.

Der *Theodolit* dient zum Messen von *Horizontalwinkeln* d. h. von Winkeln zwischen Vertikalebenen. Seine Haupt-

bestandteile sind deshalb ein feststehender, horizontaler, eingeteilter Kreis, der *Limbus*, und eine vertikale Visierebene, die sich um die Lotrichtung des Limbusmittelpunktes drehen läßt, und deren Richtung am Kreise abgelesen werden kann.

Fig. 55 zeigt den schematischen Vertikalschnitt eines *einfachen Theodolits*. Als Träger des Limbus *l* dient ein Dreifuß, dessen Stellschrauben das Wagrechtstellen des Limbus erlauben. Seine Einteilung ist in der Regel auf einer kegelförmigen Fläche angebracht, da das Ablesen an einer solchen bequemer ist, als an einer ebenen Kreisscheibe. Während der Körper des Limbus, wie die meisten Teile des Instruments aus Messing hergestellt ist, wird in den Rand desselben ein Silberstreifen *ss* eingelegt, auf dem sich die Teilstriche mit größerer Schärfe anbringen lassen. Je nach dem Durchmesser des Limbus, der zwischen 8 und 25 cm schwankt, beträgt ein Intervall der Teilung 30′ bis 10′.

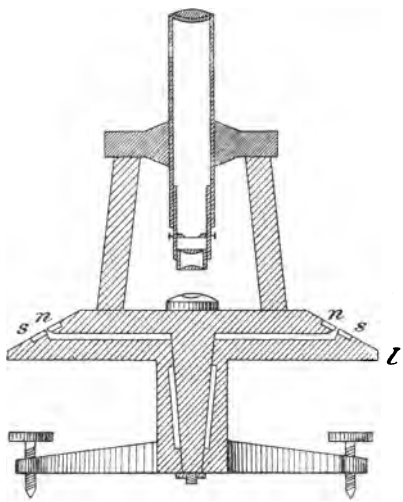


Fig. 55.

Dreifuß und Limbus bilden die feststehenden Teile des Theodolits, während alle übrigen Teile ihrem obigen Zweck entsprechend beweglich sein müssen. Zur Aufnahme dieser beweglichen Teile enthält die Scheibe des Limbus eine zentrische kegelförmige Durchbohrung, die sich auch durch den Dreifuß hindurch fortsetzt. In dieser Büchse dreht sich ein kegelförmiger Zapfen, der Träger einer Kreisscheibe, an deren Rand zwei möglichst diametral einander gegenüberliegende Zeiger mit Nonien auf eingelegten Silberplättchen *n* angebracht sind. Die Angabe der Nonien schwankt zwischen 1′ und 10″. Die beiden starr miteinander verbundenen und um den Limbusmittelpunkt drehbaren Zeiger bilden die *Alhidade*. Der Zapfen sowie die ihn aufnehmende Büchse sind aus hartem

Metall, Stahl bzw. Rotguß hergestellt, da von der Beschaffenheit derselben die Brauchbarkeit des Instruments wesentlich abhängt. Die Scheibe der Alhidade ragt meistens über den Limbus hinaus und dient dann zugleich als Schutzdeckel für die Teilung, die nur an den beiden Ablesestellen durch Glasfenster sichtbar wird. Auf der Alhidade erheben sich die Fernrohrstützen, oben mit *u*-förmig ausgeschnittenen Lagern zur Aufnahme der *Fernrohrkippachse* versehen. Die Einrichtung des Fernrohrs ist bereits S. 60 genügend erläutert worden.

Zwischen den Fernrohrstützen ist meistens eine Dosenlibelle angebracht, die in bezug auf die Achse des Kegels, die *Stehachse* des Theodolits, justiert ist, und deshalb ein rasches Lotrechtstellen derselben gestattet. Zur feineren Lotrechtstellung ist nach S. 68 eine Röhrenlibelle erforderlich, die entweder mit der Alhidade verbunden ist, oder als *Reiterlibelle* auf den zylindrischen Zapfen der Kippachse sitzt.

Ist die Stehachse lotrecht gestellt, so liegt bei einem justierten Theodolit die Kippachse horizontal und wird von der Visierachse senkrecht geschnitten. Bei der Drehung des Fernrohrs um die Kippachse beschreibt die Visierachse eine Vertikalebene, deren Richtung durch Ablesen an den beiden Nonien festgelegt wird. Nach Wiederholung der Nonienablesungen bei einer andern Richtung der Visierebene gibt die Differenz der beiden Ablesungen den Winkel, um den die Alhidade gedreht wurde, und der gleich dem Winkel zwischen den beiden Visierebenen ist.

Wie man sieht, ist mit dem justierten Theodolit die Messung von Horizontalwinkeln unmittelbar auszuführen.

Weggelassen ist in der Fig. 55 die *Klemme*, durch die die Alhidade in jeder beliebigen Stellung festgehalten werden kann, und die *Feinbewegung*, die nach dem Anziehen der Klemme noch eine geringe Bewegung der Alhidade und hiermit das genaue Einstellen der Visierebene auf ein Ziel zuläßt.

Für viele Zwecke ist es notwendig, auch den Limbus auf dem Dreifuß drehbar anzubringen, derartig, daß er in jeder beliebigen Stellung entweder durch Reibung oder durch eine besondere Klemme festgehalten werden kann. Im letzteren Falle, in dem auch eine Feinbewegung vorgesehen ist, führt das Instrument den Namen *Repetitionstheodolit*.

In Fig. 56 ist der schematische Vertikalschnitt des untern Teils eines *Repetitionstheodolits* dargestellt nebst der Befestigung desselben für den Feldgebrauch auf einem Stativ durch den *Stengelhaken p* vermittels der *Herzschraube h* und der *Federschraube f*. Der am untern Ende des Stengelhakens befindliche Haken dient zur Aufnahme eines Lotfadens, der die Stehachse des Theodolits nach unten verlängert. Der Repetitionstheodolit

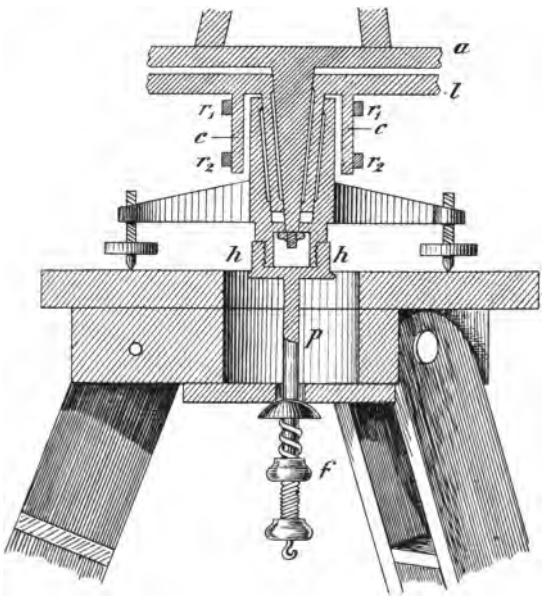


Fig. 56.

unterscheidet sich von dem einfachen Theodolit dadurch, daß zwischen dem Zapfen der Alhidade *a* und der Büchse des Dreifußes noch ein Hohlkegel eingeschaltet ist, der den Limbus *l* trägt. Diese von dem Münchener Mechaniker *Reichenbach* (geb. 1772 zu Durlach, gest. 1826 zu München) eingeführte Anordnung des Achsensystems ist nicht die einzige für Repetitionstheodolite gebräuchliche, sie wird jedoch augenblicklich am meisten angewendet.

Fig. 56 gibt in Verbindung mit Fig. 57 auch eine Andeutung von der Wirkungsweise der beiden Klemmen, die hier die Gestalt der sog. *starren Ringklemme* haben.

Mit dem Limbus ist ein Zylinder c verbunden, der die Büchse des Dreifußes umgibt, und auf dem zwei Ringe r_1 und r_2 von der Form des in Fig. 57 abgebildeten sich frei bewegen oder mittels der Druckschraube d klemmen lassen. Die Gabel g der beiden Ringe nimmt zwischen Schraube und Federbolzen einen Zapfen z auf, der für den oberen Ring an der Alhidade, für den unteren am Dreifuß befestigt ist. Auf diese Weise kann vermittels der unteren Klemme der Limbus mit dem Dreifuß, vermittels der oberen der Limbus mit der Alhidade verbunden werden. In beiden Fällen ist durch die Schraube s noch eine kleine Verschiebung (*Feinbewegung*) der verbundenen Teile gegeneinander möglich. Häufig vertauschen der Zapfen z und die Gabel g ihre Plätze, so daß z. B. der Zapfen an dem Klemmring, die Gabel an der Alhidade befestigt ist.

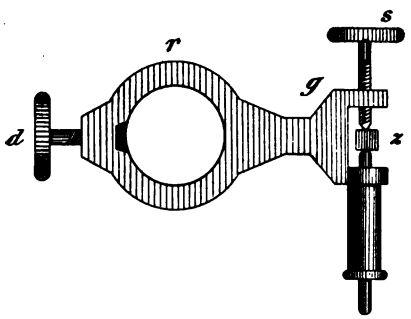


Fig. 57.

Die Fig. 58, in der ein Repetitionstheodolit aus der Werkstätte von *Otto Fennel* in Kassel vollständig abgebildet ist, läßt die verschiedenen Einzelheiten der Konstruktion deutlich erkennen. Es bedarf kaum der Erwähnung, daß zur Ablesung an den beiden Nonien Lupen angebracht sind, die sich an drehbaren Haltern längs der Nonien verschieben lassen. Zur genauen Höheneinstellung des Fernrohrs ist auch an der Kippachse eine Klemme nebst Feinbewegung angebracht, die in der Abbildung zum Teil sichtbar ist. Ein Diopter auf dem Fernrohr erleichtert das ungefähre Einstellen desselben. Statt der Dosenlibelle sind zwei kleine Röhrenlibellen (*Kreuzlibellen*) auf der Alhidade befestigt, deren Genauigkeit größer als die der Dosenlibelle ist; außerdem ist eine empfindlichere Reiterlibelle vorhanden. Die Wirkungsweise der Klemmen ist deutlich erkennbar.

Wie zur Herstellung des rechten Winkels zwischen Visier- und Kippachse sich das Fadenkreuz vermittels zweier Justierschrauben seitlich verschieben läßt, so ist auch eine Justierung

des Winkels zwischen Kippachse und Stehachse des Theodolits möglich. Die Abbildung zeigt, daß das rechte Kippachsenlager mit einem Spalt versehen ist, der durch Zug- und Druck-

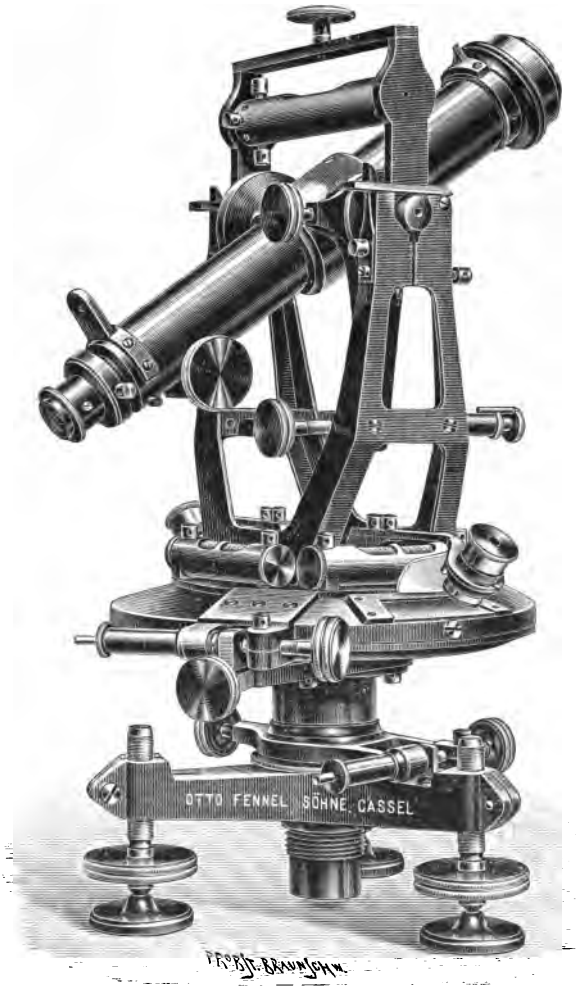


Fig. 58.

schrauben verengt oder erweitert werden kann. Hiermit ist eine Hebung oder Senkung des rechten Kippachsenendes verbunden, durch die der rechte Winkel zwischen Kippachse und Stehachse hergestellt werden kann.

§ 35. Kompensation der Achsenfehler.

Auf S. 76 sind bereits die Bedingungen aufgestellt, die die drei Achsen des Theodolits erfüllen müssen, wenn er zur Messung von Horizontalwinkeln brauchbar sein soll. Im folgenden soll untersucht werden, welchen Einfluß Abweichungen von diesen Bedingungen auf die Winkelmessung ausüben können.

Die in Betracht kommenden Abweichungen sind erstens die *Neigung der Stehachse* gegen die Lotrichtung, ferner die Abweichung der Kippachse von der Normalen zur Stehachse, der *Kippachsenfehler*, und endlich die Abweichung der Visierachse von der Normalen zur Kippachse, der *Kollimationsfehler*.

a) *Neigung der Stehachse gegen die Lotrichtung.* Um den Schnittpunkt O der Visierachse, Kippachse und Stehachse denken wir uns eine Kugel von beliebigem Radius beschrieben (Fig. 59). OZ bezeichne die Lotrichtung, OS die Richtung der Stehachse. Die Visierachse werde nacheinander auf zwei Ziele gerichtet, so daß sie die Richtungen OV_1 und OV_2 erhält. Die Visierebene wird durch die beiden Großkreise SV_1A_1 und SV_2A_2 dargestellt. Da die Differenz der beiden Ablesungen an der Alhidade gleich dem Winkel zwischen den beiden Visierebenen ist, so wird durch die Messung der Winkel S erhalten. Es soll jedoch der Winkel Z gemessen werden, mithin ist der Fehler der Winkelmessung

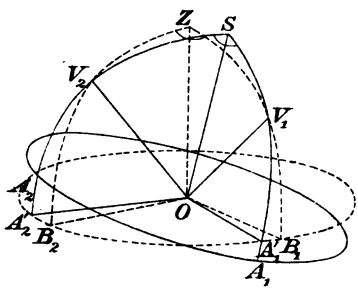


Fig. 59.

$$\sphericalangle Z - \sphericalangle S = B_1B_2 - A_1A_2$$

oder auch, da die Neigung der Stehachse als ein kleiner Winkel gedacht werden soll

$$\sphericalangle Z - \sphericalangle S = B_1A_1' - B_2A_2'.$$

Es ist ersichtlich, daß die beiden kleinen Winkel B_1A_1' und B_2A_2' mit der Neigung der Visierachse gegen den Horizont wachsen, bei horizontalen oder nahezu horizontalen Visuren unmerklich werden.

Es ergibt sich hieraus die Regel, daß bei nahezu horizontalen Visuren die genäherte Lotrechtstellung der Stehachse mittels der Dosenlibelle genügt, während bei steileren Visuren die genaue Lotrechtstellung mit Hilfe einer Röhrenlibelle unerläßlich ist.

b) *Kippachsenfehler.* Ist die Stehachse lotrecht gestellt, so wird die Kippachse um den Betrag des *Kippachsenfehlers* gegen die Horizontale, und die Visierebene um denselben Betrag gegen die Lotrichtung geneigt sein. Bei der Einstellung zweier Ziele habe die Visierachse die beiden Richtungen OV_1 und OV_2 (Fig. 60), die Visierebene die Lagen V_1A_1 und V_2A_2. Die Alhidade ist dann zwischen den beiden Einstellungen um den Winkel A_1A_2 gedreht worden, den man somit als Differenz der beiden Ablesungen erhält, und der, wie man sieht, nicht mit dem zu messenden Horizontalwinkel M_1M_2 übereinstimmt.

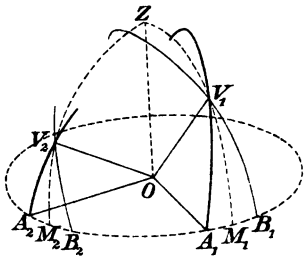


Fig. 60.

Wird nach der Messung das Fernrohr *durchgeschlagen*, d. h. um die Kippachse gedreht, und die Visierachse durch Drehen der Alhidade um 180° auf dieselben Ziele gerichtet, so erhält die Visierebene die entgegengesetzte Neigung gegen die Lotrichtung. Man findet in diesem Falle als Resultat der Messung den Winkel B_1B_2. Aus Fig. 60 sieht man, daß der Horizontalwinkel

$$M_1M_2 = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{2}$$

ist.

Der Horizontalwinkel zwischen zwei Zielen wird also unabhängig vom Kippachsenfehler dadurch erhalten, daß man den Winkel in jeder Fernrohrlage bei lotrechter Stehachse mindestens einmal mißt, und das arithmetische Mittel beider Messungen bildet.

c) *Kollimationsfehler.* Steht die Visierachse nicht senkrecht zur Kippachse, ist also ein *Kollimationsfehler c* (Fig. 61) vorhanden, so geht die Visierebene in eine Kegelfläche über, die die Kugeloberfläche in einem Parallelkreise AB schneidet. Hat die Visierachse die Richtung OV_1, so ist ihre Projektion auf die

Horizontalebene OV_1', und diese bildet mit der Kippachsennormalen den Winkel c_1. Die Größe von c_1 hängt von dem Neigungswinkel der Visierachse gegen die Horizontalebene ab, und wächst mit dem letzteren. Fig. 62 stellt die Lage der Visierachse und der Kippachse in der Horizontalprojektion dar.

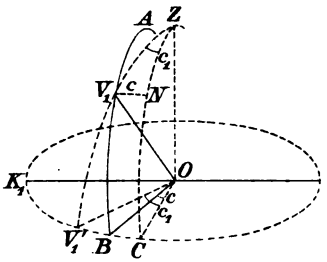


Fig. 61.

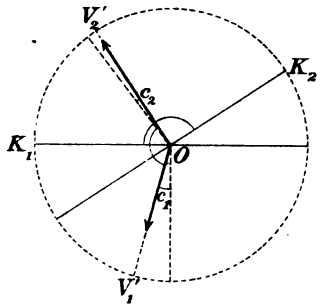


Fig. 62.

Wird ein zweites Ziel V_2 in anderer Höhe über der Horizontalebene eingestellt, so gelange die Kippachse nach K_2 und die Projektion OV_2' der Visierachse bilde mit der Kippachsennormalen den Winkel c_2. Als Differenz der Nonienablesungen wird der Winkel K_1K_2 erhalten, den die Alhidade beschreibt, während der Horizontalwinkel $V_1'V_2'$ zu messen ist. Mithin ist der Fehler der Winkelmessung

$$(1) \qquad V_1'V_2' - K_1K_2 = 90^0 - c_1 - (90^0 - c_2) = c_2 - c_1.$$

Wird nach dem Durchschlagen des Fernrohrs der Winkel noch einmal gemessen, so nehmen die Visier- und Kippachse die in Fig. 63 dargestellte Lage ein, und der aus der Messung hervorgehende Winkel ist K_1K_2, also der Fehler der Winkelmessung

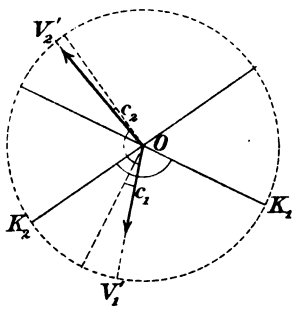


Fig. 63.

$$(2) \qquad V_1'V_2' - K_1K_2 = 90^0 - c_2 - (90^0 - c_1) = c_1 - c_2.$$

Auch hier sieht man, daß im Mittel aus den Messungen in beiden Fernrohrlagen der Fehler verschwindet.

Die Fig. 60 und 61 lehren noch,

daß bei gleicher Höhe der beiden Ziele V_1 und V_2 über dem Horizont auch bei einmaliger Messung der Horizontalwinkel frei von dem Einfluß des Kollimations- und des Kippachsenfehlers erhalten wird, und daß dieser Einfluß um so größer ist, je größer die Differenz der Höhenwinkel nach den beiden Zielen ist.

§ 36. Berechnung des Einflusses der Achsenfehler.

Es ist nach dem Vorhergehenden nicht schwer, die Einflüsse der Achsenfehler rechnerisch zu ermitteln, so daß die Winkelmessung hiernach verbessert werden kann.

Die *Stehachsenneigung* äußert sich als eine Neigung der Kippachse, die jedoch für jede Richtung eine andere ist. Soll der Einfluß dieser Neigung zahlenmäßig festgestellt werden, so muß sie mittels der Reiterlibelle für jede Richtung nach S. 69 bestimmt werden. Der *Kippachsenfehler* gibt ebenfalls eine Neigung der Kippachse, es werden somit bei der vorstehenden Neigungsbestimmung beide Fehler zusammen gefaßt.

Bezeichnen wir die ermittelte Neigung der Kippachse mit i, so ist die Neigung der Visierebene gegen die Horizontalebene gleich $90^0 - i$. Aus Fig. 60 S. 81 betrachten wir das rechtwinklige Dreieck $V_1 M_1 A_1$ (Fig. 64), in dem $\sphericalangle A_1 = 90^0 - i$ und $V_1 M_1 = h$ ist. Hieraus erhalten wir

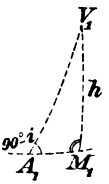


Fig. 64.

$$\sin A_1 M_1 = \operatorname{tang} i \operatorname{tang} h$$

oder auch

$$A_1 M_1 = i \operatorname{tang} h. \tag{1}$$

In derselben Weise kann auch $A_2 M_2$ in Fig. 60 berechnet werden, so daß dann aus dem gemessenen Winkel $A_1 A_2$ der gesuchte Winkel $M_1 M_2$ angegeben werden kann.

Zur Berücksichtigung des *Kollimationsfehlers* legen wir in Fig. 61 durch die Kippachse und Visierachse einen Großkreis, der den Großkreis ZC in N rechtwinklig schneidet, und betrachten das kleine rechtwinklige Dreieck $V_1 NZ$ (Fig. 65), in dem $V_1 N = c$, $\sphericalangle Z = c_1$ und $ZV_1 = 90^0 - h_1$ ist. Hierin ist

Fig. 65.

$$\sin c_1 = \frac{\sin c}{\cos h_1}$$

oder

$$c_1 = c \frac{1}{\cos h_1}. \tag{2}$$

Ebenso ist

$$c_2 = c \frac{1}{\cos h_2}, \tag{3}$$

so daß der Winkel $V_1' V_2'$ (Fig. 62 und 63) aus dem gemessenen Winkel $K_1 K_2$ nach Gl. (1) oder (2) des vorigen Paragraphen berechnet werden kann.

§ 37. Justierung des Theodolits.

Da es notwendig ist, die Achsenfehler in engen Grenzen zu halten, so sind noch die Methoden ihrer Justierung zu erörtern.

a) Die *Justierung des Kollimationsfehlers* ist am bequemsten auszuführen, wenn die Zapfen der Kippachse ihre Lager vertauschen können, wenn also das Fernrohr sich *umlegen* läßt. In Fig. 66 stehe die Visierachse nicht senkrecht zur Kippachse, sondern habe die Lage FO. Wird mit dem Fadenkreuz ein Ziel eingestellt, so liegt das Bild desselben in F. Nach dem *Umlegen* des Fernrohrs bei geklemmter Alhidade gelangt das Fadenkreuz nach F', während das Bild des Ziels in F bleibt. Mit den beiden Justierschrauben des Fadenkreuzes bringt man dieses näherungsweise in die Mitte zwischen F und F', wodurch der Kollimationsfehler nahezu beseitigt ist. Nach einigen Wiederholungen des Verfahrens gelingt die vollständige Justierung der Visierachse.

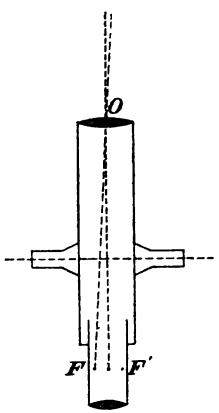


Fig. 66.

Ist das Umlegen des Fernrohrs nicht angängig, so kann die folgende, am besten im Freien ausführbare Methode angewendet werden (Fig. 67). Die Visierachse sei auf ein Ziel V gerichtet, wobei die Kippachse die Lage OK_1 habe. Wird das Fernrohr bei feststehender Alhidade durchgeschlagen, so gelangt es in die Lage OA_1 und α ist gleich dem doppelten Kollimationsfehler. Hierauf führt man das Fernrohr durch Drehen

der Alhidade nach V zurück, so daß die Kippachse die Lage OK_2 erhält, und schlägt wieder das Fernrohr durch. Der Winkel β ist dann ebenfalls gleich dem doppelten Kollimationsfehler. Die Strecke A_1A_2, die an einem horizontalen Maßstab abgelesen werden kann, gibt bei der geringen Größe von c ein Maß für den vierfachen Kollimationsfehler. Zur Beseitigung desselben braucht man nur in der letzten Stellung des Fernrohrs das Fadenkreuz mit Hilfe seiner Justierschrauben auf die in der Mitte zwischen A_2 und M liegende Ablesung B des Maßstabes einzustellen. Eine Wiederholung des Verfahrens zeigt, ob die Justierung richtig ausgeführt ist.

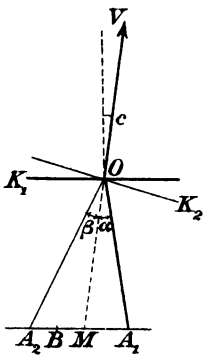


Fig. 67.

Ist die Nonienangabe klein genug, so können an die Stelle der Skalenablesungen auch Ablesungen am Horizontalkreis mit geringer Abänderung des Verfahrens treten.

b) Das Verfahren zur *Beseitigung des Kippachsenfehlers* hängt davon ab, ob der Theodolit mit einer Reiterlibelle oder mit einer auf der Alhidade befestigten Röhrenlibelle versehen ist. In beiden Fällen ist es nach S. 71 möglich, die Stehachse lotrecht zu stellen. Ist eine Reiterlibelle vorhanden, so ist bei lotrechter Stehachse vermittels der Justierschrauben am Kippachsenlager nach S. 69 die Kippachse horizontal zu stellen. Zweckmäßig ist es, hierzu die Reiterlibelle vorher in bezug auf die Kippachse zu justieren.

Ist keine Reiterlibelle vorhanden, sondern eine andere Röhrenlibelle, so muß zur Horizontalstellung der Kippachse die Visierebene zu Hilfe genommen werden, jedoch erst nachdem der Kollimationsfehler beseitigt ist. Die Visierebene ist bei lotrechter Stehachse um den Kippachsenfehler gegen die Lotrichtung geneigt. Wird nun mit Hilfe der Justierschrauben am Kippachsenlager die Neigung der Kippachse derartig geändert, daß der Faden eines Lotes oder eine lotrechte Hauskante in der Visierebene liegt, so ist die Kippachse horizontal und ihr Fehler beseitigt.

Bequem ist auch das Herabloten eines hochgelegenen Punktes auf eine horizontale Skala in beiden Fernrohrlagen bei lotrechter

Stehachse. Das Mittel beider Ablesungen entspricht der vertikalen Visierebene, und nachdem dieses eingestellt ist, wird die Kippachse mit ihren Justierschrauben soweit geneigt, daß das hochgelegene Ziel im Fadenkreuz steht.

Es wird niemals erforderlich sein, bei der Beseitigung des Kollimations- und des Kippachsenfehlers die größtmögliche Genauigkeit anzustreben, da bei den wichtigeren Winkelmessungen die Kompensation der beiden Achsenfehler durch Messung in beiden Fernrohrlagen bewirkt wird, bei allen anderen Anwendungen geringe Reste der Fehler jedoch belanglos sind.

§ 38. Exzentrizität der Alhidadenachse und der Visierachse.

Einige andere Fehler des Theodolits lassen sich nicht durch Justierung beseitigen, und es bleibt nur übrig, sie durch Anordnung der Messung zu kompensieren, oder ihren Einfluß zahlenmäßig zu berechnen.

a) *Exzentrizität der Alhidadenachse.* Meistens schneidet die Drehachse der Alhidade den Limbus nicht im Mittelpunkt L der Teilung, sondern ein wenig exzentrisch im Punkte A (Fig. 68). Es wird infolgedessen als Differenz zweier Ablesungen φ_1 und φ_2 mit Hilfe des Zeigers I nicht derjenige Winkel α erhalten, um den die Alhidade gedreht wird, sondern der Winkel α_1, wobei

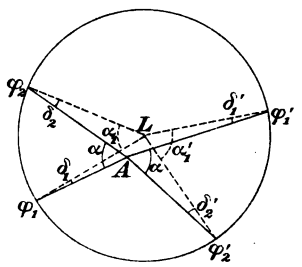


Fig. 68.

$$\alpha = \alpha_1 - \delta_1 + \delta_2$$

ist. Die Ablesungen an dem Zeiger II geben den Winkel α_1', für den

$$\alpha = \alpha_1' + \delta_1' - \delta_2'$$

gilt. Da der Abstand LA im Verhältnis zum Radius des Limbus sehr klein ist, so ist bis auf nicht wahrnehmbare Fehler

$$\delta_1 = \delta_1' \qquad \delta_2 = \delta_2' \quad \text{also} \quad \alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_1'}{2}.$$

Durch Ablesen an zwei Zeigern, deren Abstand nahezu 180° beträgt, wird mithin die Exzentrizität eliminiert.

b) *Exzentrizität der Visierachse.* Bisher wurde angenommen, daß Visierachse, Kippachse und Stehachse sich in einem Punkte

schneiden. Meistens wird die Visierachse die Stehachse nicht schneiden, sondern eine geringe Exzentrizität in bezug auf letztere haben. In manchen Fällen ist das Fernrohr sogar außerhalb der Träger angebracht, so daß eine große Exzentrizität vorhanden ist (z. B. Abb. in § 93). Auf die Entwicklungen der §§ 35 und 36 hat dies keinen Einfluß, man denke sich zur Entstehung der Fig. 59—61 die Visierachse bis zum gemeinsamen Schnittpunkt von Kippachse und Stehachse parallel verschoben.

Wird die exzentrische Visierachse auf zwei Ziele P_1 und P_2 (Fig. 69) gerichtet, so beschreibt die Alhidade den Winkel α_1, während α zu messen ist. Es ist dann

$$\alpha = \alpha_1 + \delta_1 - \delta_2 .$$

Wird das Fernrohr durchgeschlagen und die Messung wiederholt, so ergibt die Wiederholung α_2 und es ist

$$\alpha = \alpha_2 - \delta_1 + \delta_2 .$$

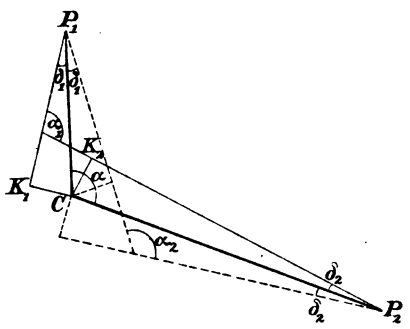


Fig. 69.

Mithin erhält man aus dem Mittel beider Messungen den Winkel

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

fehlerfrei.

Eine Bemerkung in bezug auf die Justierung des Kollimationsfehlers bei Theodoliten mit exzentrischem Fernrohr ist noch erforderlich. Am bequemsten ist es, in größerer Entfernung zwei Ziele, etwa zwei Baken, im Abstand der doppelten Exzentrizität des Fernrohrs aufzustellen und dann den Kollimationsfehler durch Umlegen der Kippachse festzustellen. Auch die übrigen Methoden des § 37 können dann angewendet werden.

§ 39. Die Methoden der Winkelmessung.

a) Die einfachste Methode der Horizontalwinkelmessung, die *Richtungs-* oder *Satzbeobachtung*, besteht darin, daß auf einem gegebenen Standpunkt der Reihe nach die vorgeschrie-

benen Ziele mit dem Fernrohr eingestellt werden, und daß nach jeder Einstellung an beiden Zeigern abgelesen wird. Eine solche einmalige Beobachtung aller *Richtungen* wird als *Richtungssatz* bezeichnet. Aus §§ 35 und 38 geht hervor, daß mindestens zwei Sätze in verschiedenen Fernrohrlagen gemessen werden müssen, um die Instrumentalfehler zu tilgen. Nachstehend ist ein Beispiel einer Satzbeobachtung mit vier Richtungen und zwei Sätzen gegeben, das zugleich die übliche Aufschreibung zeigt.

Standpunkt *W*.

Ziel	Zeiger I	Zeiger II	Mittel	Richtung	Richtungsmittel
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
			1. Satz		
K	170 17 20	350 17 20	170 17 20	0 00 00	0 00 00
H	216 45 40	36 45 50	216 45 45	46 28 25	46 28 28
A	281 06 40	101 06 45	281 06 42	110 49 22	110 49 26
B	341 17 00	161 17 05	341 17 02	170 59 42	170 59 43
Probe	26 40	27 00	26 49	17 29	
			2. Satz		
B	250 27 40	70 27 45	250 27 42	170 59 44	
A	190 17 25	10 17 30	190 17 28	110 49 30	
H	125 56 30	305 56 25	125 56 28	46 28 30	
K	79 28 00	259 27 55	79 27 58	0 00 00	
Probe	09 35	09 35	09 36	17 44	

Spalte 5 des Formulars entsteht dadurch, daß das Mittel des ersten Ziels von allen Mitteln abgezogen wird. Es werden somit alle Richtungen auf die erste als *Anfangs-* oder *Nullrichtung* bezogen.

Zur Prüfung der Mittelbildung und der Berechnung der Richtungen werden in der Zeile *Probe* die Summen der Spalten 2—5 gebildet; es muß dann Spalte 4 der Probe mit dem arithmetischen Mittel der Spalten 2 und 3 bis auf die durch Abrundung entstandenen Differenzen übereinstimmen.

Spalte 5 muß im ersten Satz um $4 \cdot (170^\circ\ 17'\ 20'')$, im zweiten Satz um $4 \cdot (79^\circ\ 27'\ 58'')$ kleiner sein als Spalte 4, wobei aber auch nur die Minuten und Sekunden geprüft werden.

Es ist zweckmäßig, im zweiten Satz mit der Fernrohrlage zugleich die Zielfolge zu wechseln, wie es auch bei dem vorstehenden Beispiel geschehen ist. Bei der Aufstellung des

Theodolits auf einem Stativ findet nämlich unter dem Einfluß der Erwärmung durch die Sonne eine langsame ziemlich stetige Drehung des letzteren statt, die, wie man leicht einsieht, durch Umkehrung der Zielfolge näherungsweise eliminiert wird. Zugleich wird vor Beginn des zweiten Satzes der Limbus verstellt, damit die Ablesungen von denen des ersten Satzes verschieden sind.

In vielen Fällen werden mehr als zwei Sätze notwendig sein, um die Richtungen mit genügender Genauigkeit zu erhalten. In Rücksicht auf die Teilungsfehler, die häufig einen periodischen Charakter zeigen, ist es dann ratsam, die Ablesungen möglichst symmetrisch auf den ganzen Limbus zu verteilen und hierzu bei n Sätzen vor Beginn eines jeden den Limbus um $\frac{180^0}{n}$ zu verstellen.

b) Nach der *Repetitionsmethode* kann im Gegensatz zur Richtungsmessung stets nur ein Winkel zwischen zwei Zielen gemessen werden. Das Verfahren ist das folgende: Nach Einstellung des linken Ziels werde als Mittel der beiden Ablesungen der Wert l_1, nach der Einstellung des rechten Ziels der Wert r_1 gefunden. Nun wird bei geklemmter Alhidade der *Limbus* linksläufig gedreht und das linke Ziel eingestellt, wobei die Ablesung r_1 bestehen bleibt. Hierauf folgt eine zweite Messung des Winkels, die rechts die Ablesung r_2 gibt usw. Nehmen wir an, es sei eine vierfache Repetition der Winkelmessung auszuführen, so hat man für die beiden Ziele die folgenden Ablesungen und gemessenen Winkel:

Einstellung	links	rechts	Winkel
1.	l_1	r_1	$r_1 - l_1$
2.	r_1	r_2	$r_2 - r_1$
3.	r_2	r_3	$r_3 - r_2$
4.	r_3	r_4	$r_4 - r_3$.

Das arithmetische Mittel der vier Winkelmessungen ist $\frac{r_4 - l_1}{4}$. Die Ablesungen $r_1 r_2 r_3$ sind demnach überflüssig, es genügt die Ablesung bei der ersten und letzten Einstellung. Es liegt hierin die hohe Bedeutung dieser Methode, da die Ablesefehler von r_4 und l_1 durch die Mittelung auf ein Viertel reduziert werden, und nur die Einstellungsfehler in ihrer ganzen

Größe wie bei den Richtungsmessungen das Resultat beeinflussen. Bei den hier in Betracht kommenden kleinen Instrumenten sind jedoch die Einstellungsfehler fast immer sehr klein im Verhältnis zu den Ablesungsfehlern, weshalb durch das Repetitionsverfahren eine wesentlich größere Genauigkeit als durch Richtungsbeobachtungen zu erreichen ist.

Entsprechend den Richtungsbeobachtungen ist auch hier eine Wiederholung der Winkelmessung in der zweiten Fernrohrlage notwendig, die auch zugleich mit einer Umkehrung der Zielfolge verbunden wird. In nachstehendem Beispiel ist die achtfache Repetition eines Winkels mit einem Theodolit von 20″ Angabe wiedergegeben.

Standpunkt *S*.

Anzahl der Rep.	Zeiger I	Zeiger II	Mittel	*n*-facher Winkel	Einfacher Winkel
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
		Winkel:	$P-H$		
0	172 24 40	352 24 40	172 24 40		
(1)	(231 41)			237 06 20	59 16 35
4	49 31 00	229 31 00	49 31 00		
8	172 24 40	352 24 40	352 24 20	237 06 40	59 16 40
					59 16 38

Es ist wertvoll, auch bei der ersten Einstellung des rechten Ziels an einem Zeiger abzulesen, um die ungefähre Größe des gemessenen Winkels zu kennen, da bei einer größeren Anzahl von Repetitionen zur letzten Ablesung ein Vielfaches von 360° hinzuzufügen ist, bevor die Berechnung des Winkels erfolgen kann.

6. Kapitel.

Polygonometrische Punktbestimmung.

§ 40. Polygonmessungen.

Die Absteckung eines Liniennetzes nach Fig. 21 oder 22 S. 19 und 20 wird nur bei nahezu ebenem Gelände möglich und auch hier häufig mit kostspieligen Ausholzungen verbunden sein.

Im Hügelland, auf bedecktem Gelände und namentlich auch in Ortschaften ist es notwendig, dieses einfache Verfahren zu verlassen und der Vermessung ein *Polygon* zugrunde zu legen (Fig. 70).

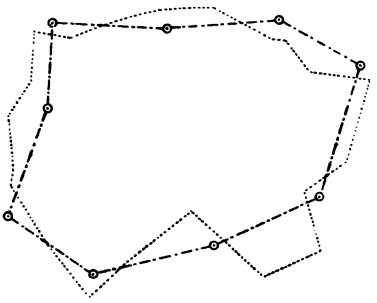


Fig. 70.

Die Gestalt und Größe eines beliebigen Vielecks ist bestimmt, wenn seine Seiten und Winkel bekannt sind. Es ist ersichtlich, daß hierzu sogar drei dieser Elemente entbehrt werden können; da es sich jedoch um Messungsgrößen handelt, so ergeben sich, wenn *alle* Elemente gemessen werden, wertvolle Meßproben, die auch einen Schluß auf die Genauigkeit der Messungen zulassen.

Bei der Auswahl der *Polygonpunkte* im Gelände legt man zweckmäßig die Polygonseiten in die Nähe der Grenzen des aufzunehmenden Gebiets, derartig, daß sowohl die Winkelmessung auf jedem Punkt, als auch die Streckenmessung zwischen Nachbarpunkten ohne Schwierigkeit ausgeführt werden kann. Dabei muß als Regel gelten, daß die Strecken so lang als möglich gewählt werden, da die Fehler in den Koordinaten bei gleichem Umfang des Polygons mit der Anzahl der Punkte wachsen. Zugleich ist auch auf den Anschluß des Liniennetzes soweit es angeht Rücksicht zu nehmen.

Für eine möglichst dauerhafte Vermarkung der Polygonpunkte ist Sorge zu tragen, da sie noch nach langer Zeit eine Wiederherstellung des Liniennetzes zur Erneuerung verloren gegangener Grenzen, Aufnahme von Veränderungen usw. ermöglichen sollen. Vorteilhaft ist die Bezeichnung der Punkte durch lotrecht in den Boden gesetzte Gasröhren von ca. 60 cm Länge, deren oberes Ende mit dem Gelände in gleicher Höhe liegt. Wohlfeiler sind Tonröhren (Drainröhren), von denen ihrer geringeren Länge wegen am besten zwei aufeinander stehend verwendet werden.

Die Messung der Polygonseiten erfolgt in Rücksicht auf die Wichtigkeit des Polygons zweimal mit großer Sorgfalt.

Für die Messung der Polygonwinkel genügt meistens ein kleiner Theodolit, etwa von 30″ Nonienangabe. Da die Länge der Seiten wegen der Geländehindernisse kaum über 300—400 m hinausgehen, meistens sogar geringer sein wird, so ist der genau zentrischen Aufstellung des Theodolits und der Zielbaken besondere Aufmerksamkeit zu widmen. Geringe Abweichungen hiervon erzeugen bei kurzen Zielweiten schon erhebliche Fehler der Winkelmessung, die sich erst bei der Berechnung des Polygons bemerkbar machen. Die Winkel werden in jeder Fernrohrlage einmal, also in zwei Richtungssätzen gemessen, zwischen denen der Horizontalkreis um rund 90° zu verstellen ist. Überhaupt sind alle Regeln für Satzbeobachtungen zu befolgen.

§ 41. Koordinatenberechnung.

Bevor wir zur Berechnung des Polygons übergehen, haben wir noch einige Definitionen und Grundregeln der Koordinatenrechnung zu geben.

Den Winkel $\varphi_{1,2}$ in Fig. 71, der von der positiven Richtung der Abszissenachse zu einer Strecke 1—2 im rechtsläufigen Drehungssinn überführt, bezeichnen wir als *Richtungswinkel* der Strecke. Demnach ist $\varphi_{2,1}$ der Richtungswinkel der Strecke 2—1, und es ist

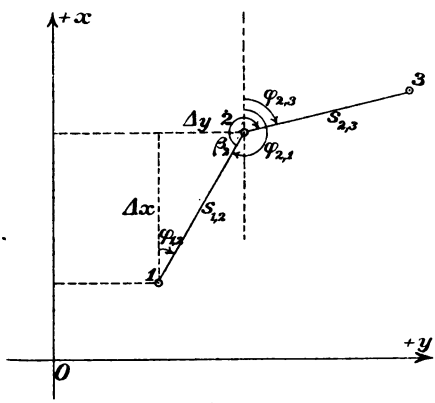


Fig. 71.

$$(1) \quad \varphi_{2,1} = \varphi_{1,2} \pm 180^0.$$

Für spätere Verwendung wollen wir auch noch die Bezeichnungen

$$(2) \quad \varphi_{1,2} = (1,2)$$

und entsprechend

$$\varphi_{2,1} = (2,1)$$

einführen. Ist β_2 der Horizontalwinkel, der von der Strecke 2—1 zur Strecke 2—3 überführt, so haben wir nach Fig. 71

$$\varphi_{2,3} = \varphi_{2,1} + \beta_2,$$

wobei nötigenfalls 360° abzuziehen sind. Es folgt ferner, daß

(3) $$\varphi_{2,3} = \varphi_{1,2} + \beta_2 \pm 180^0$$

ist. Bezeichnen wir mit Δy und Δx die Koordinatenunterschiede zweier Punkte, so ist nach Fig. 71 unter Weglassung der Indices

(4) $$\Delta y = s \sin \varphi$$
$$\Delta x = s \cos \varphi.$$

Diese Grundgleichungen der Koordinatenberechnung gelten für beliebige Werte von φ; die Vorzeichen von $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ geben auch die Vorzeichen von Δy und Δx richtig an.

Wir betrachten nun das nachstehende Polygon (Fig. 72), dessen *Brechungswinkel* β und Strecken s gemessen sind. Für die Summe der Außenwinkel eines n-Ecks, die wir mit $[\beta]$ bezeichnen wollen, besteht die Bedingung

(5) $$[\beta] = (n + 2)\, 180^0.$$

Infolge der Messungsfehler wird diese Gleichung nicht erfüllt sein. Ist die Abweichung klein genug, um die Annahme grober Fehler auszuschließen, so wird sie zu gleichen Teilen auf die n Winkel verteilt. Zeigen sich jedoch grobe Messungsfehler, so ist eine Nachmessung erforderlich. Für amtliche Messungen ist in Preußen höchstens der Betrag von $1{,}5\sqrt{n}$ Minuten für die Abweichungen von Gl. (5) zulässig, eine Grenze, die bei sorgfältiger Messung und Zentrierung leicht innegehalten werden kann.

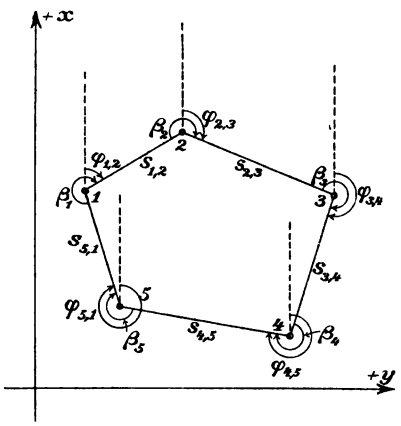


Fig. 72.

Nach der Ausgleichung der Brechungswinkel können wir nach Gl. (3) die Richtungswinkel der einzelnen Strecken berechnen. Nehmen wir $\varphi_{1,2}$ beliebig an, so ist

(6) $$\varphi_{2,3} = \varphi_{1,2} + \beta_2 \pm 180^0$$
$$\varphi_{3,4} = \varphi_{2,3} + \beta_3 \pm 180^0$$
$$\vdots$$
$$\varphi_{1,2} = \varphi_{5,1} + \beta_1 \pm 180^0.$$

Die letzte Gleichung prüft die Berechnung aller Richtungswinkel.

Hiermit sind nun nach (4) zur Berechnung der Koordinatenunterschiede die Produkte $s \sin \varphi$ und $s \cos \varphi$ zu bilden. Für jedes geschlossene Polygon gelten die Bedingungen

$$[\Delta y] = 0 \quad \text{und} \quad [\Delta x] = 0, \tag{7}$$

da diese infolge der Messungsfehler nicht erfüllt sein werden, so findet sich

$$[s \sin \varphi] = w_y \quad \text{und} \quad [s \cos \varphi] = w_x, \tag{8}$$

wobei w_y und w_x die durch zufällige Messungsfehler zu erklärenden Grenzen nicht überschreiten dürfen. Die beiden Bedingungen (7) erfordern ebenso wie Gl. (5) eine Ausgleichung, die am besten nach einem Näherungsverfahren erfolgt. Zwei Methoden finden allgemein Verwendung: 1. die Verteilung der Widersprüche auf die einzelnen Produkte $s \sin \varphi$ und $s \cos \varphi$ nach Verhältnis der Strecken s, 2. nach dem Verhältnis der Absolutwerte der Produkte selbst.

Welches Verfahren günstigere Resultate liefert, müßte von Fall zu Fall geprüft werden; besser ist es jedoch, durch sorgfältige Messung die Widersprüche klein zu halten, da dann die Wahl des Ausgleichungsverfahrens gleichgültig ist.

Nach der ersten Methode erhält man die folgenden Koordinatenunterschiede

$$\begin{aligned} \Delta y_{1,2} &= s_{1,2} \sin \varphi_{1,2} - \frac{w_y}{[s]} s_{1,2} \qquad \Delta x_{1,2} = s_{1,2} \cos \varphi_{1,2} - \frac{w_x}{[s]} s_{1,2} \\ \Delta y_{2,3} &= s_{2,3} \sin \varphi_{2,3} - \frac{w_y}{[s]} s_{2,3} \qquad \Delta x_{2,3} = s_{2,3} \cos \varphi_{2,3} - \frac{w_x}{[s]} s_{2,3} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{9}$$

Nach der zweiten Methode findet man

$$\begin{aligned} \Delta y_{1,2} &= s_{1,2} \sin \varphi_{1,2} - \frac{w_y}{[|s \sin \varphi|]} |s_{1,2} \sin \varphi_{1,2}| \\ \Delta x_{1,2} &= s_{1,2} \cos \varphi_{1,2} - \frac{w_x}{[|s \cos \varphi|]} |s_{1,2} \cos \varphi_{1,2}| \\ &\vdots \end{aligned} \tag{10}$$

Zur Berechnung der kleinen Korrektionsglieder wird am besten der logarithmische Rechenschieber benutzt.

§ 42. Beispiel.

Als Zahlenbeispiel soll das in Fig. 73 dargestellte Polygon ⊙ 1 — ⊙ 8 berechnet werden, das zur Aufnahme der Dorflage einer Feldmark erforderlich war.

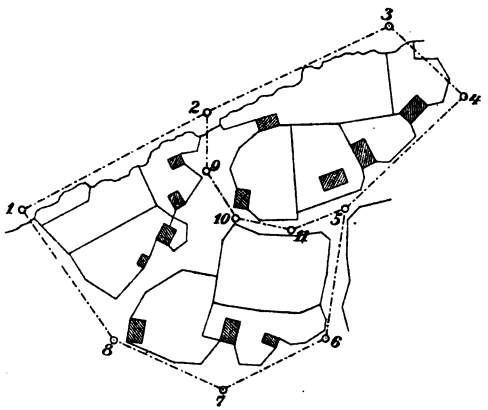


Fig. 73.

Die Winkelmessung und Streckenmessung ergaben nach der Mittelung folgende Resultate:

$\beta_1 = 276^0\ 23'\ 30''$	$s_{1,2} = 290{,}44$ m
$\beta_2 = 181\ 46\ 20$	$s_{2,3} = 281{,}63$
$\beta_3 = 246\ 13\ 40$	$s_{3,4} = 143{,}75$
$\beta_4 = 273\ 54\ 00$	$s_{4,5} = 223{,}21$
$\beta_5 = 141\ 21\ 40$	$s_{5,6} = 185{,}70$
$\beta_6 = 234\ 42\ 10$	$s_{6,7} = 162{,}28$
$\beta_7 = 230\ 07\ 30$	$s_{7,8} = 190{,}18$
$\beta_8 = 214\ 33\ 30$	$s_{8,1} = 227{,}67.$

Die ganze Berechnung nach den Gleichungen (5)—(10) ist auf S. 96/97 in einem besonderen übersichtlichen Schema ausgeführt.

In der zweiten Spalte wird die Summe der Brechungswinkel gebildet und jedem Winkel seine — auf ganze Sekunden abgerundete — Verbesserung beigefügt. Für den Richtungswinkel $\varphi_{1,2}$ ist der Wert $42^0\ 16'\ 23''$ gegeben und hiermit werden alle übrigen Richtungswinkel berechnet. Für die logarithmische Berechnung genügen stets fünfstellige Logarithmen. Die Produkte $s \sin \varphi$ und $s \cos \varphi$ werden der Rechenprobe wegen noch einmal mit Hilfe der Rechenmaschine gebildet, wozu die Werte der trigonometrischen Funktionen aus einer besonderen Tafel entnommen werden. Es können auch *Koordinatentafeln* für diesen Zweck benutzt werden, bei denen dann die Multiplikation ganz wegfällt. Für die beiden vorletzten Spalten des Rechenschemas waren die Koordinaten des Punktes 1 gegeben.

Punkt	Brechungswinkel β	Richtungswinkel φ	Strecke s	$\log \sin \varphi$ $\log s$ $\log \cos \varphi$	$\log s \sin \varphi$ $\log s \cos \varphi$
	° ′ ″	° ′ ″			
1				9.82780	
	— 17	42 16 23	290,44	2.46306	2.29036
2	181 46 20			9.86920	2.33226
				9.84208	
	— 18	44 02 25	281,63	2.44968	2.29176
3	246 13 40			9.85664	2.30632
				9.97225	
	— 17	110 15 48	143,75	2.15761	2.12986
4	273 54 00			9.53950_n	1.69711_n
				9.61200_n	
	— 18	204 09 30	223,21	2.34871	1.96071_n
5	141 21 40			9.96020_n	2.30891_n
				9.39817	
	— 17	165 30 53	185,70	2.26881	1.66698
6	235 42 10			9.98597_n	2.25478_n
				9.81878_n	
	— 18	221 12 45	162,28	2.21027	2.02905_n
7	230 07 30			9.87638_n	2.08665_n
				9.99988_n	
	— 17	271 19 58	190,18	2.27917	2.27905_n
8	214 33 30			8.36660	0.64577
				9.90858_n	
	— 18	305 53 10	227,67	2.35730	2.26588_n
1	276 23 30			9.76803	2.12533
		42 16 23			
	1800 02 20				
	$-\frac{140''}{8} = -17{,}5''$				

§ 43. Polygonzüge.

Wichtiger als geschlossene Polygone sind *Polygonzüge*, die zwei bereits bekannte Punkte verbinden. Später werden wir sehen, daß diese Züge ein unentbehrliches Glied in der Ausführung größerer Aufnahmen bilden. An dieser Stelle dienen als bekannte Punkte zwei Punkte des geschlossenen Polygons. Da dieses allein selten für den Anschluß eines Liniennetzes genügen wird, so ist in der Regel eine Teilung durch Polygonzüge erforderlich, damit die Bindelinien für die Einzelaufnahme überall bequem in Polygonseiten eingebunden werden können. In dem Beispiel Fig. 73 ist ein Zug von ⊙2 nach ⊙5 geführt

$s \sin \varphi$		$s \cos \varphi$		Δy	Δx	Punkt
+	−	+	−	y	x	
				+ 873,00	+ 426,00	1
+7 195,37		+2 214,91		+ 195,44	+ 214,93	
				+ 1068,44	+ 640,93	2
+7 195,78		+2 202,45		+ 195,85	+ 202,47	
				+ 1264,29	+ 843,40	3
+5 134,85			49,79	+ 134,90	− 49,79	
				+ 1399,19	+ 793,61	4
	+3 91,35		+2 203,66	− 91,32	− 203,64	
				+ 1307,87	+ 589,97	5
+2 46,45			+2 179,80	+ 46,47	− 179,78	
				+ 1354,34	+ 410,19	6
	+4 106,92		122,08	− 106,88	− 122,08	
				+ 1247,46	+ 288,11	7
	+6 190,13	4,42		− 190,07	+ 4,42	
				+ 1057,39	+ 292,53	8
	+6 184,45	+2 133,45		− 184,39	+ 133,47	
				+ 873,00	+ 426,00	1
572,45	572,85	555,23	555,33			

$w_y = -0{,}40$ $w_x = -0{,}10$

worden, da Geländehindernisse das Abstecken einer Messungslinie quer durch das Polygon nicht zuließen.

Allgemein seien in Fig. 74 die Punkte 6, 7, 1 und 5 bekannt, und die beiden letzteren durch einen Polygonzug zu verbinden. Im Zuge selbst sind dem Früheren entsprechend die Brechungswinkel β_2, β_3 und β_4 und

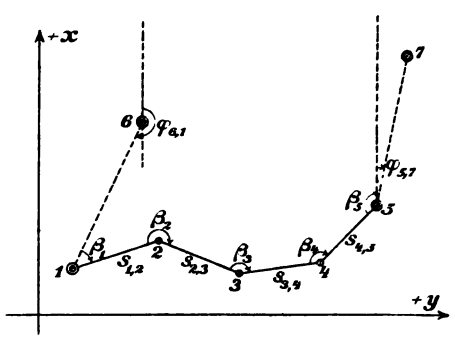


Fig. 74.

sämtliche Strecken zu messsen, außerdem jedoch ein Anschlußwinkel β_1 und ein Abschlußwinkel β_5, wodurch wieder drei Bedingungen als Meßproben erhalten werden.

Zur Berechnung des Zuges braucht man zunächst die Richtungswinkel der Strecken 6—1 und 5—7. Sind beide Strecken Seiten von schon berechneten Polygonen oder Polygonzügen, so können die Richtungswinkel aus dem Berechnungsheft entnommen werden. Im andern Falle sind sie aus den Koordinaten zu berechnen. Da wir dieser Aufgabe noch oft begegnen werden, so soll sie hier bereits eingehender behandelt werden.

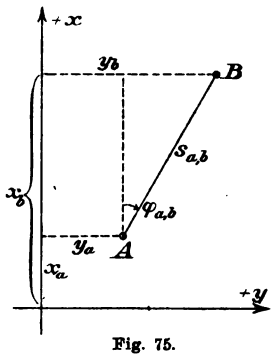


Fig. 75.

Sind die rechtwinkligen Koordinaten zweier Punkte A und B in Fig. 75 gegeben, so ist

$$(1) \qquad \operatorname{tang} \varphi_{a,b} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}.$$

Die Gleichung gilt für beliebige Lagen der Punkte A und B, gibt aber stets zwei um 180^0 voneinander abweichende Werte von $\varphi_{a,b}$. Um zu entscheiden, welchem Quadranten $\varphi_{a,b}$ angehört, ist zu beachten, daß

$$(2) \qquad y_b - y_a = s_{a,b} \sin \varphi_{a,b} \quad \text{und} \quad x_b - x_a = s_{a,b} \cos \varphi_{a,b}$$

ist, daß also $\sin \varphi_{a,b}$ und $\cos \varphi_{a,b}$ die Vorzeichen von $y_b - y_a$ bzw. $x_b - x_a$ haben werden. Die Vorzeichen von Zähler und Nenner in (1) bestimmen mithin eindeutig den Quadranten, in dem $\varphi_{a,b}$ liegt.

Um auch hier eine Rechenprobe zu erhalten, kann man die Gl. (1) leicht in eine andere Form bringen. Es ist

$$\frac{1 + \operatorname{tang} \varphi_{a,b}}{1 - \operatorname{tang} \varphi_{a,b}} = \frac{x_b - x_a + y_b - y_a}{x_b - x_a - y_b + y_a}$$

oder

$$(3) \qquad \operatorname{tang} (45^0 + \varphi_{a,b}) = \frac{(x_b + y_b) - (x_a + y_a)}{(x_b - y_b) - (x_a - y_a)}.$$

Da die Berechnung nach (3) vollständig unabhängig von (1)

ist, so ist in (3) eine durchgreifende Prüfung der Berechnung erlangt. Zugleich fügen wir noch die beiden Gleichungen

$$s_{a,b} = \frac{y_b - y_a}{\sin \varphi_{a,b}} = \frac{x_b - x_a}{\cos \varphi_{a,b}} \tag{4}$$

zur Berechnung der Strecke aus den Koordinaten hinzu, die ebenfalls mehrfach Verwendung finden werden.

Wir kehren nun zur Berechnung des Polygonzuges zurück. Sind die Richtungswinkel $\varphi_{6,1}$ und $\varphi_{5,7}$ (Fig. 74 S. 97) bekannt, so erhält man sofort eine Bedingung für die Polygonwinkel. Es ist nämlich bei n gemessenen Brechungswinkeln nach wiederholter Anwendung der Gl. (3) S. 93

$$\varphi_{5,7} = \varphi_{6,1} + [\beta] \pm n\, 180^0. \tag{5}$$

Diese der Gl. (5) S. 93 entsprechende Gleichung wird wie früher durch gleichmäßige Verbesserung der Brechungswinkel erfüllt. Hierauf erfolgt die Berechnung der Koordinatenunterschiede nach (4) S. 93. An die Stelle der Bedingungen (7) S. 94 treten hier die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} [\Delta y] &= y_5 - y_1 \\ [\Delta x] &= x_5 - x_1, \end{aligned} \tag{6}$$

die durch Verbesserung der einzelnen $s \sin \varphi$ und $s \cos \varphi$ nach (9) oder (10) S. 94 erfüllt werden müssen.

Um auch hierfür ein Beispiel zu erhalten, ist auf S. 100 und 101 die Berechnung des Zuges ⊙2—⊙5 aus Fig. 73 S. 95 vollständig ausgeführt. Die Verteilung der Widersprüche w_y und w_x erfolgte auch hier nach dem Verhältnis der Absolutwerte der Koordinatenunterschiede.

§ 44. Graphische Verteilung der Widersprüche.

Die beiden S. 94 genannten Verfahren zur Verteilung der Schlußfehler w_y und w_x bei Polygonzügen werden zwar in den meisten Fällen ausreichen, indessen soll der Vollständigkeit wegen noch eine Methode besprochen werden, die weniger willkürlich ist, wenn sie auch von einer strengen Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate weit entfernt bleibt. Die Methode der *Drehung* und *Dehnung* besteht darin, daß nach der

Punkt	Brechungswinkel β	Richtungswinkel φ	Strecke s	log sin φ log s log cos φ	log s sin φ log s cos φ
	° ′ ″	° ′ ″			
3	(224 02 25)	224 02 25			
	− 21				
2	114 21 20				
				9.56618	
	− 21	158 23 24	82,17	1.91471	1.48089
9	146 59 30			9.96835_n	1.88306_n
				9.91136	
	− 21	125 22 33	77,25	1.88790	1.79926
10	135 09 30			9.76263_n	1.65053_n
				9.99403	
	− 21	80 31 42	89,47	1.95216	1.94619
11	145 37 10			9.21655	1,16871
				9.85797	
	− 21	46 08 31	79,76	1.90179	1.75976
5	158 01 20			9.84065	1.74244
	924 11 15	24 09 30			
4	− 900				
	24 11 15				
	$-\frac{105''}{5} = -21''$				

Berechnung der Produkte $s \sin\varphi$ und $s \cos\varphi$ alle Strecken nach demselben Verhältnis und alle Richtungswinkel um denselben

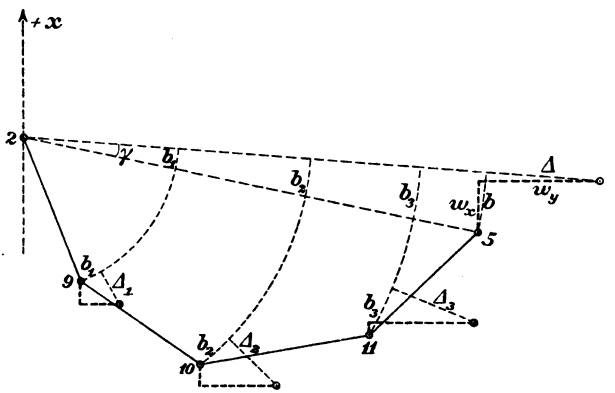


Fig. 76.

Betrag derartig geändert werden, daß die nunmehr gebildeten Produkte keine Widersprüche geben. Das Verfahren kann rechnerisch und graphisch durchgeführt werden; der letztere

$s \sin \varphi$		$s \cos \varphi$		Δy	Δx	Punkt
+	−	+	−	y	x	
				+ 1068,44	+ 640,93	2
+4 30,26			+6 76,39	+ 30,30	− 76,33	
				+ 1098,74	+ 564,60	9
+8 62,99			+8 44,72	+ 63,07	− 44,69	
				+ 1161,81	+ 519,91	10
+12 88,35		+1 14,75		+ 88,47	+ 14,76	
				+ 1250,28	+ 534,67	11
+8 57,51		+4 55,26		+ 57,59	+ 55,30	
				+ 1307,87	+ 589,97	5
239,11			51,10	+ 239,48	− 50,96	

$w_y = -0{,}32$ $w_x = -0{,}14$

bequemere Weg ist in Fig. 76 für das vorstehende Beispiel eingeschlagen worden. Es ist hierzu eine Zeichnung des Zuges in kleinem Maßstab erforderlich, wie sie meistens als Übersichtsskizze vorhanden sein wird.

In größerem Maßstabe (1 : 20) sind im Punkte 5 die Widersprüche w_y und w_x in richtiger Lage angetragen. Es ergibt sich hieraus, daß zur Tilgung der Widersprüche der Zug um den Winkel γ zu drehen ist, und die Strecke ⊙2—⊙5 um Δ zu vergrößern ist. Die verbesserten Örter der Punkte ⊙9, ⊙10 und ⊙11 findet man durch Verschiebung auf konzentrischen Kreisen um die Bogen b_1, b_2 und b_3, und in der Richtung der Radien um die Strecken

$$\Delta_1 = \frac{⊙2—⊙9}{⊙2—⊙5}\Delta \qquad \Delta_2 = \frac{⊙2—⊙10}{⊙2—⊙5}\Delta \text{ und } \Delta_3 = \frac{⊙2—⊙11}{⊙2—⊙5}\Delta,$$

die mit dem Rechenschieber leicht berechnet werden können Die Änderungen in y und x der einzelnen Punkte können dann aus der Zeichnung abgegriffen werden. Aus Fig. 76 wurde, wenn wir die Änderungen mit δy und δx bezeichnen, gefunden

$$\delta y_9 = +0{,}10 \qquad \delta x_9 = -0{,}06$$
$$\delta y_{10} = +0{,}20 \qquad \delta x_{10} = -0{,}06$$
$$\delta y_{11} = +0{,}29 \qquad \delta x_{11} = +0{,}03.$$

Mithin sind die Verbesserungen der Koordinatenunterschiede:

Strecke	Δy	Δx
⊙ 2—⊙ 9	+ 0,10	— 0,06
⊙ 9—⊙ 10	+ 0,10	0,00
⊙ 10—⊙ 11	+ 0,09	+ 0,09
⊙ 11—⊙ 5	+ 0,03	+ 0,11

Das rechnerische Verfahren, das nach den Formeln des § 68 auszuführen ist, gibt die genauen Werte, die von den obenstehenden im Maximum um 0,01 abweichen.

Man vergleiche auch die vorstehenden Verbesserungen mit denen, die S. 101 aus dem Näherungsverfahren hervorgingen.

§ 45. Knotenpunkte.

Wenn mehrere Polygonzüge, die von gegebenen Punkten ausgehen, sich in einem Punkte treffen, wie z. B. in Fig. 77, so kann zunächst der Zug A—B, hierauf der Zug ⊙3—C berechnet werden. Es entspricht jedoch mehr einer gleichmäßigen Behandlung aller Messungen, wenn zuerst durch gleichzeitige Berechnung der drei Züge von A, B und C nach ⊙3 die Koordinaten des letzteren Punktes unter Anwendung einer einfachen Ausgleichung ermittelt werden und dann die Ausgleichung der drei Züge erfolgt. In diesem Falle wird Punkt ⊙3 als *Knotenpunkt* bezeichnet.

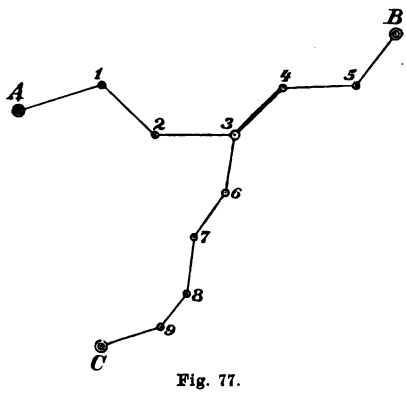


Fig. 77.

Die Berechnung beginnt mit der Ausgleichung der gemessenen Winkel. Hierzu berechnen wir aus allen drei Zügen den Richtungswinkel einer von dem Knotenpunkt ausgehenden

Strecke z. B. ⊙3 — ⊙4. Aus den drei erhaltenen Werten ist unter Berücksichtigung der ihnen zukommenden Gewichte ein Mittelwert zu bilden. Die Gewichte können umgekehrt proportional der Anzahl der Brechungswinkel angenommen werden, die man für jede der drei Berechnungen benutzt. In Fig. 75 kann man z. B. $g_a = \frac{1}{4}$, $g_b = \frac{1}{3}$ und $g_c = \frac{1}{6}$ setzen. Der so gefundene Mittelwert des Richtungswinkels $\varphi_{3,4}$ wird nun als gegeben betrachtet und zur Ausgleichung der Brechungswinkel innerhalb der drei Züge in gewöhnlicher Weise benutzt.

Nach Ermittlung der Produkte $s \sin \varphi$ und $s \cos \varphi$ erhält man auch für die Koordinaten des Knotenpunktes drei Wertepaare, die mit Berücksichtigung der Gewichte gemittelt werden müssen. Die Gewichte können willkürlich, z. B. gleich der reziproken Länge der Züge, angenommen werden.

§ 46. Grobe Winkel- und Streckenfehler.

Grobe Messungsfehler verraten sich in geschlossenen Polygonen und Polygonzügen durch große Widersprüche in den Winkel- und Koordinatenabschlüssen. Um die Nachmessung auf das fehlerhafte Element beschränken zu können, ist es notwendig, vorher den Ort des Fehlers ausfindig zu machen.

Die Größe eines groben Winkelfehlers ist aus der Winkelbedingung ersichtlich. Es sei in Fig. 78 der Winkel β_4 zu groß gemessen worden. Wird der Zug von ⊙1 aus ohne Rücksicht auf die drei Bedingungen berechnet, so werden die Koordinaten der Punkte ⊙5, ⊙6 und ⊙7 um grobe Beträge falsch erhalten. Bei einer Wiederholung der Berechnung in umgekehrter Richtung, also von ⊙7 aus, werden andrerseits die Koordinaten der Punkte ⊙3, ⊙2 und ⊙1 durch den Winkelfehler entstellt werden. Man sieht, daß aus beiden Berechnungen nur die Koordinaten des Punktes ⊙4, des Fehlerpunktes, übereinstimmend hervorgehen werden.

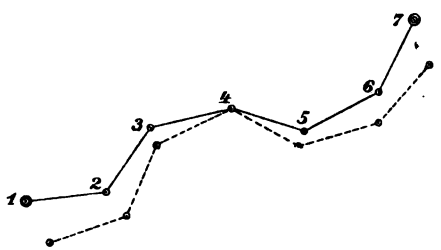


Fig. 78.

Der Einfluß eines groben Streckenfehlers ist in Fig. 79 dargestellt. Wird der Zug mit der unrichtigen Strecke ⊙2—⊙3′ durchgerechnet, so werden die Koordinaten eines Punktes ⊙6′ erhalten, dessen Abstand von ⊙6 nach Richtung und Größe mit dem Streckenfehler übereinstimmt. Aus den Koordinaten der Punkte ⊙6 und ⊙6′ kann mithin nach (1) und (4) § 43 S. 98 und 99 der Richtungswinkel der Fehlerstrecke und die Größe des Fehlers ermittelt werden. Das Aufsuchen der Fehlerstrecke mit Hilfe ihres Richtungswinkels mißlingt, wie man sieht, wenn mehrere Strecken nahezu denselben Richtungswinkel haben.

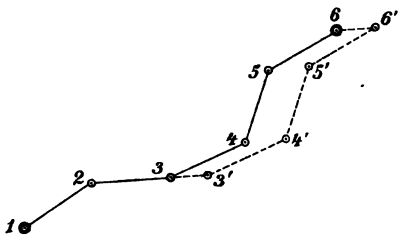


Fig. 79.

Weiteres über die Berechnung von Polygonzügen und über die Fehlertheorie derselben findet sich in §§ 66 und 67.

§ 47. Die Bussole.

In der Magnetnadel besitzen wir ein vorzügliches Hilfsmittel zur unmittelbaren Bestimmung von Richtungswinkeln, die bei der Theodolitaufnahme erst aus den Brechungswinkeln berechnet werden können. Die Richtung, die die Achse der Magnetnadel an einem bestimmten Orte angibt, bezeichnet man als den *magnetischen Meridian* des Ortes. Der Winkel zwischen dem magnetischen und dem astronomischen Meridian ist die *Deklination* der Magnetnadel. Diese wird als östlich oder westlich bezeichnet, je nachdem die Nordspitze der Magnetnadel östlich oder westlich vom astronomischen Meridian liegt (Dekl. in Danzig z. Z. gleich 6,8° westlich). Wichtiger als der absolute Betrag der Deklination ist für die geodätischen Zwecke ihre zeitliche und örtliche Änderung. Die zeitliche Änderung besteht in einer zu vernachlässigenden jährlichen Abnahme oder Zunahme und in täglichen periodischen Schwankungen, die im Maximum etwa 10 Minuten betragen. Diesen Schwankungen muß durch die Anordnung der Messungen Rechnung getragen werden. Die örtlichen Änderungen der Deklination kommen,

wie aus dem Messungsverfahren ersichtlich sein wird, kaum in Frage.

Da die Nadel nur in horizontaler Lage für geodätische Zwecke gebraucht werden kann, so muß die durch die *Inklination* verursachte Neigung durch einseitige Belastung aufgehoben werden. Der Aufhängepunkt der Nadel liegt stets über ihrem Schwerpunkt, geringe Änderungen der Inklination haben deshalb wenig Einfluß, und eine einmalige Ausbalancierung genügt für ein großes Gebiet, z. B. für ganz Deutschland.

Der *Kompaß* besteht aus einer zylindrischen, oben durch einen Glasdeckel verschlossenen Büchse von geringer Höhe, auf deren Grundfläche eine Kreisteilung angebracht ist. In der Mitte der Teilung erhebt sich ein spitz auslaufender Stift, auf dem das mit einem Achatplättchen versehene Hütchen der Nadel ruht. Ist der Kompaß außer Gebrauch, so läßt sich mittels einer besonderen *Arretiervorrichtung* die Nadel von der Spitze abheben und gegen den Glasdeckel drücken. Namentlich bei großen Instrumenten darf diese Vorsichtsmaßregel nie vergessen werden.

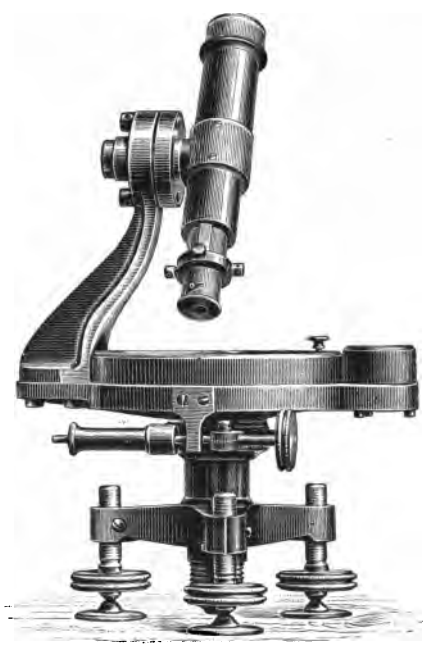


Fig. 80.

In dieser einfachen Form findet der Kompaß bei topographischen Aufnahmen Verwendung. Für geometrische Messungen wird er in Verbindung mit dem Fernrohr als *Bussole* gebraucht.

Fig. 80 zeigt eine kleinere Bussole von *Fennel*, bei der, wie man sieht, der Kompaß auf dem Dreifuß um eine Stehachse drehbar angebracht ist. Klemme und Feinbewegung entsprechen der schon am Theodolit erläuterten Konstruktion. Die Kippachse des Fernrohrs wird der be-

quemen Ablesung wegen nur von einem Arm getragen, der sich von der Grundplatte des Kompasses erhebt. Eine rechts sichtbare Dosenlibelle dient zum Lotrechtstellen der Stehachse. Da beim Drehen des Instruments im Gegensatz zum Theodolit die Zeiger stehen bleiben und der Limbus sich bewegt, so muß, damit bei rechtsläufiger Drehung die Ablesungen wachsen, die Teilung linksläufig beziffert sein.

Die Bedingungen, die die justierte Bussole zu erfüllen hat, sind zunächst dieselben, die wir beim Theodolit schon kennen gelernt haben. Die Beseitigung des Kollimations- und Kippachsenfehlers kann nach den dort angegebenen Verfahren erfolgen. Für den Kippachsenfehler ist in Fig. 80 keine Justiervorrichtung vorgesehen, doch kann nötigenfalls eine geringe Neigungsänderung der Kippachse durch Unterlegen kleiner Stanniolplättchen unter den Fernrohrträger erzielt werden.

Eine Exzentrizität der Aufhängung der Nadel in bezug auf den Teilungsmittelpunkt spielt dieselbe Rolle wie die Exzentrizität der Alhidade beim Theodolit.

Da der Abstand der beiden Zeiger beim Theodolit nicht genau gleich 180° zu sein braucht, so ist es auch hier nicht notwendig, daß die beiden Nadelenden und der Aufhängepunkt in einer Vertikalebene liegen.

Man sieht, daß auch bei der Bussole durch Ablesen an beiden Nadelenden und durch Messung in beiden Fernrohrlagen die Instrumentalfehler unschädlich gemacht werden.

Nicht erforderlich ist es, daß die Visierebene durch den Nullstrich der Teilung geht, da mit der Bussole Richtungswinkel in bezug auf eine *beliebige* Anfangsrichtung gemessen werden sollen. Indessen ist es, wie später ersichtlich werden wird, bequem, wenn die Visierebene in der ersten Fernrohrlage wenigstens näherungsweise der vorstehenden Forderung entspricht. Die Anfangsrichtung oder Nullrichtung ist diejenige Richtung der Visierebene, bei der das Mittel der beiden Ablesungen 0° beträgt.

Statt der Bussole kann auch der Theodolit zur direkten Messung von Richtungswinkeln benutzt werden, wenn ein *Orientierkompaß* vorhanden ist. Dieser besteht aus einem länglichen Kästchen mit Glasdeckel, in dem eine Magnetnadel wie

beim eigentlichen Kompaß befestigt ist. Statt der Kreisteilung sind an beiden Enden des Kästchens Marken angebracht, auf die man die Enden der Nadel einstellen kann. Das Ganze kann vermittels zweier Füße auf die Kippachse des Theodolits gesetzt werden und erhält dadurch eine unveränderliche Lage in bezug auf die Alhidade des Theodolits. Auch hier ist die Verbindungslinie der Marken näherungsweise der Visierebene parallel und das Nordende der Nadel liegt auf der Objektivseite des Fernrohrs. Die Nullrichtung der hiermit zu messenden Richtungswinkel ist die Richtung der Visierebene bei einspielender Magnetnadel. Wird bei dieser Richtung an den Zeigern der Alhidade abgelesen, so kann man für jede beliebige Einstellung des Fernrohrs den Richtungswinkel unmittelbar angeben.

In der nachstehenden Tabelle sind unter der Bezeichnung *Nord* die Nonienablesungen bei einspielender Magnetnadel angegeben. Aus den Ablesungen bei Einstellung der Ziele *A* und *B* sind in der letzten Spalte die Richtungswinkel in bezug auf die oben angegebene Nullrichtung berechnet.

Ziel	Nonius I	Nonius II	Mittel	Richtungswinkel
	° ′	° ′	° ′	° ′
Nord	335 22	155 22	335 22	0 00
A	186 29	6 29	186 29	211 07
B	267 38	87 38	267 38	292 16

§ 48. Bussolenzüge.

Die Verwendung der Bussole erfolgt ausschließlich zur Aufnahme von Polygonen bzw. Polygonzügen. Die geringe Ablesegenauigkeit im Vergleich zur Theodolitmessung wird zum Teil wieder dadurch ausgeglichen, daß man unmittelbar Richtungswinkel erhält, die bei der Theodolitmessung erst aus den Brechungswinkeln hervorgehen. Die Summierung der Brechungswinkel hat zur Folge, daß jeder Richtungswinkel die Fehler einer ganzen Reihe von Winkelmessungen enthält, während die Bussole die Richtungswinkel unabhängig voneinander angibt.

Bei der Ausführung der Messung kann zur Erhöhung der Genauigkeit der Richtungswinkel jeder Strecke in ihren beiden

Endpunkten gemessen werden. Wird hierauf zugunsten der Geschwindigkeit der Aufnahme verzichtet, so hat man den Vorteil, daß bei der Aufstellung der Bussole je ein Polygonpunkt ausgelassen, die Messung in *Springständen* ausgeführt werden kann. Bezeichnen in Fig. 81 die Pfeillinien die Nullrichtung der Bussole, so werden bei der Aufstellung der letzteren im Punkte 1 die Richtungswinkel (1, 2) und (1, 6) gemessen. Die nächste Aufstellung erfolgt im Punkte 3 usw.

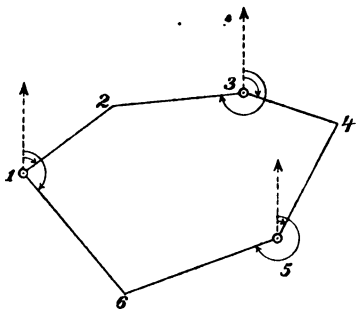


Fig. 81.

Den geringen Änderungen der Deklination im Laufe der Messung trägt man am besten Rechnung, indem man am Schluß der Arbeit die Messung der ersten Aufstellung wiederholt und die sich ergebende Differenz auf alle Richtungswinkel verteilt. Unregelmäßige Schwankungen der Deklination, die mitunter auftreten, werden hierbei natürlich nicht berücksichtigt. Zur Berechnung geschlossener Bussolenzüge kann das Schema des § 42 S. 96 und 97 verwendet werden, jedoch fällt die zweite Spalte, die die Brechungswinkel enthält, weg, da die Richtungswinkel unmittelbar aus der Messung hervorgehen. Auch die Verteilung der Koordinatenabschlußfehler kann man wie in § 42 ausführen.

In derselben Weise kann auch ein *Bussolenzug* zwischen zwei durch ihre Koordinaten bereits gegebene Punkte eingeschaltet werden. Es bedürfen hierbei jedoch die gemessenen Richtungswinkel einer konstanten Verbesserung, da die Nullrichtung nicht mit der positiven Richtung der Abszissenachse des Koordinatensystems zusammenfällt. Diese Korrektion, die *Mißweisung der Visur* kann definiert werden als der Richtungswinkel der Visierebene im Koordinatensystem der gegebenen Punkte bei einspielender bzw. auf Null gestellter Magnetnadel. Zur Bestimmung der Mißweisung wird auf einem gegebenen Punkte der Richtungswinkel nach einem zweiten gegebenen Punkte gemessen. Die Differenz des gemessenen gegen den aus den Koordinaten berechneten Richtungswinkel gibt die Mißweisung, die dann zu allen gemessenen Richtungswinkeln hinzuzufügen

ist. Dadurch, daß man im Anfangspunkt und im Endpunkt die Mißweisung bestimmt, wird auch wieder eine Berücksichtigung der Deklinationsänderung möglich.

Es ist noch die Frage zu entscheiden, ob auch hier das Prinzip der möglichst langen Polygonseiten am Platze ist, das sich bei der Theodolitmessung als das vorteilhafteste erwies.

Bezeichnen wir den mittleren Fehler einer Bussolenmessung mit $\pm \delta$, so gibt eine Strecke $AB = s$, deren Richtungswinkel in A gemessen ist, für den Endpunkt B eine mittlere Querverschiebung (Fig. 82)

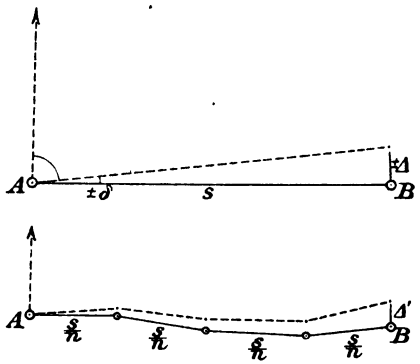


Fig. 82.

$$(1) \qquad \Delta = \pm s\delta .$$

Werden statt der einen Strecke n Strecken von der Länge $\frac{s}{n}$ angenommen, so ist die mittlere Querverschiebung im Endpunkt einer jeden gleich $\pm \frac{s}{n}\delta$, und für die mittlere Querverschiebung des Endpunktes B ist nach der Fehlerhäufungsregel

$$\Delta'^2 = \left(\frac{s^2}{n^2} + \frac{s^2}{n^2} + \cdots\right)\delta^2 = \frac{s^2}{n}\delta^2$$

oder

$$(2) \qquad \Delta' = \pm \frac{s}{\sqrt{n}}\delta .$$

Wird im ersteren Falle die Bussolenmessung n mal wiederholt, so ist der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels

$$(3) \qquad \delta' = \pm \frac{\delta}{\sqrt{n}},$$

mithin wird dann

$$(4) \qquad \Delta = \pm \frac{s}{\sqrt{n}}\delta .$$

Wenn also nach (2) *möglichst kurze* Strecken am günstigsten sind, so lehrt (4), daß man durch Wiederholung der Bussolenmessungen auch bei längeren Strecken dieselbe Genauigkeit er-

langen kann. Auf diese Weise kann man den schädlichen Einfluß längerer Strecken in einem Bussolenzuge aufheben.

Eine eingehendere Untersuchung dieses Gegenstandes auf Grund der Fehlertheorie ist in § 67 ausgeführt.

Hilfsmittel für polygonometrische Berechnungen:

F. G. Gauß, Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Halle a. S.

Th. Albrecht, Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit fünf Decimalstellen. Berlin.

F. G. Gauß, Polygonometrische Tafeln. Halle a. S. 1893.

F. M. Clouth, Tafeln zur Berechnung goniometrischer Koordinaten. 3. Aufl. Halle a. S. 1906.

F. G. Gauß, Fünfstellige vollständige trigonometrische und polygonometrische Tafeln für Maschinenrechnen. Halle a. S. 1901.

7. Kapitel.

Trigonometrische Punktbestimmung.

§ 49. Auswahl der Dreieckspunkte.

Ein einfaches Liniennetz oder ein Polygonnetz wird als Grundlage geometrischer Aufnahmen nur bei geringer Flächenausdehnung genügen. Gerade Linien von mehr als 1 km Länge werden der Geländehindernisse wegen schwer abzustecken und noch schwerer zu messen sein. Aber auch durch ein Polygon wird bei solcher Ausdehnung die gegenseitige Lage entfernter Punkte nicht mehr genau zu bestimmen sein, da die Anhäufung der unvermeidlichen Winkel- und Streckenmessungsfehler die Berechnung der Koordinaten der Polygonpunkte ungünstig beeinflußt. Statt eines geschlossenen Polygons werden deshalb für größere Aufnahmen nur noch Polygonzüge verwendet, deren Endpunkte nach dem Verfahren der *Triangulation* bestimmt werden.

Der Triangulation liegt der Satz zugrunde, daß eine geometrische Figur, die sich aus Dreiecken zusammensetzt, ihrer Gestalt nach bestimmt ist, wenn die Dreieckswinkel bekannt

sind, und ihrer Größe nach, wenn mindestens eine Dreiecksseite gegeben ist. Denken wir uns die Eckpunkte der Dreiecke im Gelände bezeichnet, so genügt die Messung der Horizontalwinkel in den Dreiecken und die Messung einer bequem liegenden Dreiecksseite, der *Grundlinie* oder *Basis*, um die Koordinaten aller Eckpunkte in bezug auf ein beliebiges, z. B. das in Fig. 83 angedeutete System nach einfachen Sätzen der ebenen Trigonometrie zu berechnen. Werden die Dreieckspunkte durch Polygonzüge, diese wieder durch Bindelinien verbunden, so ist selbst bei großer Ausdehnung des Vermessungsgebietes für die Kleinmessung eine sichere einheitliche Grundlage gegeben.

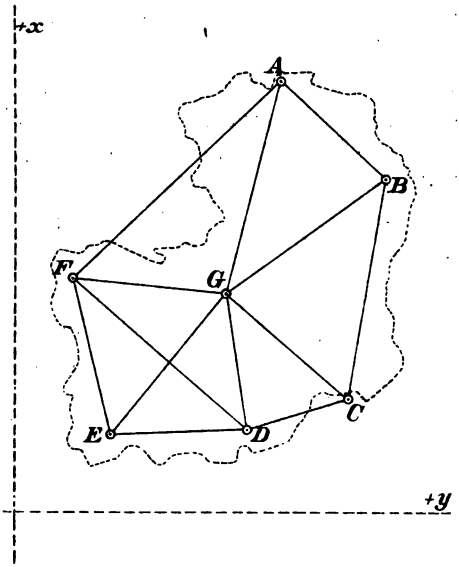


Fig. 83.

Das Prinzip der Triangulation ist von dem Niederländer *Willibrord Snellius* im Jahre 1617 zum erstenmal angewendet worden. Der Vorteil des Verfahrens besteht darin, daß nur wenige Messungen zur Bestimmung des ganzen Dreiecksnetzes erforderlich sind, die, vom Gelände nahezu unabhängig, mit erhöhter Sorgfalt ausgeführt werden können. Die Häufung der zufälligen Messungsfehler wird um so weniger Einfluß haben, je weniger Dreiecke das System bilden, je größer also bei gegebener Ausdehnung des ganzen Netzes die einzelnen Dreiecke sind. Man wird deshalb zunächst die Rücksicht auf den Anschluß der Polygonzüge außer acht lassen und das Gebiet mit wenigen, möglichst großen Dreiecken überspannen, um deren Eckpunkte so genau als möglich bestimmen zu können. Für die Bedürfnisse des Polygonnetzes werden dann nach den *Methoden der trigonometrischen Punkteinschaltung* noch weitere

Punkte ermittelt. Dreiecke mit spitzen Winkeln sind, wie die Fehlertheorie lehrt, für die Punktbestimmung ungünstig und deshalb bei der Triangulation zu vermeiden. Das gleichseitige Dreieck wird in den meisten Fällen als ideale Gestalt geodätischer Dreiecke anzusehen sein.

Die nach sorgfältiger Erkundung des Geländes ausgewählten Dreieckspunkte werden durch Steine mit eingemeißeltem Kreuz oder durch Röhren in ähnlicher Weise wie die Polygonpunkte vermarkt, jedoch fügt man häufig als Versicherung eine unterirdische Vermarkung durch eine Steinplatte mit Kreuz hinzu.

Da gewöhnliche Baken zur Sichtbarmachung der Dreieckspunkte in der Regel nicht ausreichen, so werden hierzu drei- oder vierseitige Holzpyramiden benutzt, die in einer Höhe von 4—5 m über dem Punkt aufgebaut werden (Fig. 84). Die lotrecht stehende Achse der Pyramide bezeichnet den Punkt und muß daher genau mit seiner Vermarkung zusammenfallen. Meistens ist es bequemer, die Pyramide zuerst zu errichten und dann durch Herabloten ihrer Achse den Punkt auf dem Erdboden festzulegen. Häufig können auch Turmspitzen, Blitzableiter auf Schornsteinen, Fahnenstangen auf hohen Gebäuden u. a. als Dreieckspunkte benutzt werden. Erspart man hierbei die künstliche Sichtbarmachung und Vermarkung, so bereitet andererseits die Winkelmessung auf diesen Punkten meistens Schwierigkeiten, mitunter ist sie überhaupt unausführbar.

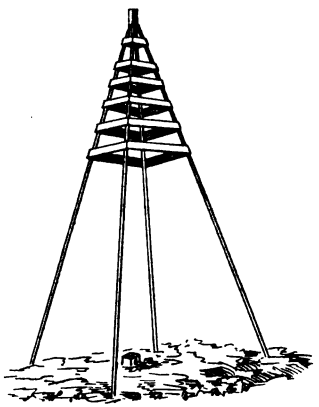


Fig. 84.

§ 50. Basismessung.

Für die Messung der Grundlinien ist ebenes, wenn möglich horizontales Gelände auszuwählen. Ist dieses zwischen zwei Dreieckspunkten nicht zu finden, so muß die Basis durch eine besondere Dreiecksmessung mit einer Seite der Hauptdreiecke verbunden werden. In Fig. 85 sind A und B zwei Dreiecks-

punkte, während C und D die Endpunkte der Basis bezeichnen. Durch Messung der Winkel in den Dreiecken ADC und CDB kann aus der Basis die Dreiecksseite AB berechnet werden. Zugleich kann dieses Verfahren dazu dienen, für die Basis eine kürzere Strecke zu wählen, deren Länge mit um so größerer Genauigkeit meßbar ist.

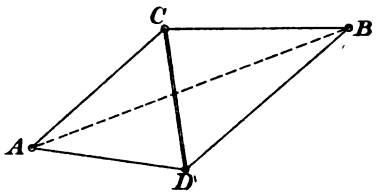


Fig. 85.

Für die Messung selbst werden Meßlatten von Holz oder Stahlmeßbänder bei verfeinerter Anwendung stets genügen. Meßlatten werden besonders dann gute Resultate liefern, wenn ihre Endflächen mit Schneiden, ähnlich denen der Normalmeter, versehen sind, da dann beim Aneinanderlegen der Latten die Berührung nur in einem Punkte stattfindet. Holzlatten verändern sich erfahrungsmäßig nur sehr allmählich infolge Änderung der Luftfeuchtigkeit, es genügt daher, wenn die Latten täglich ein- bis zweimal durch Normalmeter geprüft werden. Um bei der Messung Abweichungen von der Geraden zu vermeiden, ist letztere durch Baken oder Pflöcke in kleinen Abständen zu bezeichnen.

Schwieriger ist die Anwendung des Stahlmeßbandes, dessen Änderungen mit der Temperatur sehr beträchtlich und infolge der Schwierigkeit der Temperaturbestimmung schwer zu ermitteln sind. Nur bei bedecktem Himmel wird das Thermometer die Temperatur des Meßbandes einigermaßen richtig angeben. Auf dem Meßband werden in der Nähe seiner Enden zwei Querstriche als Endmarken gezogen, deren Abstand, vielleicht rund 19 m, mit Normalmetern genau gemessen werden kann. Die Striche auf den Endringen sind für solche genauen Messungen nicht brauchbar.

Die Basisgerade wird durch kleine Pflöcke in nahezu gleiche, von der Meßbandlänge wenig abweichende Teile eingeteilt, wobei die Pflöcke mit dem Theodolit genau eingerichtet werden. Auf den Pflöcken werden die Teilpunkte durch die Kopfmitten kleiner Eisennägel genauer bezeichnet. Zur Messung der einzelnen Abschnitte wird das Meßband an die Pflöcke gelegt (Fig. 86) und straff ausgespannt. Hierauf werden mit Milli-

metermaßstäben die kurzen Abstände z_1 und z_2 der beiden Endmarken des Meßbandes von den Nägeln bis auf 0,5 mm genau gemessen. Nach geringer Verschiebung des Bandes kann die

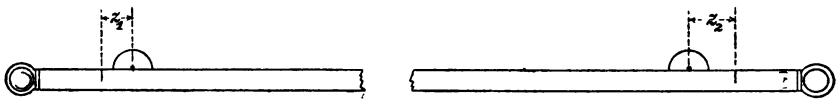


Fig. 86.

Messung beliebig oft wiederholt werden, so daß die Summe beider Abstände bis auf Bruchteile des Millimeters erhalten wird. Es ist selbstverständlich, daß die Pflockköpfe nahezu in gleicher Höhe mit dem Erdboden liegen müssen, damit das Meßband seiner ganzen Länge nach gleichmäßig aufliegt.

Bei beiden Methoden der Basismessung muß das Längenprofil der Basis durch ein Nivellement (§ 88) aufgenommen werden, damit die gemessene Länge wegen der Neigung des Geländes reduziert werden kann. Bezeichnen wir mit s die Länge einer auf dem geneigten Gelände gemessenen Strecke, mit Δh den Höhenunterschied ihrer Endpunkte und mit Δs die Reduktion auf die Horizontale, so ist entsprechend S. 9 und 10

$$s^2 - (s - \Delta s)^2 = \Delta h^2$$

oder

$$\Delta s = \frac{\Delta h^2}{2s - \Delta s}.$$

Da Δs im Nenner vernachlässigt werden kann, so ist

$$\Delta s = \frac{\Delta h^2}{2s}.$$

Wechselt die Geländeneigung innerhalb der Basis, so ist die vorstehende Gleichung auf die einzelnen Teile anzuwenden.

§ 51. Winkelzentrierung.

Die *Winkelmessung* ist bereits S. 87 genügend behandelt worden. Die Anzahl der Wiederholungen auf den einzelnen Stationen richtet sich nach dem Zweck der Aufnahme, der Güte des zur Verfügung stehenden Instruments und nach der verfügbaren Zeit. Im allgemeinen wird das Verfahren der Satzbeobachtungen anzuwenden sein; nur bei großer Nonienangabe

des Theodolits wird man zum Repetierverfahren greifen müssen. Bei einem guten Nonientheodolit genügen für den vorliegenden Zweck 6—8 Richtungssätze bzw. eine entsprechende Anzahl von Repetitionen der einzelnen Winkel. Aus den gemessenen Richtungssätzen ist für die weitere Verwendung das arithmetische Mittel zu bilden. Das Repetitionsverfahren liefert nur je einen Winkel, jedoch können aus den Winkeln vollständige Sätze zusammengestellt werden, wenn die Strahlen einer Station in allen Kombinationen zu Winkeln zusammengefaßt werden. Näheres hierüber bringt der Abschnitt 4 *Ausgleichungsrechnung* § 163.

In denjenigen Fällen, in denen die Aufstellung des Theodolits auf dem Dreieckspunkt nicht möglich ist, wie z. B. auf Turmspitzen, Blitzableitern usw., ist die Winkelmessung auf einer Hilfsstation, einem *exzentrischen Standpunkt* auszuführen, und durch Rechnung auf das Zentrum zu reduzieren. Diese

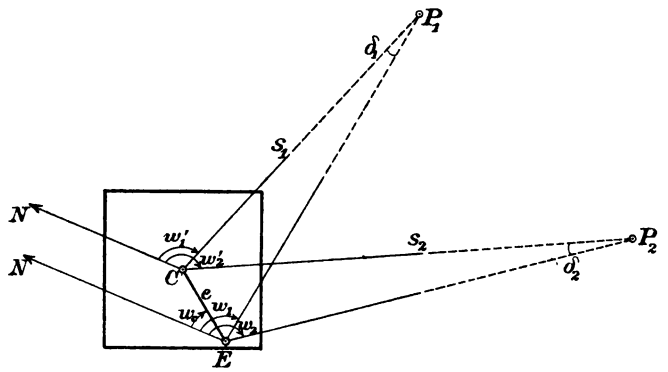


Fig. 87.

Aufgabe stellt Fig. 87 in einfacher Form dar. Als Zentrum C des Dreieckspunktes gelte die Achse einer Fahnenstange auf der Plattform eines Turms, während der Theodolit in E aufgestellt werde. Bezeichnen wir mit EN die *Nullrichtung* des Fernrohrs, d. h. diejenige Stellung der Visierebene, für die die Ablesung Null erhalten wird, so sind w_c, w_1, $w_2 \cdots$ die gemessenen Richtungen nach dem Zentrum und den Dreieckspunkten $P_1 P_2 \cdots$ Wir denken uns nun das Instrument in C mit derselben Nullrichtung aufgestellt und erhalten hiermit die zentrierten Richtungen

$$
\begin{aligned}
w_1' &= w_1 + \delta_1 \\
w_2' &= w_2 + \delta_2 \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Führen wir noch für die lineare Exzentrizität CE und für die Entfernungen CP_1, $CP_2 \cdots$ die Bezeichnungen e bzw. s_1, $s_2 \cdots$ ein, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\delta_1 &= \frac{e}{s_1} \sin (w_1 - w_c) \\
\delta_2 &= \frac{e}{s_2} \sin (w_2 - w_c) \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Die vorstehenden Gleichungen sind unabhängig von der Lage der Punkte P, wie man leicht einsehen kann.

Die beiden Größen e und w_c sind die *Zentrierungselemente* der Station.

Beispiel. In dem Dreiecksnetz Fig. 83 S. 111 wurde der Punkt D durch die Spitze eines Turms bezeichnet, dessen Laterne nicht zugänglich war. Dagegen konnte auf einer den Turm umgebenden Galerie ein Beobachtungsstand D' hergerichtet werden. Die Bestimmung der Zentrierungselemente, die nicht direkt erfolgen konnte, ist S. 118 erläutert. Es wurde gefunden $e = 1{,}474$ m. Die Richtungsmessung auf der exzentrischen Station ergab folgendes Resultat:

Standpunkt D'

Ziel	Richtung w
E	0° 00′ 00″
F	41 43 53
G	81 16 00
C	164 30 03
Zentr. D	279 07 —

Aus einer vorläufigen Dreiecksberechnung erhielt man die Entfernungen

$$
\begin{aligned}
s_e &= 978{,}0 \text{ m} \\
s_f &= 1645{,}0 \text{ m} \\
s_g &= 983{,}5 \text{ m} \\
s_c &= 741{,}9 \text{ m}.
\end{aligned}
$$

Hiermit ist die Zentrierungsberechnung in dem nachstehenden Schema nach (1) und (2) übersichtlich ausgeführt.

Punkt	E	F	G	C	D
w	0° 00′ 00″	41° 43′ 55″	81° 16′ 00″	164° 30′ 03″	279° 07′
$w - w_d$	80° 53′	122° 37′	162° 09′	245° 23′	0° 00′
e	1,474 m	1,474 m	1,474 m	1,474 m	
s	978,0 m	1645,0 m	983,5 m	741,9 m	
$\log \sin (w-w_d)$	9,99448	9,92546	9,48647	$9{,}95862_n$	
$\log e$	0,16850	0,16850	0,16850	0,16850	
$\log {}^1/_s$	7,00966	6,78383	7,00723	7,12965	
$\log \sin \delta$	7,17264	6,87779	6,66220	$7{,}25677_n$	
δ	+ 0° 05′ 07″	+ 0° 02′ 36″	+ 0° 01′ 35″	− 0° 06′ 13″	
$\delta - \delta_e$	0° 00′ 00″	− 0° 02′ 31″	− 0° 03′ 32″	− 0° 11′ 20″	
w'	0° 00′ 00″	41° 41′ 22″	81° 12′ 28″	164° 18′ 43″	

Da eine gleichmäßige Veränderung aller Richtungen zulässig ist, so sind in der vorletzten Zeile die Differenzen $\delta - \delta_e$ gebildet, um für die Anfangsrichtung nach E auch nach der Reduktion den Wert 0° 00′ 00″ zu behalten.

§ 52. Indirekte Bestimmung der Zentrierungselemente.

Das vorstehende Beispiel lehrt, daß die unmittelbare Messung der Zentrierungselemente e und w_c nicht immer möglich sein wird. In solchen Fällen sind besondere Hilfsmessungen auszuführen. Zur Bestimmung von e in Fig. 88 wird eine Hilfsbasis I—II abgesteckt, und außer ihrer Länge werden die Winkel α, α' und β, β' in je zwei Richtungssätzen gemessen, so daß durch Auflösung der Dreiecke e und der Winkel φ berechnet werden können. Um auch das zweite Zentrierungselement zu erhalten, ist bei den Richtungsmessungen auf dem exzentrischen Standpunkt der Punkt II mitzunehmen. Werden die Richtungen wieder mit w bezeichnet, so ist das gesuchte Zentrierungselement

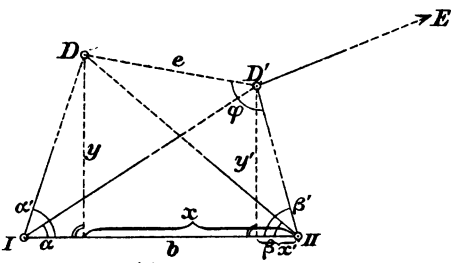


Fig. 88.

$$w_c = w_{II} + \varphi .$$

In Fig. 88 ist das Zentrum dem Zahlenbeispiel entsprechend mit D bezeichnet, während in der vorstehenden Formel die allgemeine Bezeichnung C beibehalten ist.

Da bei den vorstehenden Winkelmessungen stets sehr steile Visuren auftreten werden, so ist zur Vermeidung der Projektionsfehler der Lotrechtstellung der Stehachse besondere Sorgfalt zu widmen.

Als *Beispiel* diene die Bestimmung der Zentrierungselemente für die auf S. 117 ausgeführte Zentrierung der Richtungsmessungen auf dem Dreieckspunkte D. Es wurde gemessen $I—II = 92{,}36$ m, ferner wurden in den drei Punkten I, II und D' Richtungsmessungen ausgeführt mit folgendem Resultat:

Standpunkt I		Standpunkt II		Standpunkt D'	
Ziel	Richtung	Ziel	Richtung	Ziel	Richtung
D	0° 00′ 00″	I	0° 00′ 00″	E	0° 00′ 00″
D'	0 56 36	D	48 16 35	II	149 58 40
II	79 19 48	D'	48 50 57	I	202 44 35

Für die Dreiecke $IIID$ und $IIID'$ ergeben sich folgende, im letzteren auf 180° abgestimmte Winkel

$$\alpha = 79^\circ\ 19'\ 48'' \qquad \alpha' = 78^\circ\ 23'\ 11''$$
$$\beta = 48\ \ 16\ \ 35 \qquad \beta' = 48\ \ 50\ \ 56$$
$$\gamma = 52\ \ 23\ \ 37 \qquad \gamma' = 52\ \ 45\ \ 53.$$

Löst man die beiden Dreiecke auf und berechnet die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte D und D' in bezug auf $II—I$ als Abszissenachse mit II als Nullpunkt, so wird

$$y = +\ 85{,}509 \text{ m} \qquad y' = +\ 85{,}561 \text{ m}$$
$$x = +\ 76{,}249 \text{ m} \qquad x' = +\ 74{,}776 \text{ m}.$$

Hiermit findet man

$$y - y' = -\ 0{,}052 \text{ m}$$
$$x - x' = +\ 1{,}473 \text{ m}$$

und $e = 1{,}474$ m.

Aus den Koordinaten berechnen wir noch bis auf Minuten genau den Richtungswinkel

$$(D', D) = 357^\circ\ 59'$$

und da

$$(D',II) = 228^0\ 51',$$

so ist $\varphi = 129^0\ 08'$.

Hieraus und aus den Richtungsmessungen auf D' erhält man schließlich

$$\sphericalangle ED'D = 279^0\ 07',$$

welcher Winkel unter der Bezeichnung w_d bei der Zentrierungsberechnung auf S. 117 benutzt wurde.

§ 53. Zentrierung der Zielpunkte.

Eine weitere Verbesserung der beobachteten Richtungen wird durch die fehlerhafte Sichtbarmachung der Zielpunkte erforderlich. Ist z. B. auf dem Zielpunkt eine Pyramide aufgestellt, so wird deren Achse trotz aller Sorgfalt nie genau mit dem Dreieckspunkt zusammenfallen. In anderen Fällen werden Hindernisse die Annahme eines exzentrischen Zielpunktes bedingen. Die Zentrierungselemente sind dieselben wie bei der exzentrischen Aufstellung des Theodolits, ihre Bestimmung wird wie dort teils auf direktem, teils auf indirektem Wege erfolgen müssen.

Bei Pyramiden ist die Achse mit Hilfe des in geringer Entfernung aufgestellten Theodolits herabzuloten und auf dem Boden zu bezeichnen, worauf die Zentrierungselemente unmittelbar gemessen werden können.

Für die Reduktion der nach dem exzentrischen Zielpunkte Z' gemessenen Richtungen auf das Zentrum wird eine graphische Konstruktion zu Hilfe genommen. Mit dem Transporteur werden alle Visuren gezeichnet und auch die Größe e in großem Maßstabe, etwa 1:10 in der richtigen Richtung abgetragen (Fig. 89). Es lassen sich dann die senkrechten Abstände e_1, $e_2 \cdots$ des eigentlichen Zielpunktes Z von den Visierlinien abgreifen und die Verbesserungen der gemessenen Richtungen sind nach Fig. 89

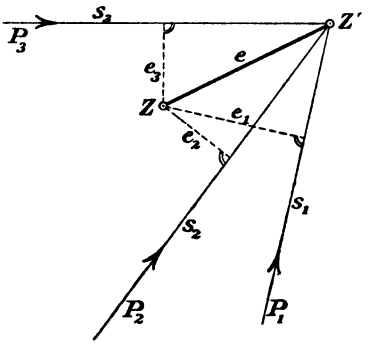


Fig. 89.

$$v_1 = -\frac{e_1}{s_1}\varrho'' \quad v_2 = -\frac{e_2}{s_2}\varrho'' \quad v_3 = +\frac{e_3}{s_3}\varrho'' \text{ usw.},$$

wobei s_1, $s_2 \cdots$ die Entfernungen bezeichnen.

Erreicht e einen größeren Wert, so müssen die v durch Rechnung, ähnlich der auf S. 117, ermittelt werden.

§ 54. Auflösung der Dreiecke.

Bevor die zentrierten Richtungssätze zur Berechnung der Dreiecke verwendet werden können, sind sie noch einer Ausgleichung zu unterwerfen, da infolge der unvermeidlichen Messungsfehler die geometrischen Bedingungen des Dreiecksnetzes nicht erfüllt sein werden. Die Ausgleichung erfolgt nach den Grundsätzen der Methode der kleinsten Quadrate und wird im 19. Kapitel im Zusammenhange behandelt werden. Dort findet sich auch die Berechnung für das Dreiecksnetz von S. 111 vollständig durchgeführt. Wir entnehmen als Resultat der Ausgleichung aus § 160 die ausgeglichenen Richtungen:

Standpunkt *A*		Standpunkt *B*		Standpunkt *C*		Standpunkt *G*	
Ziel	Richtung	Ziel	Richtung	Ziel	Richtung	Ziel	Richtung
	° ′ ″		° ′ ″		° ′ ″		° ′ ″
B	0 00 00,0	*C*	0 00 00,0	*D*	0 00 00,0	*A*	0 00 00,0
G	62 19 00,1	*G*	44 24 31,0	*G*	57 25 35,7	*B*	39 04 18,0
F	93 48 34,6	*A*	123 01 13,1	*B*	116 16 45,1	*C*	115 48 37,6
						D	155 16 48,6
						E	204 29 20,3
						F	260 32 21,4

Standpunkt *D*		Standpunkt *E*		Standpunkt *F*	
Ziel	Richtung	Ziel	Richtung	Ziel	Richtung
	° ′ ″		° ′ ″		° ′ ″
E	0 00 00,0	*F*	0 00 00,0	*A*	0 00 00,0
F	41 41 24,3	*G*	53 18 39,3	*G*	49 02 47,0
G	81 12 29,0	*D*	102 53 38,5	*D*	84 16 09,3
C	164 18 42,4			*E*	119 41 06,5

Der nächste Schritt in der Bearbeitung des Dreiecksnetzes ist die Berechnung der Dreiecksseiten nach dem Sinussatz der ebenen Trigonometrie. Auch hier empfiehlt sich die Anwendung eines übersichtlichen Rechenschemas, in dem die Berechnung leicht geprüft werden kann. Soweit die Resultate sich nicht gegenseitig kontrollieren, ist eine zweite unabhängige Berechnung

erforderlich, für die mit Vorteil die Rechenmaschine mit einer trigonometrischen Tafel benutzt wird.

In der nachstehenden Tabelle ist die einmalige Auflösung aller Dreiecke ausgeführt. Die Winkel, die in den einzelnen Dreiecken nach ihren Scheiteln bezeichnet sind, wurden als Differenzen der ausgeglichenen Richtungen gebildet, ferner war aus der Basismessung die Seite $CD = 741{,}873$ m bekannt.

1. $\triangle$: CDG			log CD	2,870330
	°	′ ″		
G	39	28 11,0	log¹/sin G	0,196768
C	57	25 35,7	log sin C	9,925674
D	83	06 13,4	log sin D	9,996847
			log GD	2,992772
			log GC	3,063945

2. $\triangle$: DGE			log DG	2,992772
	°	′ ″		
E	49	34 59,2	log¹/sin E	0,118417
D	81	12 29,0	log sin D	9,994867
G	49	12 31,7	log sin G	9,879151
			log GE	3,106056
			log DE	2,990340

3. $\triangle$: GEF			log GE	3,106056
	°	′ ″		
F	70	38 19,5	log¹/sin F	0,025282
G	56	03 01,1	log sin G	9,918832
E	53	18 39,3	log sin E	9,904115
			log EF	3,050170
			log GF	3,035453

4. $\triangle$: GFD			log FG	3,035453
	°	′ ″		
D	39	31 04,7	log¹/sin D	0,196324
F	35	13 22,3	log sin F	9,760994
G	105	15 32,8	log sin G	9,984413
			log GD	2,992771
			log FD	3,216190

5. $\triangle$: FGA			log FG	3,035453
	°	′ ″		
A	31	29 34,5	log¹/sin A	0,282003
F	49	02 47,0	log sin F	9,878085
G	99	27 38,6	log sin G	9,994053
			log AG	3,195541
			log AF	3,311509

6. $\triangle$: ABG			log AG	3,195541
	°	′ ″		
B	78	36 42,1	log¹/sin B	0,008636
A	62	19 00,1	log sin A	9,947203
G	39	04 18,0	log sin G	9,799542
			log BG	3,151380
			log BA	3,003719

7. $\triangle$: GBC			log BG	3,151380
	°	′ ″		
C	58	51 09,4	log¹/sin C	0,067608
G	76	44 19,6	log sin G	9,988262
B	44	24 31,0	log sin B	9,844956
			log CB	3,207250
			log CG	3,063944

Durch die Berechnung des vierten und des siebenten Dreiecks werden, wie man sieht, die vorhergehenden Berechnungen bereits zum Teil geprüft.

§ 55. Abrisse und Koordinatenberechnung.

Das Koordinatensystem kann zwar willkürlich angenommen werden, doch ist es bei Dreiecksnetzen üblich, die positive Richtung der Abszissenachse in die Nordrichtung zu legen. Wenn astronomische Messungen nicht vorliegen, so kann die Magnetnadel unter Berücksichtigung der Deklination zur Orientierung des Netzes benutzt werden. Der Nullpunkt wird häufig so angenommen, daß alle Abszissen und Ordinaten der Dreieckspunkte positiv werden. Die Koordinatenberechnung ist bereits in § 41 genügend erläutert worden. Auch in Dreiecksnetzen wird man der Rechenproben wegen geschlossene Polygone oder Polygonzüge mit gegebenem Anfangs- und Endpunkt durchrechnen. In dem vorliegenden Beispiel ist aus astronomischen Messungen der Richtungswinkel der Dreiecksseite DC bekannt, es ist $(D, C) = 72^0\ 51'\ 12{,}8''$. Um die Richtungswinkel aller Dreiecksseiten zu erhalten, ist für jeden Punkt ein *Abriß* aufzustellen. Im nachstehenden sind die Abrisse für vier Punkte gegeben, aus denen jedoch alle Richtungswinkel hervorgehen, die Abrisse der übrigen Stationen würden als Rechenproben zu verwerten sein.

In die zweite Spalte wird zunächst der gegebene Richtungswinkel eingetragen und durch Unterstreichen kenntlich gemacht; die dritte Spalte enthält die ausgeglichenen Richtungen w von S. 120, in der vierten Spalte wird aus dem gegebenen Richtungswinkel und der entsprechenden Richtung die *Orientierungskonstante* $\varphi - w$ gebildet. Diese gibt zu den übrigen Richtungen addiert die Richtungswinkel, die in die zweite Spalte eingetragen werden. Die letzte Spalte enthält die Logarithmen der Entfernungen, entnommen von S. 121.

Dreieckspunkt *D*.

P	φ	w	$\varphi - w$	log s
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	
E	268 32 20,4	0 00 00,0		2,990340
F	310 13 44,7	41 41 24,3		3,216190
G	349 44 49,4	81 12 29,0		2,992772
C	72 51 02,8	164 18 42,4	268 32 20,4	2,870330

Dreieckspunkt *G*.

P	φ	*w*	$\varphi - w$	log *s*
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	
A	14 28 00,8	0 00 00,0		3,195541
B	53 32 18,8	39 04 18,0		3,151380
C	130 16 38,4	115 48 37,6		3,063945
D	169 44 49,4	155 16 48,6	14 28 00,8	2,992772
E	218 57 21,1	204 29 20,3		3,106056
F	275 00 22,2	260 32 21,4		3,035453

Dreieckspunkt *B*.

P	φ	*w*	$\varphi - w$	log *s*
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	
C	189 07 47,8	0 00 00,0		3,207250
G	233 32 18,8	44 24 31,0	189 07 47,8	3,151380
A	312 09 00,9	123 01 13,1		3,003719

Dreieckspunkt *F*.

P	φ	*w*	$\varphi - w$	log *s*
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	
A	45 57 35,2	0 00 00,0		3,311509
G	95 00 22,2	49 02 47,0	45 57 35,2	3,035453
D	130 13 44,5	84 16 09,3		3,216190
E	165 38 41,7	119 41 06,5		3,050170

Für den Punkt *G* wurden die Koordinaten $y = +\,10000{,}000$ m, $x = +\,10000{,}000$ m angenommen. Die Koordinatenberechnung erfolgte hierauf mit sechsstelligen Logarithmen nach dem Schema von S. 96/97, in dem jedoch die Spalten: Brechungswinkel, Entfernung, $s \sin \varphi$ und $s \cos \varphi$ wegfallen konnten. Es wurde zunächst das geschlossene Polygon *GABCDG* berechnet, und hierauf der Zug *DEFA* an die beiden Punkte *D* und *A* angeschlossen.

Als Resultat der Triangulation sind nachstehend die Koordinaten der Dreieckspunkte zusammengestellt worden:

P	*y*	*x*
A	+ 10391,896	+ 11518,965
B	+ 11139,660	+ 10842,117
C	+ 10883,945	+ 9250,960
D	+ 10175,056	+ 9032,210
E	+ 9197,372	+ 9007,274
F	+ 8919,081	+ 10094,684
G	+ 10000,000	+ 10000,000

§ 56. Das Vorwärtsabschneiden.

Die Punkte des Dreiecksnetzes werden, da die Dreiecke so groß als möglich gewählt werden sollen, für den Anschluß des Polygonnetzes nicht ausreichen. Die Bestimmung weiterer Punkte erfolgt durch *trigonometrische Einschaltung.*

Das Vorwärtsabschneiden. Sind in Fig. 90 die Richtungswinkel $\varphi_a = (A, P)$ und $\varphi_b = (B, P)$ von den beiden gegebenen Punkten A und B nach einem Neupunkt P bekannt, so ist die Lage des Punktes P bestimmt. Zur Ermittlung der beiden Richtungswinkel werden auf den Festpunkten A und B Richtungsmessungen nach einem oder mehreren Festpunkten und nach dem Neupunkt ausgeführt, und aus den Koordinaten für alle nach Festpunkten gemessenen Richtungen die Richtungswinkel, außerdem noch die Entfernung AB nach (1) und (4) § 43 S. 98/99 berechnet. Hierauf werden zwei Abrisse für die Punkte A und B aufgestellt, aus denen sich die Richtungswinkel (A, P) und (B, P) ergeben. Das unten stehende Beispiel wird diese Berechnung näher erläutern.

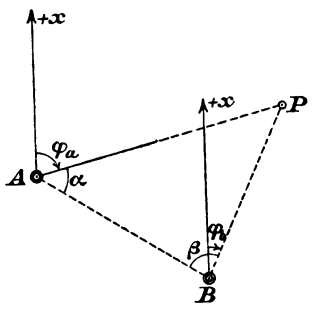


Fig. 90.

Zur Auflösung des Dreiecks ABP sind noch die Winkel

$$(1) \qquad \alpha = (A, B) - (A, P) \quad \text{und} \quad \beta = (B, P) - (B, A)$$

zu ermitteln. Alsdann erhält man

$$(2) \qquad AP = AB \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \qquad BP = AB \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$$

und nach S. 93 wird

$$(3) \quad \begin{aligned} y_p &= y_a + AP \sin (A,P) \\ x_p &= x_a + AP \cos (A,P) \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} y_p &= y_b + BP \sin (B,P) \\ x_p &= x_b + BP \cos (B,P), \end{aligned}$$

womit die Berechnung geprüft ist.

Beispiel: Zur Bestimmung des Punktes H (Fig. 91) wurden auf den Punkten E und F des Dreiecksnetzes von S. 111 die folgenden Richtungen gemessen:

Standpunkt *E*.

Ziel: *F* 0° 00′ 00″
H 33 47 15
D 102 53 30

Standpunkt *F*.

Ziel: *A* 0° 00′ 00″
G 49 02 45
D 84 16 00
H 88 12 30
E 119 41 30.

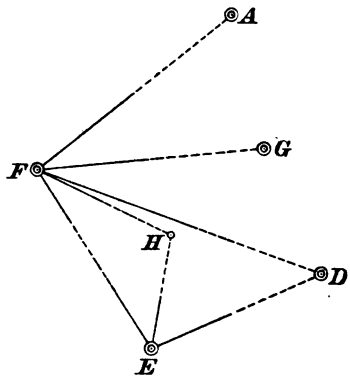


Fig. 91.

Die Berechnung der Richtungswinkel und der Entfernung *EF* ist in diesem Falle nicht erforderlich, da die Abrisse S. 122/123 alles Notwendige enthalten. Aus ihnen entnehmen wir für die beiden nachstehenden Abrisse die unterstrichenen Richtungswinkel φ.

Standpunkt *E*.

P	φ	w	$\varphi - w$
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
F	345 38 42	0 00 00	345 38 42
H	19 26 01	33 47 15	
D	88 32 20	102 53 20	345 38 50

$$\frac{[\varphi - w]}{2} = 345^\circ\ 38'\ 46''$$

Standpunkt *F*.

P	φ	w	$\varphi - w$
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
A	45 57 35	0 00 00	45 57 35
G	95 00 22	49 02 45	45 57 37
D	130 13 44	84 16 00	45 57 44
H	134 10 02	88 12 30	
E	165 38 42	119 41 30	45 57 12

$$\frac{[\varphi - w]}{4} = 45^\circ\ 57'\ 32''.$$

Da für die Orientierungskonstante $\varphi - w$ zwei bzw. vier Werte gefunden werden, so sind hieraus Mittelwerte zu bilden,

mit denen (E, H) und (F, H) berechnet werden. Endlich entnehmen wir noch von S. 123 $\log EF = 3{,}050170$, und können nun die folgende Berechnung ausführen:

$(E,H) = 19^0\ 26'\ 01''$	$(F,E) = 165^0\ 38'\ 42''$
$(E,F) = 345\ 38\ 42$	$(F,H) = 134\ 10\ 02$
$\alpha = 33\ 47\ 19$	$\beta = 31\ 28\ 40$

$$\alpha + \beta = 65^0\ 15'\ 59''$$

$\log EF = 3{,}050170$	$\log EF = 3{,}050170$
$\log^1/\sin(\alpha+\beta) = 0{,}041788$	$\log^1/\sin(\alpha+\beta) = 0{,}041788$
$\log \sin\beta = 9{,}717810$	$\log \sin\alpha = 9{,}745177$
$\log EH = 2{,}809768$	$\log FH = 2{,}837135$
$\log \sin(E,H) = 9{,}522072$	$\log \cos(E,H) = 9{,}974524$
$\log EH = 2{,}809768$	$\log EH = 2{,}809768$
$\log EH \sin(E,H) = 2{,}331840$	$\log EH \cos(E,H) = 2{,}784292$
$EH \sin(E,H) = +\ 214{,}704$	$EH \cos(E,H) = +\ 608{,}544$
$y_e = +\ 9197{,}372$	$x_e = +\ 9007{,}274$
$y_h = +\ 9412{,}076$	$x_h = +\ 9615{,}818$
$\log \sin(F,H) = 9{,}855707$	$\log \cos(F,H) = 9{,}843080_n$
$\log FH = 2{,}837135$	$\log FH = 2{,}837135$
$\log FH \sin(F,H) = 2{,}692842$	$\log FH \cos(F,H) = 2{,}680215_n$
$FH \sin(F,H) = +\ 492{,}994$	$FH \cos(F,H) = -\ 478{,}867$
$y_f = +\ 8919{,}081$	$x_f = +\ 10094{,}684$
$y_h = +\ 9412{,}075$	$x_h = +\ 9615{,}817.$

Es sind demnach die Koordinaten des Punktes H

$$y = +\ 9412{,}075\ \text{m} \qquad x = +\ 9615{,}817\ \text{m}.$$

§ 57. Die Genauigkeit des Vorwärtsabschneidens.

Unter der Annahme, daß der mittlere Fehler der Winkelmessung bekannt ist, können wir den mittleren Fehler des Neupunktes ermitteln. Wir beschränken uns dabei jedoch auf den einfachen Fall, daß auf den beiden Festpunkten außer der Richtung nach dem Neupunkt nur noch eine Richtung nach einem Festpunkt, also auf jedem Punkt nur ein Winkel ge-

messen ist. Bezeichnen wir die beiden Winkel mit l_1 und l_2, so ist (Fig. 90)

$$d(A,P) = dl_1 \qquad d(B,P) = dl_2.$$

Ferner ergibt die Differentiation von (1), (2) und (3) § 56 S. 124

$$d\alpha = -dl_1 \qquad d\beta = dl_2,$$

$$dAP = AB\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\beta - \sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}dl_2 + AB\frac{\sin\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}\cos(\alpha+\beta)\,dl_1$$

$$= AB\frac{\sin\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)}dl_2 + AB\frac{\sin\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}\cos(\alpha+\beta)\,dl_1,$$

und

$$dy = \sin(A,P)\,dAP + AP\cos(A,P)\,dl_1$$

$$= AB\frac{\sin(A,P)\sin\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)}dl_2 + \left(AB\frac{\sin(A,P)\cos(\alpha+\beta)\sin\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} + AP\cos(A,P)\right)dl_1.$$

Ebenso wird

$$dx = \cos(A,P)\,dAP - AP\sin(A,P)\,dl_1$$

$$= AB\frac{\cos(A,P)\sin\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)}dl_2 + \left(AB\frac{\cos(A,P)\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)} - AP\sin(A,P)\right)dl_1.$$

In einfacher Bezeichnung ist also

$$dy = a\,dl_2 + b\,dl_1$$
$$dx = c\,dl_2 + d\,dl_1.$$

Nehmen wir an, daß l_1 und l_2 mit derselben Genauigkeit gemessen sind, und ist μ der mittlere Fehler dieser Messungen, so ist nach (3) § 10 S. 26 und (2) § 15 S. 37

$$M^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\,\mu^2.$$

Nach Einsetzen der Werte für die Koeffizienten a, b, c und d erhält man

$$M^2 = \left(\overline{AB}^2\frac{\sin^2\alpha}{\sin^4(\alpha+\beta)} + \overline{AB}^2\frac{\sin^2\beta\cos^2(\alpha+\beta)}{\sin^4(\alpha+\beta)} + \overline{AP}^2\right)\mu^2.$$

Da $AP = AB\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ ist, so finden wir nach geringer Reduktion, indem wir zugleich μ in Bogensekunden einführen

$$M^2 = \overline{AB}^2 \frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}{\sin^4(\alpha+\beta)} \frac{\mu^2}{\varrho''^2},$$

wofür wir auch setzen können

$$M^2 = \frac{\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2}{\sin^2(\alpha+\beta)} \frac{\mu^2}{\varrho''^2}. \tag{1}$$

Indem wir diese Gleichung auf das S. 124—126 berechnete Beispiel anwenden, nehmen wir der Einfachheit wegen an, es sei auf E und F nur je ein Winkel mit dem mittleren Fehler $\mu = \pm 20''$ gemessen worden.

Nach S. 126 ist

$$EH = 645{,}3 \text{ m}$$
$$FH = 687{,}3 \text{ m}$$
$$\alpha + \beta = 65^0\ 16'.$$

Hiermit gibt die Gl. (1)

$$M = \pm 0{,}101 \text{ m}.$$

§ 58. Das Seitwärtsabschneiden.

Die Punktbestimmung durch Seitwärtsabschneiden erfordert ebenfalls zwei Festpunkte A und B; die Winkelmessung findet jedoch nur auf einem derselben z. B. A und auf dem Neupunkt P statt. Auf letzterem ist nur ein Winkel γ (Fig. 92) zu messen, während auf ersterem Richtungen wie beim Vorwärtsabschneiden gemessen werden. Auch die Berechnung schließt sich eng an die der vorigen Methode an. Mit Hilfe eines Abrisses ermittelt man den Richtungswinkel (A, P), und da

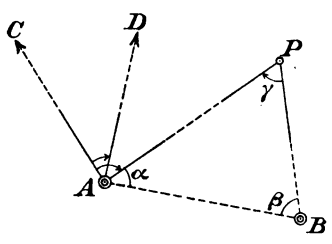


Fig. 92.

$$(P, A) = (A, P) \pm 180^0$$

ist, so ist auch

$$(B, P) = (P, B) \pm 180^0 = (A, P) - \gamma. \tag{1}$$

Aus den Koordinaten von A und B bzw. aus den Abrissen der Haupttriangulation ist noch der Richtungswinkel (A, B) und die Entfernung AB bekannt, so daß wie vorher der Winkel α und die Entfernungen AP und BP berechnet werden können.

Es ist

$$(2) \qquad \alpha = (A,B) - (A,P) \qquad \beta = (B,P) - (B,A)$$

$$(3) \qquad AP = AB\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma} \qquad BP = AB\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Endlich ist

$$(4) \quad \begin{matrix} y_p = y_a + AP\sin(A,P) \\ x_p = x_a + AP\cos(A,P) \end{matrix} \text{ und } \begin{matrix} y_p = y_b + BP\sin(B,P) \\ x_p = x_b + BP\cos(B,P). \end{matrix}$$

Um eine ähnliche Genauigkeitsuntersuchung ausführen zu können, wie in § 57, nehmen wir wieder den einfachsten Fall an, in dem auf A und P nur je ein Winkel l_1 und l_3 gemessen ist. Der mittlere Fehler der Winkelmessung sei μ. Durch Differentiation der Gl. (1)—(4) finden wir

$$(5) \quad \begin{aligned} d(B,P) &= dl_1 - dl_3 \\ d\ BP\ &= AB\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}dl_1 - AB\frac{\sin\alpha}{\sin^2\gamma}\cos\gamma\, dl_3 \end{aligned}$$

und

$$(6) \quad \begin{aligned} dy &= \sin(B,P)\, d\,BP + BP\cos(B,P)\, d(B,P) \\ dx &= \cos(B,P)\, d\,BP - BP\sin(B,P)\, d(B,P). \end{aligned}$$

Wird (5) in (6) eingesetzt, so erhalten wir

$$dy = \left\{AB\sin(B,P)\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma} + BP\cos(B,P)\right\}dl_1 - \left\{AB\sin(B,P)\frac{\sin\alpha}{\sin^2\gamma}\cos\gamma + BP\cos(B,P)\right\}dl_3$$

$$dx = \left\{AB\cos(B,P)\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma} - BP\sin(B,P)\right\}dl_1 - \left\{AB\cos(B,P)\frac{\sin\alpha}{\sin^2\gamma}\cos\gamma - BP\sin(B,P)\right\}dl_3.$$

Nach der Fehlerhäufungsregel ist dann entsprechend dem Vorgang auf S. 127

$$(7) \qquad M^2 = \left\{\overline{AB}^2\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\gamma} + \overline{AB}^2\frac{\sin^2\alpha}{\sin^4\gamma}\cos^2\gamma + 2\,\overline{BP}^2\right\}\mu^2.$$

Führen wir

$$BP = AB\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

ein, so geht (7) über in

$$M^2 = \left\{\overline{AB}^2\frac{1}{\sin^2\gamma} + \overline{AB}^2\frac{\sin^2\alpha}{\sin^4\gamma}\cos^2\gamma + \overline{AB}^2\frac{\sin^2\alpha}{\sin^4\gamma}\sin^2\gamma\right\}\mu^2$$

oder

$$M^2 = \left\{ \overline{AB}^2 \frac{1}{\sin^2 \gamma} + \overline{AB}^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^4 \gamma} \right\} \mu^2.$$

Das zweite Glied des Klammerausdrucks ist aber gleich $\frac{\overline{BP}^2}{\sin^2 \gamma}$, also ist

$$M^2 = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BP}^2}{\sin^2 \gamma} \mu^2. \tag{8}$$

Wir ziehen zum Vergleich noch einmal die Gl. (1) von S. 128 heran, und haben somit für

$$\text{Vorwärtsabschneiden } M^2 = \frac{\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2}{\sin^2 \gamma} \mu^2,$$

$$\text{Seitwärtsabschneiden } M^2 = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BP}^2}{\sin^2 \gamma} \mu^2,$$

wobei in der ersten Formel $\sin(\alpha + \beta)$ durch $\sin \gamma$ ersetzt ist. Die beiden Ausdrücke unterscheiden sich lediglich durch das erste Glied des Zählers. Man sieht hieraus, daß die Methode des Vorwärtsabschneidens nur dann genauer ist, wenn $AB > AP$ ist, während im andern Falle die Methode des Seitwärtsabschneidens vorzuziehen ist.

Die vorstehenden einfachen Fehlerformeln sind zuerst von *Jordan* im Jahre 1871 aufgestellt worden. Die ersten Untersuchungen über die Genauigkeit der Punktbestimmung rühren von *Bravais* (1846) her; unabhängig von diesen und späteren Arbeiten ist von *Andrae* (1858) und *Helmert* (1868) der Gegenstand eingehend behandelt und für spezielle geodätische Aufgaben nutzbar gemacht worden.

§ 59. Das Rückwärtseinschneiden (Lösung von Collins).

Sind drei Festpunkte A, B und C gegeben und werden auf einem Neupunkte P die beiden Winkel α und β (Fig. 93) gemessen, so ist die Lage des Punktes P bestimmt. Diese Aufgabe führt mit Unrecht den Namen *Pothenots Problem*; sie war schon *Hipparch* bekannt und wurde geodätisch von *Snellius* im Jahre 1617 zum erstenmal angewendet und auch numerisch gelöst. Diese Lösung schließt sich an die nächstliegende geometrische Konstruktion an; *Pothenot* hat dieselbe

Lösung im Jahre 1692 erneuert. Mit Hilfe der gemessenen Winkel α und β (Fig. 93) kann man zwei Kreise konstruieren, die diese Winkel als Peripheriewinkel enthalten und durch die Punkte A und C bzw. C und B gehen; der Schnittpunkt beider Kreise ist der gesuchte Punkt P. Es zeigt sich, daß die Lösung unbestimmt wird, wenn alle vier Punkte auf einem Kreise, dem *gefährlichen Kreise* liegen.

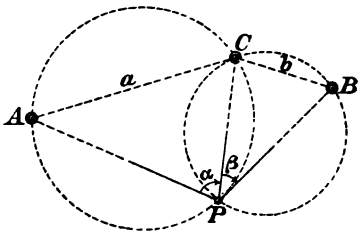


Fig. 93.

Eine zweite Konstruktion, die von *Collins* (1671) gegeben wurde, benutzt einen Hilfspunkt Q (Fig. 94), den Schnittpunkt der Linie PC mit einem um A, B und P beschriebenen Kreise. Man sieht, daß die beiden gemessenen Winkel α und β auch bei A und B auftreten, und daß man demnach von AB ausgehend den Punkt Q konstruieren kann. Ist Q gefunden, so gibt die Gerade QC bereits einen geometrischen Ort für den Punkt P, der dann mit Hilfe eines der beiden Winkel α oder β gefunden werden kann.

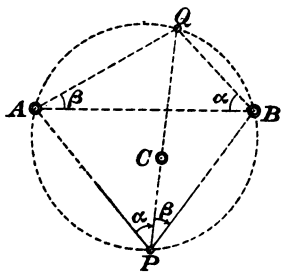


Fig. 94.

Diese Konstruktion kann auch trigonometrisch verfolgt werden, und führt zu einer einfachen numerischen Lösung der Aufgabe. Nach Auflösung des Dreiecks ABQ berechnet man die Koordinaten von Q und aus diesen und den Koordinaten von C den Richtungswinkel (Q, C). Dieser ist aber mit dem Richtungswinkel (C, P) identisch, und es ist die Aufgabe nun auf die des Seitwärtsabschneidens zurückgeführt.

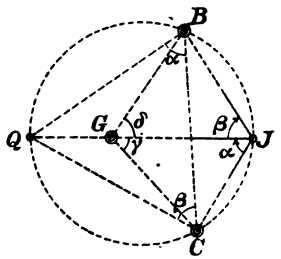


Fig. 95.

Beispiel: In dem Dreiecksnetz S. 111 ist ein Punkt J durch Rückwärtseinschneiden nach den drei Punkten C, G und B (Fig. 95) bestimmt worden. Es wurden die Winkel $CJG = \alpha$ und $GJB = \beta$ mit folgendem Resultat gemessen

$$\alpha = 73^0\ 24'\ 38''$$
$$\beta = 94\ \ 49\ \ 16\ .$$

Aus den Abrissen von S. 123 entnehmen wir

$(B, C) = 189^0\ 07'\ 48''$	$\log BC = 3{,}207250$
$(G, B) = 53\ \ 32\ \ 19$	$\log GB = 3{,}151380$
$(G, C) = 130\ \ 16\ \ 38$	$\log GC = 3{,}063945\ .$

Zur Auflösung des Dreiecks CBQ und zur Bestimmung der Koordinaten des Punktes Q ergibt sich die folgende Berechnung:

$\log BC = 3{,}207250$	$\log BC = 3{,}207250$
$\log \sin \alpha = 9{,}981536$	$\log \sin \beta = 9{,}998461$
$\log^1/\sin(\alpha+\beta) = 0{,}690465$	$\log^1/\sin(\alpha+\beta) = 0{,}690465$
$\log CQ = 3{,}879251$	$\log BQ = 3{,}896176$
$(C, B) = 9^0\ 07'\ 48''$	$(B, C) = 189^0\ 07'\ 48''$
$\beta = 94\ \ 49\ \ 16$	$\alpha = 73\ \ 24\ \ 38$
$(C, Q) = 274^0\ 18'\ 32''$	$(B, Q) = 262^0\ 32'\ 26''$
$\log \sin(C, Q) = 9{,}988771_n$	$\log \sin(B, Q) = 9{,}996309_n$
$\log CQ = 3{,}879251$	$\log BQ = 3{,}896176$
$\log \cos(C, Q) = 8{,}875833$	$\log \cos(B, Q) = 9{,}113356_n$
$\log CQ \sin(C, Q) = 3{,}878022_n$	$\log BQ \sin(B, Q) = 3{,}892485_n$
$\log CQ \cos(C, Q) = 2{,}755084$	$\log BQ \cos(B, Q) = 3{,}009532_n$
$CQ \sin(C, Q) = -\ 7551{,}300$	$BQ \sin(B, Q) = -\ 7807{,}017$
$y_c = +\ 10883{,}945$	$y_b = +\ 11139{,}660$
$y_q = +\ 3332{,}645$	$y_q = +\ 3332{,}643$
$CQ \cos(C, Q) = +\ 568{,}963$	$BQ \cos(B, Q) = -\ 1022{,}191$
$x_c = +\ 9250{,}960$	$x_b = +\ 10842{,}117$
$x_q = +\ 9819{,}923$	$x_q = +\ 9819{,}926$

Mit den Mittelwerten von y_q und x_q wird der Richtungswinkel (Q, G) nach (1) § 43 S. 98 berechnet

$y_q = +\ 3332{,}644$	$x_q = +\ 9819{,}924$
$y_g = +\ 10000{,}000$	$x_g = +\ 10000{,}000$
$y_g - y_q = +\ 6667{,}356$	$x_g - x_q = +\ 180{,}076$

$\log (y_g - y_q) =$	3,823954	$(G, C) =$	130°	16′	38″
$\log (x_g - x_q) =$	2,255455	$(G, J) =$	88	27	10
$\log \operatorname{tang} (Q, G) =$	1,568499	$(G, B) =$	53	32	19
$(Q, G) = 88° 27' 10'' = (G, J)$		$\gamma =$	41	49	28
		$\delta =$	34	54	51

Hiermit sind die Dreiecke BGJ und CGJ aufzulösen.

$\log BG =$	3,151380	$\log GC =$	3,063945
$\log \sin (\beta + \delta) =$	9,885930	$\log \sin (\alpha + \gamma) =$	9,956441
$\log^1 / \sin \beta =$	0,001539	$\log^1 / \sin \alpha =$	0,018464
$\log GJ =$	3,038849	$\log GJ =$	3,038850

Es folgt endlich die Berechnung der Koordinaten von J:

$\log \sin (G, J) =$	9,999842	$\log \cos (G, J) =$	8,431377
$\log GJ =$	3,038850	$\log GJ =$	3,038850
$\log GJ \sin (G, J) =$	3,038692	$\log GJ \cos (G, J) =$	1,470227
$GJ \sin (G, J) =$	+ 1093,180	$GJ \cos (G, J) =$	+ 29,528
$y_g =$	+ 10000,000	$x_g =$	+ 10000,000
$y_i =$	+ 11093,180	$x_i =$	+ 10029,528

§ 60. Das Rückwärtseinschneiden (Lösung von Burckhardt).

Eine weitere analytische Lösung, die jetzt am meisten angewendet wird, rührt von *Burckhardt* (1801) her.

Aus den Koordinaten der drei gegebenen Punkte sind die Strecken a und b (Fig. 96), sowie deren Richtungswinkel bekannt, so daß auch der Winkel γ bestimmt werden kann. Zur Auflösung der Dreiecke APC und BPC haben wir zunächst

(1) $\varphi + \psi = 360° - (\alpha + \beta + \gamma)$.

Ferner ist

$$PC = a \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} = b \frac{\sin \psi}{\sin \beta}$$

oder

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}.$$

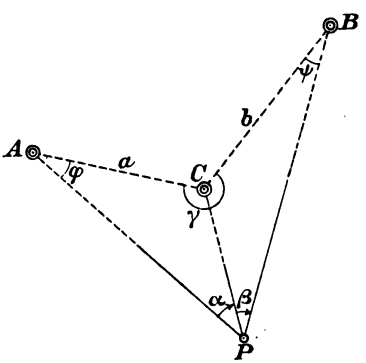


Fig. 96.

Zur Einführung des Hilfswinkels λ setzen wir

$$\frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} = \text{cotang } \lambda$$

und erhalten hiermit

$$\frac{\sin \varphi + \sin \psi}{\sin \varphi - \sin \psi} = \frac{1 + \text{tang } \lambda}{1 - \text{tang } \lambda} = \text{tang } (45^0 + \lambda).$$

Dies geht nach Umformung der linken Seite über in

$$(2) \qquad \text{cotang } \frac{\varphi - \psi}{2} = \text{cotang } \frac{\varphi + \psi}{2} \text{ tang } (45^0 + \lambda).$$

Hieraus und aus Gl. (1) können φ und ψ ermittelt werden, wodurch die Aufgabe wieder auf die des Seitwärtsabschneidens zurückgeführt ist.

Wir rechnen nach den vorstehenden Formeln das Beispiel von S. 131—133 noch einmal durch.

$(G, C) = 130^0\ 16'\ 38''$	$\log b = 3{,}151380$
$(G, B) = 53\ 32\ 19''$	$\log^1/a = 6{,}936055$
$\gamma = 76^0\ 44'\ 19''$	$\log^1/\sin \beta = 0{,}001539$
$\alpha = 73\ 24\ 38$	$\log \sin \alpha = 9{,}981536$
$\beta = 94\ 49\ 16$	$\log \text{cotang } \lambda = 0{,}070510$
$\alpha + \beta + \gamma = 244^0\ 58'\ 13''$	$\lambda = 40^0\ 22'\ 09''$
$\varphi + \psi = 115\ 01\ 47$	$45^0 + \lambda = 85\ 22\ 09$
$\frac{\varphi + \psi}{2} = 57\ 30\ 54$	

$$\log \text{cotang } \frac{\varphi + \psi}{2} = 9{,}803937$$
$$\log \text{tang } (45^0 + \lambda) = 1{,}091516$$
$$\log \text{cotang } \frac{\varphi - \psi}{2} = 0{,}895453$$

$$\frac{\varphi - \psi}{2} = 7^0\ 15'\ 00''$$
$$\frac{\varphi + \psi}{2} = 57\ 30\ 54$$
$$\varphi = 64^0\ 45'\ 54''$$
$$\psi = 50\ 15\ 54\ .$$

Zum Vergleich mit der ersten Lösung berechnen wir noch die in Fig. 95 vorkommenden Winkel γ und δ. Es ist

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \varphi) = 41^0\ 49'\ 28''$$

und

$$\delta = 180^0 - (\beta + \psi) = 34^0\ 54'\ 50'',$$

was genügend mit den Ergebnissen von S. 133 übereinstimmt. Die Auflösung der Dreiecke BGJ und CGJ erfolgt in derselben Weise wie früher. Ebenso ist auch dieselbe Koordinatenberechnung auszuführen, nachdem man den Richtungswinkel

$$(G,J) = (G,C) + (\varphi + \alpha) \quad \text{oder} \quad (G,J) = (G,B) - (\psi + \beta)$$

berechnet hat.

§ 61. Fehlertheorie des Rückwärtseinschneidens.

Um die Genauigkeit der Punktbestimmung durch Rückwärtseinschneiden festzustellen, müßte man entsprechend den Entwicklungen in § 57 und § 58 zwei Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} dy &= F_1 d\alpha + F_2 d\beta \\ dx &= F_3 d\alpha + F_4 d\beta \end{aligned} \tag{1}$$

aufstellen, in denen die Größen F von der gegenseitigen Lage der vier Punkte abhängen. Nach der Fehlerhäufungsregel wäre dann

$$M^2 = (F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2)\,\mu^2.$$

Da der bisher eingeschlagene Weg hier nicht zum Ziele führt, so suchen wir die Gleichungen (1) auf andere Weise zu finden. Zunächst kehren wir die Aufgabe um und ermitteln die Änderungen der Winkel α und β, die aus einer unendlich kleinen Verschiebung des Punktes P hervorgehen. Bezeichnen wir den Richtungswinkel der Strecke s_1 mit φ_1 (Fig. 97), so ist nach (1) § 43 S. 98

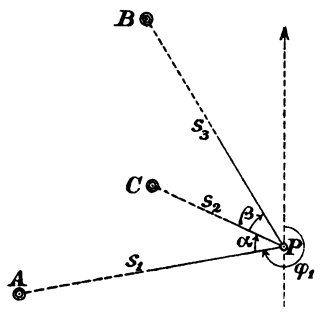


Fig. 97.

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = \frac{y_a - y}{x_a - x}.$$

Durch Differentiation erhalten wir hieraus

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi_1}\, d\varphi_1 = \frac{y_a - y}{(x_a - x)^2}\, dx - \frac{1}{x_a - x}\, dy$$

oder

$$(2) \qquad d\varphi_1 = \frac{\sin \varphi_1}{s_1}\, dx - \frac{\cos \varphi_1}{s_1}\, dy.$$

Die entsprechenden Gleichungen gelten für $d\varphi_2$ und $d\varphi_3$, und da

$$d\alpha = d\varphi_2 - d\varphi_1 \quad \text{und} \quad d\beta = d\varphi_3 - d\varphi_2$$

ist, so wird

$$d\alpha = \left(\frac{\sin \varphi_2}{s_2} - \frac{\sin \varphi_1}{s_1}\right) dx - \left(\frac{\cos \varphi_2}{s_2} - \frac{\cos \varphi_1}{s_1}\right) dy$$

$$d\beta = \left(\frac{\sin \varphi_3}{s_3} - \frac{\sin \varphi_2}{s_2}\right) dx - \left(\frac{\cos \varphi_3}{s_3} - \frac{\cos \varphi_2}{s_2}\right) dy.$$

Setzen wir $\frac{1}{s_1} = r_1$, $\frac{1}{s_2} = r_2$ und $\frac{1}{s_3} = r_3$, so gehen die vorstehenden Gleichungen über in

$$(3) \qquad \begin{aligned} d\alpha &= (r_2 \sin \varphi_2 - r_1 \sin \varphi_1)\, dx - (r_2 \cos \varphi_2 - r_1 \cos \varphi_1)\, dy \\ d\beta &= (r_3 \sin \varphi_3 - r_2 \sin \varphi_2)\, dx - (r_3 \cos \varphi_3 - r_2 \cos \varphi_2)\, dy. \end{aligned}$$

Um hieraus dx und dy zu ermitteln, finden wir zunächst die Determinante

$$N = -(r_2 \sin \varphi_2 - r_1 \sin \varphi_1)(r_3 \cos \varphi_3 - r_2 \cos \varphi_2) + (r_3 \sin \varphi_3 - r_2 \sin \varphi_2)(r_2 \cos \varphi_2 - r_1 \cos \varphi_1)$$

oder wenn berücksichtigt wird, daß

$$\varphi_3 - \varphi_2 = \beta \quad \text{und} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \alpha \quad \text{ist,}$$

$$(4) \qquad N = r_2 r_3 \sin \beta + r_1 r_2 \sin \alpha - r_1 r_3 \sin (\alpha + \beta).$$

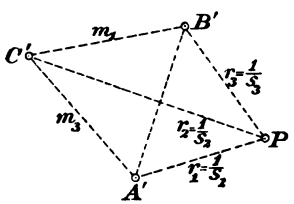


Fig. 98.

Dieser Ausdruck läßt eine einfache geometrische Deutung zu. Ersetzen wir in Fig. 97 die drei Strecken s_1, s_2 und s_3 durch r_1, r_2 und r_3, so entsteht ein Dreieck $A'B'C'$ (Fig. 98), dessen doppelter Flächeninhalt Δ durch die vorstehende Gleichung (4) dargestellt wird. Es ist

$$2\Delta = -N.$$

Ferner erhalten wir aus (3)

$$(5) \qquad \begin{aligned} dx &= \frac{1}{N}\left(-(r_3 \cos \varphi_3 - r_2 \cos \varphi_2)\, d\alpha + (r_2 \cos \varphi_2 - r_1 \cos \varphi_1)\, d\beta\right) \\ dy &= \frac{1}{N}\left(-(r_3 \sin \varphi_3 - r_2 \sin \varphi_2)\, d\alpha + (r_2 \sin \varphi_2 - r_1 \sin \varphi_1)\, d\beta\right). \end{aligned}$$

Dies sind die gesuchten Gleichungen (1) von S. 135, aus denen wir erhalten

$$M^2 = \frac{1}{N^2}\Big\{r_1^2 + 2r_2^2 + r_3^2 - 2r_2r_3\cos(\varphi_3 - \varphi_2) - 2r_1r_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\Big\}\mu^2,$$

oder wenn wir

$$A'C = m_3 \quad \text{und} \quad B'C' = m_1$$

setzen

$$M^2 = \frac{m_1^2 + m_3^2}{4\Delta^2}\mu^2. \tag{6}$$

Der Ausdruck für M^2 hängt somit lediglich von der Gestalt und Größe des Dreiecks $A'B'C'$ ab, und nicht von der Lage des Punktes P in bezug auf dieses Dreieck. Jede neue Lage des Punktes P gibt, wenn wir das Dreieck $A'B'C'$ unverändert lassen, eine neue Lage der Punkte ABC, für die dasselbe M gilt.

Es kann hierbei auch einer der drei Strahlen s_1, s_2 und s_3 unendlich groß werden ohne daß M beeinflußt wird. Nehmen wir z. B. an, es liege der Festpunkt C in beliebiger Richtung unendlich fern von P, so ist $r_2 = 0$ und es fällt in Fig. 98 C' mit P zusammen. Infolgedessen wird

$$r_1 = m_3 \quad \text{und} \quad r_3 = m_1,$$

also auch

$$M^2 = \frac{r_1^2 + r_3^2}{r_1^2 r_3^2 \sin^2(\alpha+\beta)}\mu^2 = \frac{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_3^2}}{\sin^2(\alpha+\beta)}\mu^2$$

oder

$$M^2 = \frac{s_1^2 + s_3^2}{\sin^2(\alpha+\beta)}\mu^2. \tag{7}$$

Dies stimmt mit (1) § 57 S. 128 überein. Es ist also das Rückwärtseinschneiden eines Punktes nach zwei Festpunkten in endlicher und einem dritten in unendlicher Entfernung gleichwertig mit dem Vorwärtsabschneiden desselben Punktes von den beiden ersteren Festpunkten aus.

Die Gl. (7) lehrt, daß es keineswegs gleichgültig ist, welche beiden Winkel gemessen werden. Die Auswahl ist so zu treffen, daß $m_1^2 + m_3^2$ möglichst klein sind.

Dies führt zu der Frage, ob durch Messung der drei *Rich-*

tungen statt zweier *Winkel* eine andere Genauigkeit erzielt wird. Die Untersuchung kann an das Vorhergehende leicht angeknüpft werden. Sind die drei Richtungen l_1, l_2 und l_3 und ist ω der Richtungswinkel der Nullrichtung, so ist

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \omega + l_1 \\ \varphi_2 &= \omega + l_2 \\ \varphi_3 &= \omega + l_3 . \end{aligned} \tag{8}$$

Durch Änderung von x und y wird auch ω einen anderen Wert erhalten, den wir mit $\omega + d\omega$ bezeichnen. Es ist dann nach (2)

$$dl_1 = -d\omega + d\varphi_1 = -d\omega + \frac{\sin\varphi_1}{s_1}\,dx - \frac{\cos\varphi_1}{s_1}\,dy, \tag{9}$$

oder wenn wir wieder die Reziproken r_1, r_2 und r_3 einführen

$$\begin{aligned} dl_1 &= -d\omega + r_1 \sin\varphi_1 dx - r_1 \cos\varphi_1 dy \\ dl_2 &= -d\omega + r_2 \sin\varphi_2 dx - r_2 \cos\varphi_2 dy \\ dl_3 &= -d\omega + r_3 \sin\varphi_3 dx - r_3 \cos\varphi_3 dy . \end{aligned} \tag{1}$$

Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned} dl_2 - dl_1 &= (r_2 \sin\varphi_2 - r_1 \sin\varphi_1)\,dx - (r_2 \cos\varphi_2 - r_1 \cos\varphi_1)\,dy \\ dl_3 - dl_2 &= (r_3 \sin\varphi_3 - r_2 \sin\varphi_2)\,dx - (r_3 \cos\varphi_3 - r_2 \cos\varphi_2)\,dy. \end{aligned} \tag{11}$$

Da die rechten Seiten mit denen der Gl. (3) übereinstimmen so ist auch die Determinante

$$N = -2\Delta.$$

Entsprechend dem Früheren erhalten wir nach geringer Umformung

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1}{N}\Big\{(r_3 \cos\varphi_3 - r_2 \cos\varphi_2)\,dl_1 + (r_1 \cos\varphi_1 - r_3 \cos\varphi_3)\,dl_2 \\ &\qquad + (r_2 \cos\varphi_2 - r_1 \cos\varphi_1)\,dl_3\Big\} \\ dy &= \frac{1}{N}\Big\{(r_3 \sin\varphi_3 - r_2 \sin\varphi_2)\,dl_1 + (r_1 \sin\varphi_1 - r_2 \sin\varphi_2)\,dl_2 \\ &\qquad + (r_2 \sin\varphi_2 - r_1 \sin\varphi_1)\,dl_3\Big\} . \end{aligned} \tag{12}$$

Bezeichnet μ_1 den mittleren Fehler einer Richtungsmessung, so ist

$$M^2 = \frac{1}{N^2}\Big\{2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - 2r_2 r_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) - 2r_3 r_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\Big\}\,\mu_1^2$$

oder mit den früheren Bezeichnungen

$$M^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}{4\Delta^2}\,\mu_1^2. \tag{13}$$

Da $\mu_1^2 = \frac{\mu^2}{2}$ ist, so können wir die Gl. (13) auch schreiben

$$M^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}{8\Delta^2}\,\mu^2, \tag{14}$$

um sie mit dem Ausdruck (6) vergleichen zu können.

Wir wenden das Vorstehende auf das berechnete Beispiel an und erhalten

$$r_1 = 1{,}240 \cdot 10^{-3} \qquad m_1 = 1{,}60 \cdot 10^{-3}$$
$$r_2 = 0{,}914 \cdot 10^{-3} \qquad m_2 = 2{,}46 \cdot 10^{-3}$$
$$r_3 = 1{,}229 \cdot 10^{-3} \qquad m_3 = 1{,}33 \cdot 10^{-3}.$$

Ferner wird

$$\Delta = 0{,}9717 \cdot 10^{-6}.$$

Hiermit erhalten wir nach Gl. (6)

$$M = 10^3 \frac{\sqrt{4{,}3289}}{1{,}9434}\,\mu = 1068\,\mu$$

und für $\mu = \pm \frac{20''}{\varrho''}$

$$M = \pm\, 0{,}104\,\text{m}.$$

Wären statt der beiden Winkel die drei Richtungen mit derselben Genauigkeit gemessen worden, so hätte man nach (14) erhalten

$$M = 10^3 \frac{\sqrt{5{,}1902}}{1{,}9434}\,\mu = 1169\,\mu$$

und für $\mu = \pm \frac{20''}{\varrho''}$

$$M = \pm\, 0{,}113\,\text{m}.$$

Es ist also bei dem vorliegenden Beispiel die Winkelmessung günstiger als die Richtungsmessung.

§ 62. Aufgabe der beiden Punktpaare.

Von den Methoden der gleichzeitigen trigonometrischen Einschaltung mehrerer Punkte findet die *Aufgabe der beiden Punktpaare* oder das *Hansen*sche *Problem* am meisten Verwendung. Sind in Fig. 99 A und B zwei Festpunkte, C und D zwei Neupunkte, so werden zur Bestimmung der letzteren

die vier Winkel α, β, γ und δ, oder die entsprechenden sechs Richtungen gemessen. Die Fig. 99 zeigt, daß hierdurch die gegenseitige Lage der vier Punkte bestimmt ist. Nimmt man für DC einen beliebigen Wert an, so kann man alle Seiten der Figur, auch die Strecke AB berechnen. Das Verhältnis der gegebenen und der berechneten Strecke AB gibt den Faktor an, mit dem alle Längen zu multiplizieren sind, um ihre wirklichen Werte zu erhalten. Bei logarithmischer Rechnung geht der Faktor in eine Additionsgröße über.

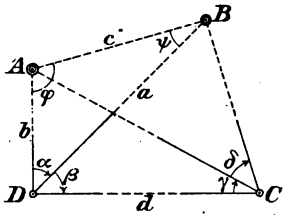


Fig. 99.

Eine einfache graphische Lösung der Aufgabe ist mit Hilfe zweier *Collins*schen Punkte möglich. Der besseren Übersicht wegen ist in Fig. 100 eine andere Lage der Fest- und Neupunkte angenommen. Zwei durch A und B gehende Kreise mit den Peripheriewinkeln $\alpha+\beta$ und $\gamma+\delta$ geben je einen geometrischen Ort für die Punkte C und D. Werden an AB einerseits die Winkel α und β, andererseits die Winkel γ und δ angetragen, so werden die beiden Hilfspunkte P und Q erhalten, deren Verbindungslinie die beiden Bestimmungskreise in den gesuchten Punkten C und D schneidet.

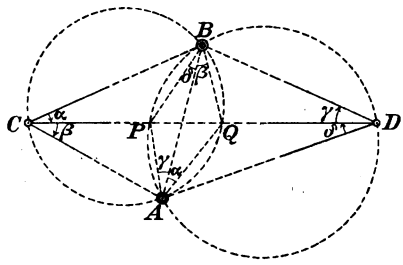


Fig. 100.

Wie beim Rückwärtseinschneiden, so läßt sich auch hier die vorstehende Konstruktion rechnerisch verfolgen, indem man nach dem Verfahren des Vorwärtsabschneidens die Koordinaten der Punkte P und Q berechnet und aus ihnen den Richtungswinkel $(P, Q) = (C, D)$ ermittelt. Hierdurch ist die Bestimmung der Punkte C und D nach der Methode des Seitwärtsabschneidens ermöglicht.

Wir gehen nun zu der von *Hansen* gegebenen analytischen Lösung der Aufgabe über, die sich auch eng an die entsprechende Lösung des Rückwärtseinschneidens anschließt.

Aus den Koordinaten der gegebenen Punkte ist der Rich-

tungswinkel (A, B) und die Strecke $AB = c$ bekannt. Mit den Bezeichnungen der Fig. 99 ist dann

$$d = a \frac{\sin(\beta + \gamma + \delta)}{\sin(\gamma + \delta)} = b \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\sin \gamma};$$

ferner ist

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin \psi}{\sin \varphi},$$

also haben wir

$$\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \frac{\sin \gamma \sin(\beta + \gamma + \delta)}{\sin(\gamma + \delta) \sin(\alpha + \beta + \gamma)}.$$

Zur Einführung eines Hilfswinkels λ setzen wir

(1) $$\operatorname{tang} \lambda = \frac{\sin \gamma \sin(\beta + \gamma + \delta)}{\sin(\gamma + \delta) \sin(\alpha + \beta + \gamma)},$$

woraus λ berechnet werden kann. Entsprechend der Entwicklung von S. 134 wird dann

$$\frac{\sin \varphi + \sin \psi}{\sin \varphi - \sin \psi} = \frac{1 + \operatorname{tang} \lambda}{1 - \operatorname{tang} \lambda}$$

oder

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi + \psi}{2} \operatorname{cotang} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tang}(45^0 + \lambda).$$

(2) Da $$\frac{\varphi + \psi}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$$ ist, so erhalten wir

(3) $$\operatorname{tang} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{cotang} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cotang}(45^0 + \lambda).$$

Ist hiernach φ und ψ berechnet, so kann die Auflösung der Dreiecke und die Koordinatenberechnung auf dem gewöhnlichen Wege erfolgen.

Die Genauigkeit der Punktbestimmung nach *Hansens* Problem läßt sich am besten nach Fig. 100 erwägen, in der sie aus den verschiedenen Schnittwinkeln beurteilt werden kann.

§ 63. Aufgabe der sechs bzw. acht Punkte.

Einige weitere Methoden zur gleichzeitigen Bestimmung der gegenseitigen Lage mehrerer Punkte sollen hier nur angedeutet werden, da sie für genaue Punktbestimmung wenig Wert haben, wohl aber bei flüchtigen Aufnahmen, z. B. auf Forschungsreisen Verwendung finden können.

Die Aufgabe der sechs Punkte. Im Gelände seien drei Ziel-

punkte D, E und F (Fig. 101) bezeichnet und von drei anderen beliebig zu wählenden Punkten A, B und C sichtbar. Werden auf jedem der letzteren drei Punkte die Richtungswinkel nach den Zielpunkten mit der Bussole gemessen, so ist die ganze Figur ihrer Gestalt nach, und wenn eine beliebige Seite gemessen ist, auch ihrer Größe nach bestimmt.

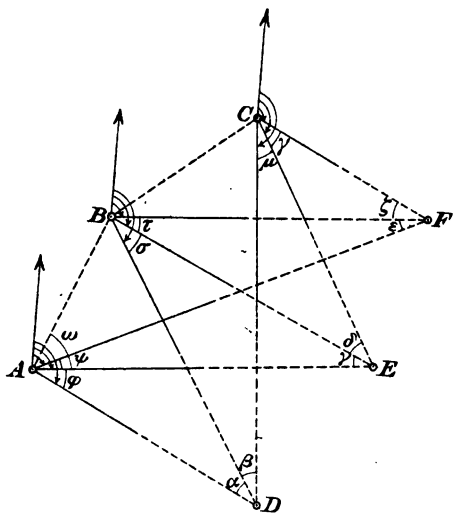


Fig. 101.

Diese, sowie die folgende Aufgabe ist zum erstenmal von *J. H. Lambert* behandelt worden. In seinen *Beyträgen zum Gebrauche der Mathematik* (Berlin 1765 § 107 u. ff.) ist sowohl eine konstruktive als auch eine analytische Lösung der Aufgabe gegeben.

Die Konstruktion läßt sich leicht mit Hilfe der *Collins*schen Hilfspunkte ausführen.

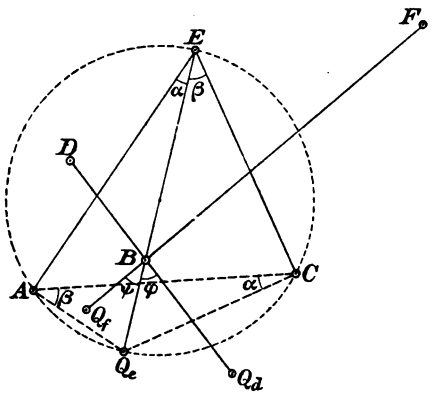


Fig. 102.

Beschreiben wir um die beiden Standpunkte A und C (Fig. 102) und einen der Zielpunkte, z. B. E, einen Kreis, so schneidet die Verbindungslinie EB denselben in dem Hilfspunkte Q_e.

Für die Konstruktion nehmen wir die beiden Punkte A und C beliebig an und bilden aus den Differenzen der gemessenen Richtungswinkel (AE), (BE) und (CE) die beiden Winkel α und β, die an AC angelegt den Punkt Q_e bestimmen. Aus den Richtungswinkeln (AD), (BD), (CD) und (AF),

(BF), (CF) ergeben sich zwei entsprechende Hilfspunkte Q_d und Q_f. Sind die drei Hilfspunkte bekannt, so kann der Punkt B durch Rückwärtseinschneiden nach diesen drei Punkten bestimmt werden, da die beiden Winkel φ und ψ sich ebenfalls als Differenzen der Richtungswinkel (BD), (BE) und (BF) ergeben.

Mit dem Punkte B werden auch die Richtungen $B—D$, $B—E$ und $B—F$ bekannt, es ist somit auch die Nullrichtung der gemessenen Richtungswinkel sofort zu finden. Die Konstruktion der Punkte D, E und F bietet dann keine weiteren Schwierigkeiten.

Ohne auf die analytische Lösung der Aufgabe näher einzugehen, geben wir wenigstens den Schlußausdruck derselben an: Es ist mit den Bezeichnungen der Fig. 101

$$\operatorname{cotang}\omega = \frac{1}{N}\Big(\sin\alpha\sin\delta\sin\nu\cos\mu + \sin\varepsilon\sin\delta\sin\mu\cos\nu$$
$$- \sin\beta\sin\gamma\sin\nu\cos\varphi - \sin\zeta\sin\gamma\sin\mu\cos\psi\Big)$$

wo $$N = \sin\gamma\sin\beta\sin\nu\sin\varphi - \sin\gamma\sin\zeta\sin\mu\sin\psi$$

ist. Sobald der Winkel ω bekannt ist, kann die ganze Figur leicht aufgelöst werden.

Denselben Zwecken dient die *Aufgabe der acht Punkte.* Sind nach vier beliebigen Zielpunkten A, B, C, D von jedem der vier Standpunkte E, F, G, H Richtungen bzw. Winkel gemessen, wie es in Fig. 103 für den Punkt E angedeutet ist, so ist die Gestalt der ganzen Figur bestimmt. Von der durch *Lambert* (a. a. O. § 270 u. ff.) gegebenen eleganten Lösung soll nur das Resultat mitgeteilt werden.

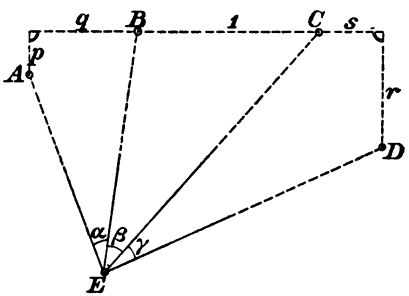


Fig. 103.

Für die Winkelmessungen auf dem Punkte E kann mit den Bezeichnungen der Fig. 103 die Gleichung

$$q + s + 1 = p\operatorname{cotang}\alpha + r\operatorname{cotang}\gamma - (ps + qr)\frac{\sin\beta\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}$$
$$+ (qs - pr)\frac{\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}$$

aufgestellt werden. Für jeden der drei anderen Beobachtungspunkte erhält man ebenfalls eine solche Gleichung. Es lassen sich dann die vier Größen $q + s + 1$, r, $ps + qr$ und $qs - pr$ durch p ausdrücken, und wenn aus den so gefundenen vier Gleichungen die Größen q, r und s eliminiert werden, so bleibt eine quadratische Gleichung mit der einzigen Unbekannten p, die hieraus ermittelt werden kann. Die Lösung liefert mit p, q, r und s unmittelbar die Koordinaten der vier Zielpunkte in bezug auf BC als Abszissenachse.

§ 64. Graphische Ausgleichung des Vorwärtsabschneidens.

Bei den Methoden des Vorwärtsabschneidens und des Rückwärtseinschneidens wird man, wenn es möglich ist, mehr Richtungen oder Winkel messen, als durchaus erforderlich sind, weil man hierdurch nicht nur eine erhöhte Sicherheit der Punktbestimmung erzielt, sondern auch ein Mittel, die Genauigkeit der Messungen zu beurteilen.

Infolge der Messungsfehler wird eine Ausgleichung der gemessenen Winkel bzw. Richtungen erforderlich, um die Widersprüche, die sich bei der Koordinatenberechnung zeigen, zu beseitigen. Statt der numerischen Ausgleichung, die im 20. Kapitel behandelt ist, wenden wir zunächst eine graphische Ausgleichung an.

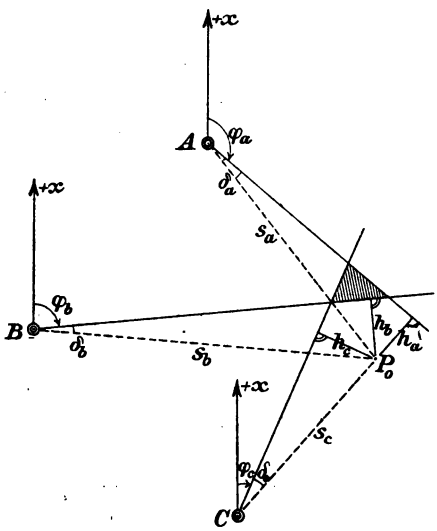


Fig. 104.

Ein Neupunkt P sei von mehr als zwei Festpunkten aus vorwärts abgeschnitten, so daß aus den Abrissen dieser Punkte die Richtungswinkel $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c \cdots$ bekannt sind. Denken wir uns die verschiedenen Strahlen aufgezeichnet, so werden sie sich infolge der Messungsfehler nicht in einem Punkte schneiden, sondern eine *fehlerzeigende Figur* (in Fig. 104 ein Dreieck) bil-

den. Wir ermitteln auf irgend eine Weise, z. B. aus zwei beliebigen Strahlen Näherungskoordinaten x_0 und y_0 eines Punktes P_0, der in der Nähe des endgültigen Punktes liegen wird. Es handelt sich nun darum, die Lage des Punktes P_0 in bezug auf die fehlerzeigende Figur zu kennen. Hierzu berechnen wir aus den Koordinaten die Richtungswinkel φ_a^0, $\varphi_b^0 \cdots$ der Strahlen AP_0, BP_0 usw., bilden die Differenzen

$$\begin{aligned} \delta_a &= \varphi_a^0 - \varphi_a \\ \delta_b &= \varphi_b^0 - \varphi_b \\ &\vdots \end{aligned}$$

und erhalten mit Hilfe der Entfernungen s die Abstände h des Punktes P_0 von den Seiten der fehlerzeigenden Figur nach den Gleichungen

$$\begin{aligned} h_a &= s_a \frac{\delta_a}{\varrho''} \\ h_b &= s_b \frac{\delta_b}{\varrho''} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Mit den Größen h und den Richtungswinkeln φ kann man die fehlerzeigende Figur in großem Maßstabe (1:2 bis 1:10) konstruieren.

Die endgültige Lage des Punktes P kann innerhalb der fehlerzeigenden Figur nach Gutdünken gewählt werden, so daß seine Abstände von den Seiten der Figur möglichst klein sind. Es ist jedoch auch nicht schwer, denjenigen Punkt zu finden, den die numerische Ausgleichung gibt. Verbindet man den endgültigen Punkt P mit den Festpunkten, so werden die Richtungswinkel dieser Strahlen ein wenig von den ursprünglichen, aus den Beobachtungen hervorgegangenen Richtungswinkeln abweichen. Die Abweichungen bezeichnen wir als die *Verbesserungen* λ der Beobachtungen. Die Methode der kleinsten Quadrate bezeichnet diejenige Lage des Punktes P als die günstigste, für die die Summe der Quadrate der Verbesserungen, multipliziert mit ihren Gewichten, ein Minimum wird. Die Gewichte der einzelnen Strahlen ergeben sich, wie die Theorie später zeigen wird, aus den Abrissen. Ist die Anzahl der auf einem Festpunkt gemessenen Richtungen gleich n, so ist das Gewicht des im Abriß berechneten Richtungswinkels

$$g = \frac{n-1}{n}.$$

Es ist für die Auswahl des Punktes P bequem, die fehlerzeigende Figur nach dem Vorschlage von *Hammer* mit Hilfslinien zu versehen, aus denen man für jede Lage des Punktes P die Größe aller $\lambda\sqrt{g}$ ablesen kann. Hierzu berechnet man außer den Größen h noch die Größen

$$h'_a = \frac{10}{\varrho''}\frac{s_a}{\sqrt{g_a}}$$
$$h'_b = \frac{10}{\varrho''}\frac{s_b}{\sqrt{g_b}}$$
$$\vdots$$

und zieht zu beiden Seiten der Strahlen der Fehlerfigur Parallelen im Abstande h'_a bzw. h'_b usw. Diese Abstände entsprechen den Werten $\lambda_a\sqrt{g_a} = \lambda_b\sqrt{g_b} \cdots = 10''$, und man kann infolgedessen für jede Lage des Punktes P die Werte der Größen $\lambda\sqrt{g}$ ablesen. Wird die Quadratsumme dieser Werte für mehrere Punkte aufgestellt, so sieht man leicht, wo der Neupunkt anzunehmen ist, damit die Quadratsumme ein Minimum wird.

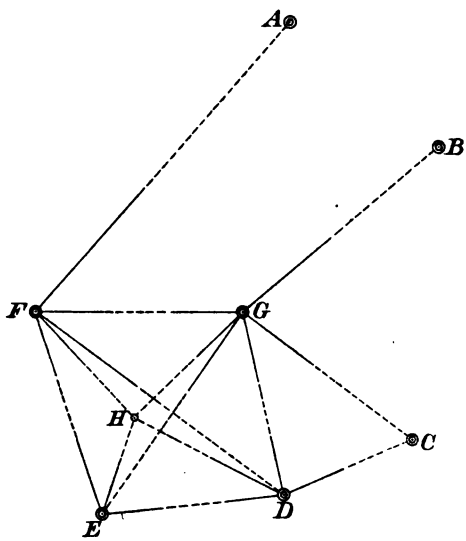


Fig. 105.

Beispiel. Zur Bestimmung des Punktes H wurden außer den schon S. 124 benutzten Messungen noch auf den Punkten G und D (Fig. 105) Richtungen nach 5 bzw. 3 Festpunkten und nach dem Neupunkte gemessen.

Mit Hilfe der aus den Abrissen der Triangulation S. 122/123 entnommenen Richtungswinkel sind für die neuen Messungen

die nachstehenden Abrisse nach § 56 S. 125 aufgestellt worden.

Standpunkt *D*.

P	φ			w			$\varphi - w$		
	°	′	″	°	′	″	°	′	″
E	268	32	20	0	00	00	268	32	20
H	307	24	22	38	52	01			
G	349	44	49	81	12	20	268	32	29
C	72	51	03	164	18	48	268	32	15

$$\frac{[\varphi - w]}{3} = 268^0\ 32'\ 21''$$

Standpunkt *G*.

P	φ			w			$\varphi - w$		
	°	′	″	°	′	″	°	′	″
B	53	32	19	0	00	00	53	32	19
C	130	16	38	76	44	10	53	32	28
D	169	44	49	116	12	40	53	32	09
E	218	57	21	165	25	08	53	32	13
H	236	50	50	183	18	34			
F	275	00	22	221	28	10	53	32	12

$$\frac{[\varphi - w]}{5} = 53^0\ 32'\ 16''$$

Es ergeben sich somit aus den Messungen die Richtungswinkel

$$\varphi_d = 307^0\ 24'\ 22''$$
$$\varphi_g = 236\ \ 50\ \ 50\ .$$

Als Näherungskoordinaten wurden die S. 126 berechneten angenommen, und hiermit die vorläufigen Richtungswinkel φ^0 berechnet. In der nachstehenden Tabelle ist alles übersichtlich zusammengestellt, was zur Konstruktion der fehlerzeigenden Figur erforderlich ist.

Punkt	φ^0			φ			δ	s	h	g	h'
	°	′	″	°	′	″	″	m	cm		cm
E	19	26	01	19	26	01	0	645,3	0	2/5	3,8
F	134	10	02	134	10	02	0	687,3	0	4/5	3,7
G	236	50	14	236	50	50	− 36	702,4	− 12,3	5/6	3,7
D	307	24	45	307	24	22	+ 23	960,6	+ 10,7	3/4	5,4

Hiermit ist die fehlerzeigende Figur (Fig. 106) konstruiert worden. Die durch die h'. bestimmten Hilfslinien sind nur soweit eingetragen, als sie für die Auswahl der Lage des Punktes H in Betracht kommen könnten. Nach einigen Versuchen wurde gefunden, daß die Quadratsumme der Größen $\lambda\sqrt{g}$ für

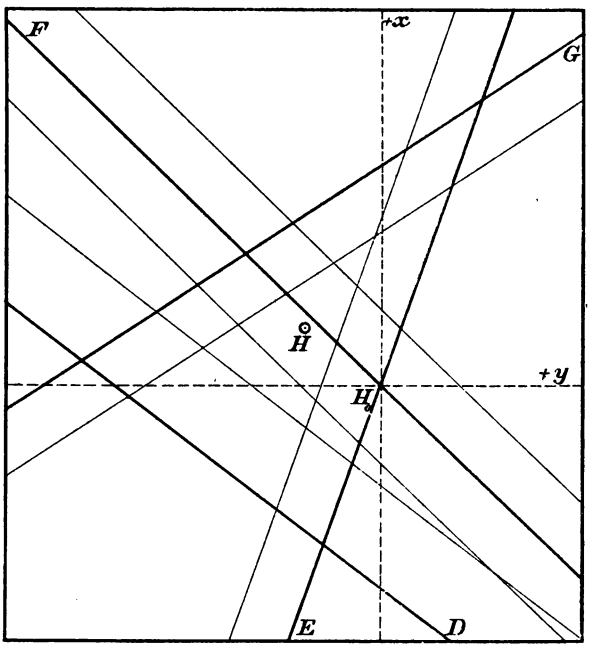


Fig. 106. Maßstab 1 : 5.

den eingetragenen Punkt H am kleinsten ist. Bezeichnet man die Verbesserungen der vorläufigen Koordinaten mit ξ und η so erhält man durch Abgreifen aus der Zeichnung

$$\eta = -5{,}1 \text{ cm} \qquad \xi = +4{,}4 \text{ cm}.$$

Werden diese Beträge zu den Koordinaten von S. 126 hinzugefügt, so erhält man die endgültigen Koordinaten des Punktes H

$$y = +9412{,}024 \text{ m} \qquad x = +9615{,}861 \text{ m}.$$

§ 65. Graphische Ausgleichung des Rückwärtseinschneidens.

Für das Rückwärtseinschneiden mit mehr als zwei Winkeln ist zu beachten, daß jeder gemessene Winkel einen Kreis als

geometrischen Ort für den gesuchten Punkt gibt. Denken wir uns alle Kreise konstruiert, so erhalten wir wieder infolge der Messungsfehler keinen gemeinsamen Schnittpunkt, sondern eine fehlerzeigende Figur. An die Stelle der Kreisbögen, die diese Figur bilden, können wir in Rücksicht auf ihre geringe Ausdehnung gerade Linien setzen. In Fig. 107 entspreche dem gemessenen Winkel γ_1 der Kreis AP_1B. Ist wieder ein Punkt P_0 als vorläufige Lage des Neupunktes aus zwei beliebigen Winkeln berechnet worden, so ist zur Konstruktion der fehlerzeigenden Figur die Lage der Tangente P_1T_1 in bezug auf P_0 zu ermitteln. Hierzu ist die Berechnung des Richtungswinkels (P_1T_1) und des senkrechten Abstandes h_1 notwendig. Denken wir uns einen zweiten Kreis durch AP_0B gelegt, so können wir die Tangente $P_0T_1^0$ als parallel zu P_1T_1 annehmen. Da nach der Figur

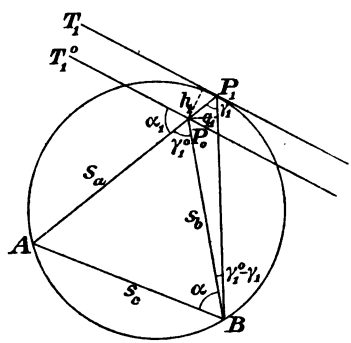


Fig. 107.

$$\alpha_1 = \alpha = (BP_0) - (BA)$$

und

$$(P_0T_1^0) = (P_0A) + \alpha_1 \tag{1}$$

ist, so ist der Richtungswinkel der Tangente bekannt.

Ferner ist

$$q_1 = s_b\,(\gamma_1^0 - \gamma_1)$$

und

$$P_0P_1 = \frac{q_1}{\sin\gamma_1} = s_b\,\frac{\gamma_1^0 - \gamma_1}{\sin\gamma_1}.$$

Hieraus findet sich

$$h_1 = P_0P_1 \sin\alpha_1 = s_b\,\frac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma_1}\,(\gamma_1^0 - \gamma_1),$$

und wenn wieder $(\gamma_1^0 - \gamma_1) = \delta_1$ gesetzt wird und statt der Winkel die Entfernungen eingeführt werden, so erhalten wir

$$h_1 = \frac{s_b s_a}{s_c}\,\frac{\delta_1}{\varrho''}, \tag{2}$$

wobei δ_1 in Sekunden gedacht ist.

Mit Hilfe der Gleichungen (1) und (2) kann für jeden gemessenen Winkel die Tangente des Bestimmungskreises kon-

struiert werden. Zur bequemeren Wahl des endgültigen Punktes berechnen wir noch diejenige Verschiebung der Tangente, die einer Winkeländerung von 10″ entspricht. Bezeichnen wir diese Verschiebung mit h_1', so ist

$$h_1' = \frac{s_b s_a}{s_c} \frac{10}{\varrho''}. \tag{3}$$

Beispiel. Zur genaueren Bestimmung des Punktes J wurden außer den schon S. 132 angegebenen beiden Winkeln noch zwei Winkel gemessen. Das Messungsergebnis ist nach den Bezeichnungen der Fig. 108

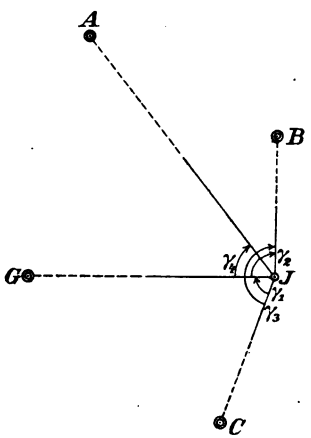


Fig. 108.

$$\gamma_1 = 73^0\ 24'\ 38''$$
$$\gamma_2 = 94\ 49\ 16$$
$$\gamma_3 = 168\ 12\ 56$$
$$\gamma_4 = 151\ 30\ 34\ .$$

Als vorläufige Koordinaten wurden die S. 133 berechneten angenommen

$$y_0 = +\ 11093{,}180\ \text{m}$$
$$x_0 = +\ 10029{,}528\ \text{m}.$$

Hieraus und aus den Koordinaten der Festpunkte wurden die vorläufigen Richtungswinkel berechnet, deren Differenzen die nachstehenden Winkel γ^0 ergaben. Zugleich sind nach (2) und (3) die Größen h und h' und nach (1) die Richtungswinkel der Tangenten berechnet und in nachstehender Tabelle zusammengestellt worden; die Richtungswinkel wurden hierbei mit ψ bezeichnet.

$\gamma_1^0 =$	73° 24′ 38″	$\delta_1 = 0$		$h_1 = 0$		$h_1' = 3{,}7$ cm	$\psi_1 = 333^0\ 13'$
$\gamma_2^0 =$	94 49 16	$\delta_2 = 0$		$h_2 = 0$		$h_2' = 3{,}0$	$\psi_2 =$ 38 11
$\gamma_3^0 =$	168 13 54	$\delta_3 = +$	58″	$h_3 = 11{,}4$ cm		$h_3' = 2{,}0$	$\psi_3 =$ 9 11
$\gamma_4^0 =$	151 30 48	$\delta_4 = +$	14	$h_4 =$ 7,8		$h_4' = 5{,}6$	$\psi_4 = 228$ 46

Fig. 109 stellt die fehlerzeigende Figur dar. Mit Berücksichtigung der Hilfslinien findet man, daß für den Punkt J die Quadratsumme der Verbesserungen der gemessenen Winkel ein Minimum wird. Die aus der Zeichnung abgegriffenen Verbesserungen der vorläufigen Koordinaten sind

$$\eta = +\ 0{,}073\ \text{m} \qquad \xi = -\ 0{,}004\ \text{m},$$

es sind also die endgültigen Koordinaten des Punktes J

$$y = +\,11093{,}253\text{ m} \qquad x = +\,10029{,}524\text{ m}.$$

Für die Ausgleichung des Rückwärtseinschneidens mit Richtungen kann dasselbe Verfahren angewendet werden, nur

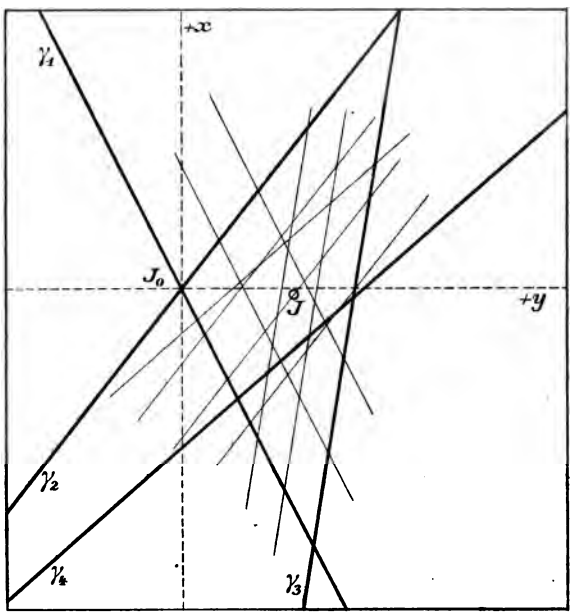


Fig. 109.

ist vorher der volle Richtungssatz in einzelne Winkel aufzulösen. Die Theorie lehrt (vgl. § 163), daß man an die Stelle eines Richtungssatzes diejenigen Winkel setzen kann, die durch Kombination der Richtungen entstehen. Sind z. B. die Richtungen $l_1\, l_2 \cdots l_n$ gemessen, so können an ihre Stelle die Winkel

$$\begin{array}{ll} l_2 - l_1 & l_3 - l_2 \cdots l_n - l_{n-1} \\ l_3 - l_1 & l_4 - l_2 \\ l_4 - l_1 & \vdots \\ \vdots & l_n - l_2 \\ l_n - l_1 & \end{array}$$

deren Anzahl gleich $\frac{n\,(n-1)}{2}$ ist, gesetzt werden. Für jeden

dieser Winkel sind nach (1), (2) und (3) die Größen ψ, h und h' zu berechnen und hiermit ist die fehlerzeigende Figur zu konstruieren.

Ist ein Punkt durch Vorwärtsabschneiden und Rückwärtseinschneiden gleichzeitig bestimmt worden, so werden die Strahlen beider Messungen zu einer fehlerzeigenden Figur vereinigt.

Bequem ist die graphische Ausgleichung bei einer kleinen Anzahl von Strahlen, wie die Konstruktionen auf S. 148 u. S. 151 zeigen. Sind viele Strahlen vorhanden, so wird schon die Zeichnung der fehlerzeigenden Figur umständlich. Noch schwerfälliger ist aber die Feststellung des Minimumpunktes, wenn man sich nicht mit der Auswahl eines Punktes nach Gutdünken begnügen will.

Die Aufgabe der graphischen Ausgleichung hat auch zu mehreren Versuchen Anlaß gegeben, nach denen der gesuchte Punkt durch rein geometrische Konstruktion gefunden werden kann. Am bekanntesten ist die Lösung von *Bertot* (1876), die auch bereits in der Praxis Aufnahme gefunden hat. Neuere ebenso interessante Lösungen wurden von *D'Ocagne* (1892) und *Klingatsch* (1894), letztere auf den Lehrsätzen der graphischen Statik beruhend, gegeben.

§ 66. Anschluß der Polygonzüge.

Nachdem durch die vorstehenden Methoden der trigonometrischen Punkteinschaltung das Netz der Dreieckspunkte derartig verdichtet ist, daß die Abstände der Punkte nicht größer als 500—1000 m sind, kann mit der Verbindung der Dreieckspunkte durch Polygonzüge oder Bussolenzüge begonnen werden. Für die ersteren werden die Anschluß- oder Abschlußrichtungen nach fernliegenden Dreieckspunkten gemessen. Da hierüber bereits im 6. Kapitel S. 97 alles Erforderliche gesagt worden ist, so bleibt nur noch der Fall unzugänglicher Endpunkte zu erörtern.

Der Anfangspunkt A des Polygonzuges $A-1-2\cdots$ (Fig. 110) sei durch die Spitze eines Turms gegeben, so daß der Anschlußwinkel β_0 und die erste Polygonseite $A-1$ nicht unmittelbar gemessen werden können. Es sind deshalb die Ko-

ordinaten des Punktes 1 zu bestimmen, der an die Stelle des unzugänglichen Festpunktes treten soll. Hierzu mißt man eine

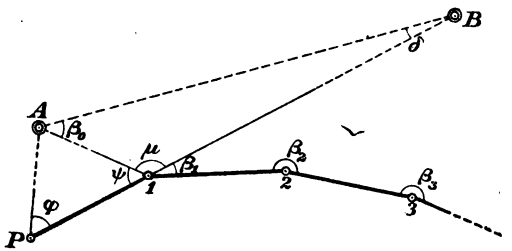


Fig. 110.

Hilfslinie $P-1$ und in ihren beiden Endpunkten die beiden Winkel φ und ψ, sowie den Winkel μ und erhält dann

$$\overline{A1} = \overline{P1}\,\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\psi)}. \tag{1}$$

Da aus den Koordinaten der Dreieckspunkte A und B die Strecke AB und der Richtungswinkel (A, B) bekannt sind, so hat man

$$\sin\delta = \sin\mu\,\frac{\overline{A1}}{\overline{AB}} \tag{2}$$

und

$$(A,1) = (A,B) - (\mu+\delta) \pm 180^0. \tag{3}$$

Hiermit findet man die Koordinaten des Punktes 1

$$\begin{aligned} y_1 &= y_a + \overline{A1}\sin(A,1) \\ x_1 &= x_a + \overline{A1}\cos(A,1). \end{aligned} \tag{4}$$

Der Punkt 1 wird nun als Anfangspunkt des Zuges betrachtet und auf ihm der Anschlußwinkel β_1 gemessen.

Man bezeichnet die Bestimmung des Hilfspunktes 1 auch als *Herablegen* des Festpunktes A.

§ 67. Fehlertheorie der Polygon- und Bussolenzüge.

Wir wollen im folgenden noch eine Untersuchung anstellen, mit welcher Genauigkeit die Punktbestimmung durch Polygonzüge erfolgt, wenn deren Endpunkte fehlerfrei vorliegen. Diese Untersuchung soll sich hier nur auf den mittleren Punkt eines

nahezu geradlinigen gleichseitigen Zuges beziehen, sie kann jedoch auf jeden beliebigen Zug ausgedehnt werden.

In Fig. 111 sind P_1 und P_n die beiden Endpunkte des Zuges, auf denen die Anschlußrichtungen nach A und B ge-

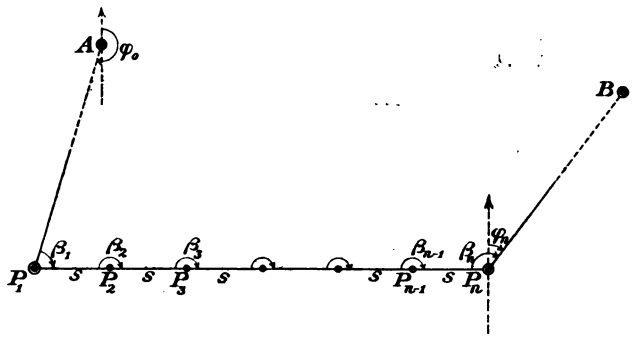


Fig. 111.

messen sind. Wir nehmen n als ungerade Zahl an. Die Brechungswinkel β_2 bis β_{n-1} sind nahezu 180^0, während alle Strecken nahe gleich s sind. Gegeben sind außer den Koordinaten der Punkte P_1 und P_n noch die Anschlußrichtungswinkel

$$(A, P_1) = \varphi_0 \quad \text{und} \quad (P_n, B) = \varphi_n .$$

Der einfacheren Entwicklung wegen legen wir die positive Ordinatenachse in die Zugrichtung. Der mittlere Fehler μ_y des mittelsten Polygonpunktes wird dann nur von der Längenmessung abhängig sein. Durch die Verteilung der Abschlußwidersprüche wird der mittelste Punkt so bestimmt, als ob seine Abstände von den beiden Endpunkten gemessen und gemittelt worden wären. Ist μ_s der mittlere Fehler einer Streckenmessung, so ist

$$(1) \qquad \mu_y^2 = \frac{n-1}{4}\,\mu_s^2 \quad \text{oder} \quad \mu_y = \pm \frac{\mu_s}{2}\sqrt{n-1} .$$

Zur Berechnung der mittleren Querverschiebung der Zugmitte oder des Wertes von μ_x ermitteln wir zunächst die Verbesserung v der Brechungswinkel, die aus dem Richtungsanschluß hervorgeht. Nach (5) § 43 S. 99 ist

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots + \beta_n + nv = \varphi_n - \varphi_0 + n \cdot 180^0$$

oder in einfacherer Bezeichnung

$$[\beta] + nv = C,$$

woraus

$$v = \frac{C}{n} - \frac{[\beta]}{n} \tag{2}$$

erhalten wird. Wird jedem Brechungswinkel die Verbesserung v hinzugefügt, so ergeben sich nach (3) § 41 S. 93 die folgenden Richtungswinkel der Polygonseiten

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 + \beta_1 + v - 180^0 \\ \varphi_2 &= \varphi_0 + \beta_1 + \beta_2 + 2v - 2 \cdot 180^0 \\ &\vdots \\ \varphi_{n-1} &= \varphi_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1} + (n-1)v - (n-1)180^0. \end{aligned} \tag{3}$$

Werden hiermit die Abszissenunterschiede berechnet, so tritt ein Widerspruch

$$w = x_n - x_1 - [s \cos \varphi] \tag{4}$$

auf, der auf die einzelnen Abszissenunterschiede gleichmäßig verteilt wird. Demnach wird die endgültige Abszisse des Zugmittelpunktes

$$x = x_1 + s \cos \varphi_1 + s \cos \varphi_2 + \cdots + s \cos \varphi_{\frac{n-1}{2}} + \frac{w}{2}. \tag{5}$$

Hieraus finden wir durch Differentiation unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die Richtungswinkel nahezu gleich 90^0 sind

$$dx = s\left(-d\varphi_1 - d\varphi_2 - \cdots - d\varphi_{\frac{n-1}{2}} + \frac{1}{2}d\varphi_1 + \frac{1}{2}d\varphi_2 + \cdots + \frac{1}{2}d\varphi_{n-1}\right)$$

oder

$$dx = \frac{s}{2}\left(-d\varphi_1 - d\varphi_2 - \cdots - d\varphi_{\frac{n-1}{2}} + d\varphi_{\frac{n+1}{2}} + \cdots + d\varphi_{n-1}\right). \tag{6}$$

Führen wir die Werte der einzelnen $d\varphi$ aus (3) und (2) ein, so wird

$$\begin{aligned} dx = \frac{s}{2}\Big(&d\beta_2 + 2d\beta_3 + \cdots + \frac{n-3}{2}\,d\beta_{\frac{n-1}{2}} + \frac{n-1}{2}\,d\beta_{\frac{n+1}{2}} \\ &+ \frac{n-3}{2}\,d\beta_{\frac{n+3}{2}} + \cdots + d\beta_{n-1} - \frac{(n-1)^2}{4n}[d\beta]\Big), \end{aligned}$$

und wenn das letzte Glied aufgelöst und $\frac{(n-1)^2}{4n} = c$ gesetzt wird,

$$dx = \frac{s}{2}\Big\{-c\,d\beta_1 - (c-1)\,d\beta_2 - (c-2)\,d\beta_3 - \cdots - \Big(c - \frac{n-3}{2}\Big)\,d\beta_{\frac{n-1}{2}}$$
$$- \Big(c - \frac{n-1}{2}\Big)\,d\beta_{\frac{n+1}{2}} - c\,d\beta_n - (c-1)\,d\beta_{n-1} - (c-2)\,d\beta_{n-2}$$
$$- \cdots - \Big(c - \frac{n-3}{2}\Big)\,d\beta_{\frac{n+3}{2}}\Big\}.$$

Bezeichnen wir den mittleren Fehler der Winkelmessung mit μ_w, so ist

$$(7)\quad \mu_x^2 = \frac{s^2}{4}\Big\{2c^2 + 2(c-1)^2 + 2(c-2)^2 + \cdots + 2\Big(c - \frac{n-3}{2}\Big)^2 + \Big(c - \frac{n-1}{2}\Big)^2\Big\}\mu_w^2.$$

Nach Zusammenfassung des ersten und letzten Gliedes und Einsetzen des Wertes von c erhalten wir

$$\mu_x^2 = \frac{s^2}{4}\left\{\frac{(n-1)^2}{8n^2}\Big(n^2 + 1 + \frac{(n-1)^2}{2}\Big) + 2\sum_{i=1}^{i=\frac{n-3}{2}}\Big(\frac{(n-1)^2}{4n} - i\Big)^2\right\}\mu_w^2$$

oder auch

$$\mu_x^2 = \frac{s^2}{4}\left\{\frac{(n-1)^2}{8n^2}\Big(n^2 + 1 + \frac{(n-1)^2}{2} - \frac{(n^2-1)(n-3)}{2}\Big) + 2\sum_{i=1}^{i=\frac{n-3}{2}} i^2\right\}\mu_w^2.$$

Da

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

ist, so wird schließlich

$$\mu_x^2 = \frac{s^2}{4}\Big\{\frac{(n-1)^2}{8n^2}\Big(n^2 + 1 + \frac{(n-1)^2}{2} - \frac{(n^2-1)(n-3)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{12}\Big\}\mu_w^2.$$

Der Klammerausdruck läßt sich weiter vereinfachen, so daß man den endgültigen Ausdruck erhält

$$\mu_x^2 = s^2\,\frac{n^2(n^2+2) - 3}{192\,n}\,\mu_w^2$$

oder

$$(8)\qquad \mu_x = \pm\, s\sqrt{\frac{n^2(n^2+2) - 3}{192\,n}}\,\mu_w.$$

Führen wir statt der Strecke s die Länge L des ganzen Zuges ein, so wird

$$L = (n-1)\,s,$$

also

$$\mu_x = \pm L\sqrt{\frac{n^2(n^2+2)-3}{192\,n\,(n-1)^2}}\,\mu_w. \tag{9}$$

Nachstehend ist die Wurzelgröße, die wir mit W bezeichnen wollen, für verschiedene Werte von n berechnet worden

$$\begin{aligned} n &= 3 \quad & W &= 0{,}137 \\ n &= 5 \quad & W &= 0{,}167 \\ n &= 7 \quad & W &= 0{,}195 \\ n &= 9 \quad & W &= 0{,}219 \\ n &= 11 \quad & W &= 0{,}241 \\ n &= 13 \quad & W &= 0{,}262 \\ n &= 15 \quad & W &= 0{,}281. \end{aligned}$$

Man sieht hieraus, daß bei gleichbleibender Zuglänge die mittlere Querverschiebung μ_x mit der Anzahl der Polygonpunkte wächst, woraus sich die Regel ergibt, die Polygonseiten so lang als möglich zu machen. Diese Forderung wird noch dadurch bekräftigt, daß μ_w bei kurzen Polygonseiten größer wird als bei langen.

Nehmen wir $\mu_w = \pm 0{,}5'$ an, so findet sich bei $L = 1000$ m

$$\begin{aligned} \text{für } n &= 3 \quad & \mu_x &= \pm 0{,}020 \text{ m} \\ \text{und für } n &= 15 \quad & \mu_x &= \pm 0{,}041 \text{ m}. \end{aligned}$$

Um die Vorteile des beiderseitig angeschlossenen Polygonzuges gegenüber einem nur einseitig angeschlossenen zu erkennen, berechnen wir noch für den letzteren die mittlere Querverschiebung. Hierzu haben wir nach (5)

$$dx = -s\,(d\varphi_1 + d\varphi_2 + \cdots + d\varphi_{\frac{n-1}{2}})$$

und nach Einführung der Werte der $d\varphi$ aus (3), wobei aber keine Verbesserungen der gemessenen Winkel auftreten,

$$dx = -s\left(\frac{n-1}{2}\,d\beta_1 + \frac{n-3}{2}\,d\beta_2 + \frac{n-5}{2}\,d\beta_3 + \cdots + d\beta_{\frac{n-1}{2}}\right)$$

und

$$\mu'^2_x = s^2\,\frac{n(n^2-1)}{24}\,\mu_w^2$$

oder

$$\mu'_x = \pm s\sqrt{\frac{n(n^2-1)}{24}}\,\mu_w. \tag{10}$$

Setzen wir auch hier

$$L = (n-1)\,s,$$

so erhalten wir

$$\mu_x' = \pm L\sqrt{\frac{n(n+1)}{24(n-1)}}\,\mu_w. \tag{11}$$

Es ist zu beachten, daß μ_x' sich auf den Endpunkt eines einseitig angeschlossenen Zuges von der Länge $\frac{L}{2}$ bezieht, also unmittelbar mit μ_x (Gl. (9)) verglichen werden kann.

Wird der Wurzelausdruck mit W' bezeichnet, so erhalten wir für verschiedene Werte von n

$$\begin{aligned} n &= 3 \quad W' = 0{,}500 \\ n &= 5 \quad W' = 0{,}559 \\ n &= 7 \quad W' = 0{,}623 \\ n &= 9 \quad W' = 0{,}685 \\ n &= 11 \quad W' = 0{,}742 \\ n &= 13 \quad W' = 0{,}794 \\ n &= 15 \quad W' = 0{,}845. \end{aligned}$$

Die Werte von μ_x' sind also fast 3mal so groß als die entsprechenden Werte von μ_x.

Wir können die Entwicklungen von S. 155 endlich noch zur Aufstellung der Fehlertheorie des nahezu geradlinigen beiderseitig angeschlossenen Bussolenzuges verwenden. Hierzu ist nach (6) für den Mittelpunkt des Zuges

$$dx = \frac{s}{2}\left(-d\varphi_1 - d\varphi_2 - \cdots - d\varphi_{\frac{n-1}{2}} + d\varphi_{\frac{n+1}{2}} + \cdots + d\varphi_{n-1}\right),$$

und da die Richtungswinkel unmittelbar gemessen sind, so wird

$$\mu_x^2 = s^2\frac{n-1}{4}\mu_r^2,$$

wobei μ_r der mittlere Fehler eines Richtungswinkels ist. Es ist also

$$\mu_x = \pm\frac{s}{2}\sqrt{n-1}\,\mu_r \tag{12}$$

oder auch

$$\mu_x = \pm\frac{L}{2\sqrt{n-1}}\,\mu_r. \tag{13}$$

Es sind demnach beim Bussolenzug die Strecken möglichst klein zu wählen.

§ 68. Koordinatenumformung.

In Fig. 112 sind die Koordinaten des Punktes P in dem System $x'y'$ gegeben, das gegen das System xy um die Strecken a und b verschoben und um den Winkel α gedreht ist. Es ergeben sich aus der Figur leicht die beiden Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} y &= b + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \\ x &= a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha . \end{aligned}$$

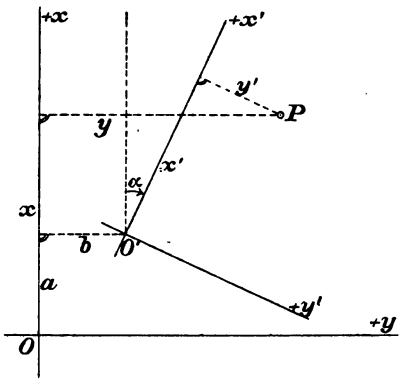


Fig. 112.

In der praktischen Anwendung tritt die Aufgabe meistens so auf, daß nicht die Konstanten a, b und α gegeben sind, sondern die Koordinaten mehrerer Punkte in beiden Systemen, woraus dann die Konstanten berechnet werden können.

Sind z. B. zwei Punkte P_1 und P_2 in beiden Systemen gegeben, so gelten die Gleichungen

$$(2)\qquad \begin{aligned} y_2 - y_1 &= (x_2' - x_1') \sin\alpha + (y_2' - y_1') \cos\alpha \\ x_2 - x_1 &= (x_2' - x_1') \cos\alpha - (y_2' - y_1') \sin\alpha , \end{aligned}$$

aus denen man erhält

$$(3)\qquad \begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{(y_2 - y_1)(x_2' - x_1') - (x_2 - x_1)(y_2' - y_1')}{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} \\ \cos\alpha &= \frac{(x_2 - x_1)(x_2' - x_1') + (y_2 - y_1)(y_2' - y_1')}{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} . \end{aligned}$$

Hieraus können $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ berechnet werden und durch Einsetzen dieser Werte und der beiden Koordinatenpaare von P_1 oder P_2 in die Gleichungen (1) erhält man a und b.

In vielen Fällen ist es jedoch bequemer, statt der Transformation der Koordinaten nach (1) eine Transformation von Koordinatenunterschieden auszuführen. Es seien wieder die Koordinaten zweier Punkte P_1 und P_2 in beiden Systemen gegeben, und für die Koordinatenunterschiede $\Delta y'$ und $\Delta x'$ die Differenzen $\Delta y - \Delta y'$ und $\Delta x - \Delta x'$ zu berechnen. Nach den Gl. (2) ist

$$(4)\qquad \begin{aligned} \Delta y - \Delta y' &= +\Delta x' \sin\alpha + \Delta y' (\cos\alpha - 1) \\ \Delta x - \Delta x' &= -\Delta y' \sin\alpha + \Delta x' (\cos\alpha - 1). \end{aligned}$$

Setzen wir hierin die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (y_2 - y_1) - (y_2' - y_1') &= +(x_2' - x_1') \sin\alpha + (y_2' - y_1')(\cos\alpha - 1) \\ (x_2 - x_1) - (x_2' - x_1') &= -(y_2' - y_1') \sin\alpha + (x_2' - x_1')(\cos\alpha - 1). \end{aligned}$$

Führen wir die Bezeichnungen

$$(5)\qquad \begin{aligned} (y_2 - y_1) - (y_2' - y_1') &= \eta \\ (x_2 - x_1) - (x_2' - x_1') &= \xi \end{aligned}$$

ein, so finden wir

$$(6)\qquad \begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{(x_2' - x_1')\eta - (y_2' - y_1')\xi}{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} \\ \cos\alpha - 1 &= \frac{(x_2' - x_1')\xi + (y_2' - y_1')\eta}{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2}. \end{aligned}$$

Sind hiernach die Werte von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha - 1$ berechnet, so ist durch die Gleichung (4) die Aufgabe gelöst.

Auf eine Eigentümlichkeit der vorstehenden Transformationsgleichungen ist noch hinzuweisen. Es mögen die Koordinaten der beiden Systeme xy und $x'y'$ in verschiedenen Maßeinheiten, z. B. in Metern und Fuß gerechnet werden. In Fig. 112 ist dann $x'v$ und $y'v$ statt x' und y' zu setzen, wo v einen Vergrößerungsfaktor bezeichnet. Werden hiermit die Werte von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ berechnet und in die Gl. (1) eingesetzt, so hebt sich der Faktor v wieder vollständig heraus, er braucht also bei der Transformation nicht berücksichtigt zu werden. Es ist jedoch zu beachten, daß der ohne Rücksicht auf v berechnete Winkel α nicht mehr der Winkel zwischen den beiden Systemen, sondern nur noch eine Rechengröße ist.

Die Transformation findet u. a. dann Verwendung, wenn zwei benachbarte Feldmarken in bezug auf zwei getrennte Koordinatensysteme aufgenommen sind, deren Abszissenachsen zwar beide nach Norden orientiert, aber teils durch die Konvergenz der Meridiane, teils durch die Ungenauigkeit der Orientierung nicht parallel sind. Wenn an der gemeinsamen Grenze mindestens zwei Punkte von beiden Systemen aus aufgenommen sind, so können nach dem Vorstehenden alle Koordinaten des einen Systems in solche des andern umgewandelt werden.

Für die trigonometrischen Berechnungen kommen in erster Linie sechsstellige Logarithmen in Betracht; da jedoch in neuerer Zeit die Rechenmaschine immer weitergehende Verbreitung gefunden hat, so ist auch bei den vorstehenden Arbeiten die logarithmische Rechnung jetzt vielfach zurückgetreten. Von Tafelwerken seien genannt (vgl. auch S. 110):

*Bremiker*s Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit sechs Dezimalstellen. Neu bearbeitet von Th. Albrecht. Berlin.

W. Jordan, Opus Palatinum, Sinus- und Cosinus-Tafeln von 10″ zu 10″. Hannover und Leipzig 1897.

8. Kapitel.

Das Planzeichnen.

§ 69. Kartierungsinstrumente.

Die Ergebnisse der geschilderten Messungen werden zur Darstellung des aufgenommenen Geländes in einer *Karte* oder einem *Lageplan* verwendet. Der Maßstab der Karte richtet sich nach dem Zweck derselben. Da die trigonometrisch-geometrische Aufnahme als genauestes Messungsverfahren in der Regel zur Sicherung der Eigentumsrechte im Grundbesitz dient, so muß der Maßstab der Karte groß genug sein, um die Wiederherstellung verloren gegangener Grenzen mit genügender Genauigkeit im Gelände zu ermöglichen, andrerseits aber auch zu der Genauigkeit der Messung im richtigen Verhältnis stehen. Die Vorschriften der preußischen Katasterverwaltung bestimmen für die den Zwecken der Grundsteuerverwaltung und des Grundbuchs dienenden Karten den Maßstab 1:2000, bei wertvollerem Grundbesitz 1:1000 und in Städten 1:500. Der Maßstab 1:4000 wird nur zur Darstellung wenig wertvoller Flächen ausreichend sein.

Das Auftragen der gemessenen Längen erfolgt entweder mit einem Zeichenmaßstab, an dessen abgeschrägter Teilungskante die einzelnen Punkte mit einer feinen Nadel eingestochen werden, oder unter Anwendung des Zirkels und des Transversalmaßstabes (Fig. 113). Die Linien AB und CD sind in

zehn Teile eingeteilt und je zwei aufeinander folgende Teilungspunkte beider Skalen durch Diagonalen verbunden. Diese werden durch Parallelen zu AB und CD ebenfalls in zehn Teile

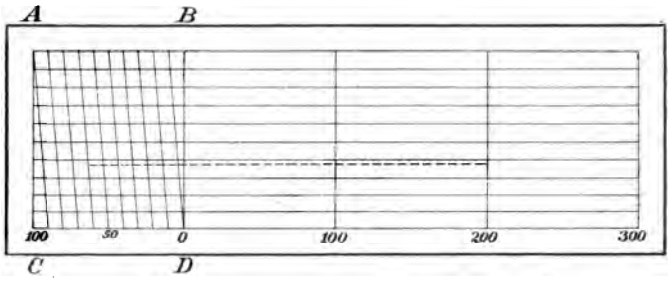


Fig. 113.

geteilt und ermöglichen so das Abgreifen der Längen bis auf Hundertstel der Einheit von CD. In Fig. 113 ist die Länge von 263,7 m durch eine gerissene Linie kenntlich gemacht.

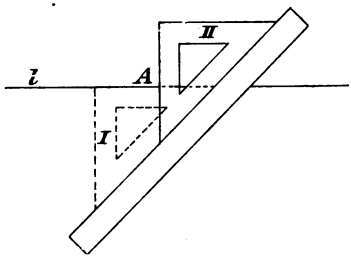


Fig. 114.

Zur Zeichnung der Ordinaten ist noch ein kleines rechtwinkliges Zeichendreieck erforderlich, das zur Konstruktion eines rechten Winkels an der Linie l (Fig. 114) im Punkte A durch Parallelverschiebung an einem Lineal nacheinander in die beiden Lagen I und II gebracht wird.

Die *Kartierung* einer kleinen lediglich durch geometrische Messungen aufgenommenen Figur, wie Fig. 115, beginnt mit der Zeichnung der Hauptabszissenachse AB und dem Auftragen der Hauptmessungspunkte C, D und E nach ihren rechtwinkligen Koordinaten. Die Richtigkeit der Zeichnung ist sofort durch Nachmessung der Länge von AC, CB, BE usw. zu prüfen; erst dann erfolgt die dauernde Bezeichnung der Punkte durch Einstechen mit einer Nadel. Hiermit ist die Lage der ein-

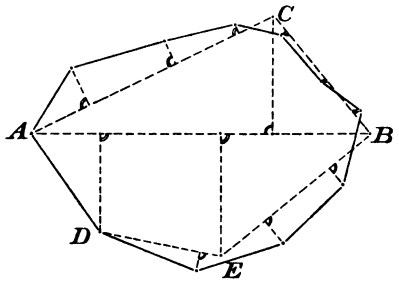


Fig. 115.

zelnen Abszissenachsen gegeben, von denen aus die aufgenommenen Geländepunkte konstruiert werden können. Die ganze Zeichnung wird in feinen Bleilinien ausgeführt.

Zum Auftragen von Punkten nach rechtwinkligen Koordinaten sind auch besondere *Kartierungsinstrumente* konstruiert, deren einfachstes Fig. 116 andeutet. Der Ordinatenschieber *b* wird derartig an die Abszissenachse gelegt, daß diese die abgeschrägte Teilungskante im Nullpunkt rechtwinklig schneidet. Der Nullpunkt des Abszissenlineals *a* fällt mit dem Zeiger *z* des Schiebers zusammen, sobald die Kante von *b* durch den Nullpunkt der Abszissenachse geht. Zum genauen Anlegen von *a* wird ein Hilfslineal von der halben Breite des Schiebers benutzt, das an die Abszissenachse gelegt die Lage von *a* bestimmt. Mit dem Zeiger *z* werden der Reihe nach die einzelnen Abszissen eingestellt und jedesmal die Ordinatenlängen an der Teilung des Schiebers *b* mit einer Nadel auf dem Papier bezeichnet.

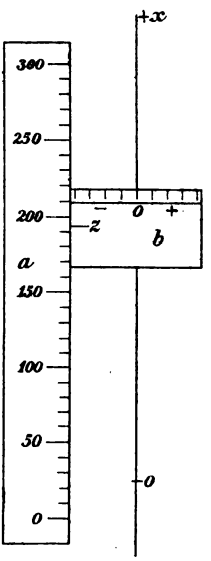


Fig. 116

Bei einer zweiten Form des Kartierungsinstruments erhält man die einzelnen Punkte als Schnitte gerader Linien. Das Lineal *a* des in Fig. 117 dargestellten Instruments ist mit einer Einteilung versehen, deren Einheit gleich der $\sqrt{2}$fachen Einheit des Kartenmaßstabes ist. An diesem Lineal läßt sich ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck *b* mit einem Zeiger *z* verschieben. Zum Auftragen eines Punktes *P* mit den Koordinaten x_p und y_p wird das Dreieck *b* mit einer Kathete an die Abszissenachse gelegt (Lage I), an dem Lineal verschoben, bis die andere Kathete durch den Abszissennullpunkt geht (Lage II)

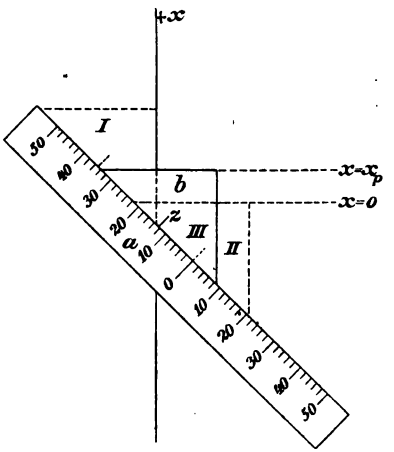


Fig. 117.

und hierauf der Linealnullpunkt an den Zeiger z gelegt. Wird nun der Zeiger von b auf die Abszisse $x_p = 12{,}5$ eingestellt (Lage III), so kann längs der oberen Kante des Dreiecks die Ordinate von P gezeichnet werden. Um auch die Länge der Ordinate abtragen zu können, wird das Dreieck noch einmal in die Lage I zurückgeführt und der Linealnullpunkt an den Zeiger z angelegt. Wird nun bei unveränderter Lage des Lineals der Zeiger auf y_p eingestellt, so schneidet eine längs der rechten Kathete gezogene Linie die schon gezeichnete Ordinate im Punkte P.

§ 70. Kartierung mit Hilfe eines Quadratnetzes.

Die Kartierungsinstrumente sind meistens nur für kurze Ordinaten bis zur Länge von höchstens 10 cm eingerichtet. Für längere Ordinaten ist überhaupt das bisher geschilderte einfache Kartierungsverfahren nicht mehr anwendbar, weil die gewünschte Genauigkeit nur mit sehr großer Mühe erreicht werden könnte. Oft wird auch eine getrennte Darstellung der Aufnahme auf zwei oder mehr Blättern erforderlich sein. Für beide Zwecke ist es notwendig, vor Beginn der Kartierung auf dem Zeichenblatt mit größtmöglicher Genauigkeit ein Quadratnetz zu konstruieren, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel und von ihnen um runde Werte entfernt sind. Da bei der späteren Kartierung Längen von 1 dm mit dem Zirkel bequem abgegriffen werden können, so empfiehlt es sich, die Seiten des Quadratnetzes gleich 1 dm zu machen. Zur Konstruktion des Quadratnetzes werden zwei sich unter einem möglichst großen Winkel schneidende Linien gezeichnet und auf ihnen vom Schnittpunkt aus nach allen vier Richtungen gleiche Längen abgetragen, so daß man durch Verbindung der vier gefundenen Punkte ein Rechteck erhält. Als Zeichenhilfsmittel benutzt man hierbei ein Lineal aus Sägeblattstahl, das an einer Kante eine Dezimeterteilung trägt. Hiermit erfolgt auch zugleich die weitere Einteilung der Rechteckseiten in Dezimeter und die Verbindung der Teilpunkte zur Vollendung der Quadratnetzzeichnung.

Nicht immer kann die Lage des Quadratnetzes auf dem

Zeichnungsbogen beliebig angenommen werden, es ist vielmehr auf die Gestalt des Lageplans Rücksicht zu nehmen und hiernach von vornherein die Lage der beiden Hauptlinien zu wählen.

Vielfach werden auch besonders für diesen Zweck konstruierte Instrumente angewendet, mit denen die Konstruktion ohne Mühe ausgeführt werden kann.

Bei der nun folgenden Eintragung aller Punkte, deren Koordinaten berechnet sind, also der Dreiecks-, Polygon- und Kleinpunkte, beschränkt sich die Kartierung auf das Abtragen der Abszissen und Ordinaten innerhalb der einzelnen Quadrate.

Ein nicht zu unterschätzender Vorteil des Quadratnetzes ist die Möglichkeit, den im Laufe der Zeit eintretenden Papierschwund jederzeit berücksichtigen zu können. Aus den Seiten des Quadratnetzes ist der Betrag der Papierveränderung und damit die wahre Größe aller aus der Karte abgegriffenen Längen leicht zu bestimmen.

Nachdem alle Punkte kartiert sind, ist das Netz der Messungslinien zu zeichnen und von diesen aus die Einzelaufnahme mit einem Kartierungsinstrument einzutragen.

Das Ausziehen der Zeichnung mit schwarzer Tusche beginnt mit der Bezeichnung der Grenzhügel, Steine, Pfähle usw. durch besondere Signaturen. Diese, sowie auch alle Zirkelstiche werden beim Ausziehen frei gelassen. Die Messungspunkte, die ja zum Teil im Boden dauernd vermarkt sind, werden mit kleinen roten Kreisen umgeben und die Enden der von ihnen ausgehenden Messungslinien durch kurze gerissene Linien angedeutet. Dasselbe geschieht auch mit den Ecken der Quadrate und den Quadratseiten in ihrer Nähe.

Die einzelnen Bodenkulturarten durch Flächenkolorit kenntlich zu machen, ist nur dann ratsam, wenn auf die äußerste Genauigkeit verzichtet wird, da durch die Feuchtigkeit ein Verziehen des Papiers zu befürchten ist. Unschädlich ist dagegen die Bezeichnung von Grenzen u. dgl. durch schmale Farbstreifen.

Außer der Angabe der Nordrichtung und des Kartenmaßstabes bildet noch die Kartenschrift einen wichtigen Bestandteil der Karte, von deren Ausführung das Aussehen der Zeichnung wesentlich abhängt.

§ 71. Der Pantograph.

Zur Übertragung einer Karte aus einem Maßstab in einen andern dient ein von dem Jesuitenpater *Scheiner* im Jahre 1631 konstruiertes Instrument, der *Pantograph* oder *Storchschnabel*. Werden die Eckpunkte eines beliebigen Polygons I (Fig. 118) mit einem beliebigen Punkte P verbunden und alle Verbindungslinien nach demselben Verhältnis geteilt, so bilden die Teilpunkte eine der ursprünglichen ähnliche und nach dem obigen Verhältnis verkleinerte Figur.

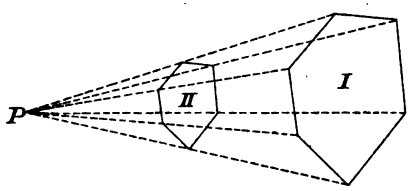


Fig. 118.

Diesem Grundgedanken entspricht die Wirkungsweise des Pantographen. Die Punkte P und F (Fig. 119) bilden zwei gegenüberliegende Ecken eines Parallelogramms, das sich aus vier

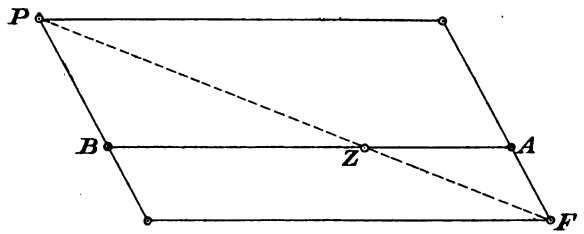


Fig. 119.

durch Scharniere verbundenen Stäben zusammensetzt. Ein fünfter Stab AB teilt zwei gegenüberliegende Seiten des Parallelogramms nach demselben Verhältnis, nach dem er selbst im Punkte Z geteilt wird. Aus der Ähnlichkeit der in der Figur sichtbaren Dreiecke folgt, daß Z für beliebige Werte des Parallelogrammwinkels stets in der Geraden PF liegt, und daß PF durch Z stets in demselben Verhältnis geteilt wird. Ist in F ein Fahrstift, in Z ein Zeichenstift befestigt, und P als feststehend gedacht, so kann die Vorrichtung nach Fig. 118 zum Verkleinern und nach Vertauschung von F und Z zum Vergrößern von Zeichnungen verwendet werden.

Fig. 120 zeigt einen Präzisionspantographen von *Coradi* in

Zürich, der in P, Z und F die der vorhergehenden Figur entsprechenden Punkte erkennen läßt. Der Stab AB ist auf den beiden Parallelogrammseiten vermittelst zweier Hülsen ver-

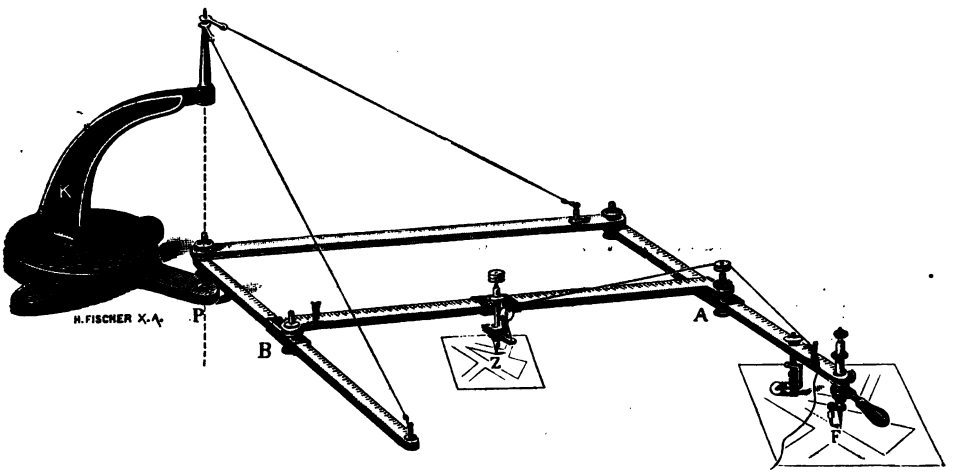


Fig. 120.

schiebbar, ebenso auch der Zeichenstift Z auf AB. Zur richtigen Einstellung der drei Hülsen bei A, B und Z sind die drei Stäbe mit gleichartigen Einteilungen versehen, derartig, daß die beiden obengenannten Grundbedingungen erfüllt sind, sobald die drei Schieber auf dieselbe Zahl eingestellt sind.

In der Verlängerung der lotrecht zu stellenden Scharnierachse des Pols P befinden sich an einem Eisenstativ K die Aufhängepunkte zweier Drähte, durch welche die beiden in P zusammenstoßenden Stäbe getragen werden. Da der Pantograph bei Karten nicht zum Zeichnen von Linien, sondern zur Übertragung von Punkten benutzt wird, so besteht der Zeichenstift Z in der Regel in einer Nadel, die in das Papier gedrückt werden kann. In Fig. 120 ist noch eine Vorrichtung sichtbar, durch die das Niederfallen der Nadel vom Fahrstift aus vermittelst einer Schnur bewirkt wird, ohne daß der Zeichner genötigt ist, den Handgriff des Fahrstifts loszulassen.

Für die im Auftrage preußischer Staatsbehörden herzustellenden Pläne sind eingehende Vorschriften enthalten in:

Bestimmungen über die Anwendung gleichmäßiger Signaturen für topographische und geometrische Karten, Pläne und Risse. 5. Aufl. Berlin 1905.

9. Kapitel.

Geometrische Meßtischaufnahme.

§ 72. Das Meßtischverfahren.

Der Grundgedanke der bisher geschilderten Messungen ist der, daß für die Punkte der physischen Erdoberfläche rechtwinklige Koordinaten in bezug auf verschiedene möglichst passend angenommene Koordinatensysteme bestimmt werden, und daß durch ein *Liniennetz*, *Polygonnetz* und *Dreiecksnetz* die einzelnen Koordinatensysteme miteinander verbunden werden, so daß schließlich alle aufgenommenen Punkte auf ein gemeinsames rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen sind. Die Aufnahme liefert somit die zum nachträglichen Entwurf einer Karte erforderlichen Zahlenwerte.

Im Gegensatz hierzu bezweckt die *Meßtischaufnahme*, bereits im Felde ein verjüngtes Bild von der Horizontalprojektion der physischen Erdoberfläche herzustellen. Die Methode der Meßtischaufnahme besteht in der Messung von Winkeln auf graphischem Wege, während die Messung *einer* Strecke lediglich zur Bestimmung des Maßstabverhältnisses dient. Es werden jedoch, wie wir sehen werden, auch noch weitere Streckenmessungen zur Vereinfachung der Aufnahme in manchen Fällen zu Hilfe genommen.

Als Träger der Zeichnung dient der *Meßtisch*, eine Holzplatte, die mit Hilfe eines Stativs horizontal aufgestellt und um eine vertikale Achse gedreht werden kann. Die *Meßtischplatte*, die meistens ein Quadrat von etwa 60 cm Seitenlänge bildet, ist aus mehreren Holzschichten zusammengesetzt, um gegen allmähliches Verziehen geschützt zu sein. Die Platte wird in der Regel nicht unmittelbar vom Stativ getragen, sondern ruht auf einem besonderen Dreifuß (Fig. 121), der auf dem Stativ verschiebbar ist und vermittelst Herzschraube und

Feder darauf festgehalten wird. Der Dreifuß ist ähnlich dem eines Repetitionstheodolits eingerichtet, er trägt jedoch statt des Limbus eine Scheibe, auf der die Meßtischplatte mit drei Schrauben befestigt werden kann. Die Fig. 121, die ein Meßtischstativ mit aufgesetztem Dreifuß aus der Werkstätte von *Max Hildebrand* in Freiberg i. Sa. darstellt, zeigt ferner, wie durch die Klemmvorrichtung und die Feinbewegung der Tisch in eine bestimmte Lage gebracht und darin festgehalten werden kann.

Fig. 121.

Zur Befestigung des *Meßtischblattes* auf der Platte wird der Bogen auf der Unterseite mit geschlagenem Eiweiß gleichmäßig angefeuchtet, mit einem Tuch auf der Platte glatt gestrichen und mit seinen überstehenden Teilen an den Seitenflächen derselben befestigt.

Zur Aufnahme und Zeichnung der Winkel diente in früherer Zeit ausschließlich das Diopterlineal (Fig. 122), bei dem durch die beiden Diopter eine die Fläche des Lineals in seiner Kante senkrecht schneidende Visierebene bestimmt ist. Um einen Winkel auf dem Meßtischblatt darstellen zu können, muß der Meßtisch horizontal aufgestellt und der Scheitel des Winkels auf den Tisch heraufgelotet werden. Das Horizontalstellen erfolgt näherungsweise durch entsprechendes Eintreten der Stativbeine, und hierauf genauer mit Hilfe einer auf die Platte gesetzten Dosenlibelle durch die Dreifußschrauben.

Fig. 122.

Das Heraufloten des Scheitels A geschieht entweder mit einer *Lotgabel*, deren Gebrauch aus Fig. 123 hervorgeht, oder durch Herunterloten zweier Eckpunkte des Meßtischs, Messen der Abszisse und Ordinate des Punktes in bezug auf die heruntergelotete Linie und Abtragen dieser Größen auf dem Meßtischblatt. Zur Winkelmessung wird die Zeichenkante des Lineals an den gefundenen Punkt a angelegt, die Visierebene der Diopter nacheinander in die beiden Schenkel des Winkels gebracht und längs der Linealkante je eine Linie gezogen.

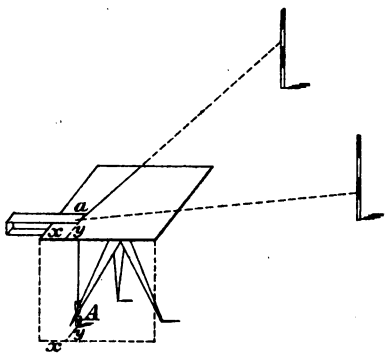


Fig. 123.

Gegenwärtig wird das Diopterlineal nur noch für untergeordnete Arbeiten verwendet, für genaue Messungen ist es bald nach

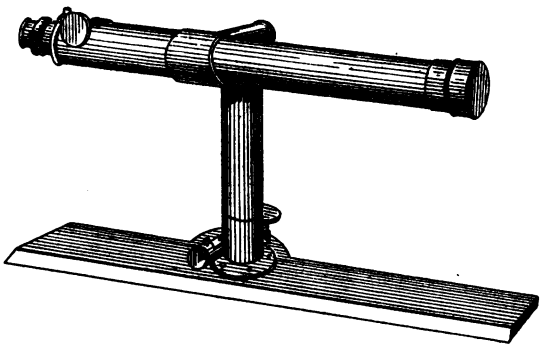


Fig. 124.

der Erfindung des Fernrohrs durch die *Kippregel* verdrängt worden (Fig. 124), bei der die Dioptereebene durch die Visierebene des um eine horizontale Kippachse drehbaren Fernrohrs ersetzt wird.

§ 73. Die Justierung der Kippregel.

Da es sich hier wie beim Theodolit um die Messung von Horizontalwinkeln, also Winkeln zwischen Vertikalebenen handelt, so muß die Visierebene beim Gebrauch der Kippregel vertikal

stehen. Die Visier- und Kippachse unterliegen also denselben Bedingungen, die wir beim Theodolit kennen gelernt haben. Während dort jedoch eine Kompensation der Achsenfehler durch Durchschlagen des Fernrohrs möglich war, ist hier die Benutzung des Instruments nur in einer Fernrohrlage bequem; hier müssen deshalb die Justierungsbedingungen wirklich erfüllt sein, es muß also die Visierachse senkrecht zur Kippachse stehen und die Kippachse horizontal liegen.

Um zur Erfüllung der zweiten Bedingung von einer unvermeidlichen geringen Neigung der Meßtischplatte unabhängig zu sein, ist der Zeichenkante gegenüber eine Kippschraube angebracht (in Fig. 124 hinter der Säule sichtbar), mit der man die auf dem Lineal befindliche Röhrenlibelle zum Einspielen bringen kann. Die Justierung der Kippregel beschränkt sich hiernach auf die Beseitigung des Kollimationsfehlers und die Parallelstellung der Kippachse und der Libellenachse. Beide Justierungen sind bereits für den Theodolit genügend erörtert worden. Die Berichtigung des Kollimationsfehlers, die zuerst zu erledigen ist, kann nach dem S. 84/85 geschilderten Verfahren ausgeführt werden, wobei das Drehen des Theodolits um seine Stehachse durch Drehen der Linealkante um einen auf der Meßtischplatte bezeichneten Punkt zu ersetzen ist. Zur Herstellung der Parallelität zwischen Kippachse und Libellenachse ist die erstere nach dem Verfahren von S. 85/86 mittelst der Kippschraube horizontal zu stellen und die Libelle mit der Justierschraube zum Einspielen zu bringen. Häufig ist auch eine kleine Reiterlibelle für die Kippachse vorhanden, so daß das Horizontalstellen derselben bequemer ausführbar ist.

§ 74. Die Aufnahme einfacher Figuren.

Für die Aufnahme kleinerer geradlinig begrenzter Figuren mit Hilfe des Meßtischs ist zunächst zur Festlegung des Verjüngungsgrades der Karte eine Strecke AB (Fig. 125) im Gelände zu messen und auf dem Meßtischblatt in dem gewählten Maßstabverhältnis als Strecke ab abzutragen. Diese Strecke wird häufig zu kurz sein, um ein genaues Anlegen des Kippregellineals zu ermöglichen, deshalb ist es notwendig, die Verlängerung von ab am Rande des Blattes durch *Anschnitte* zu

bezeichnen. Hierauf ist der Meßtisch im Punkte A derartig aufzustellen, daß a in der Lotrichtung von A und ab in der Richtung AB liegt. Mit Hilfe der an ab angelegten Kippregel und der Lotgabel läßt sich diese Aufstellung nach einigen Versuchen erreichen, bequemer ist es jedoch, im Gelände den Punkt

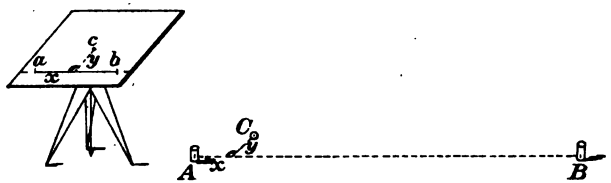


Fig. 125.

C zu suchen, über dem der Mittelpunkt c der Meßtischplatte aufzustellen ist. c liegt in der Drehachse des Meßtischdreifußes, die durch ein an der Herzschraube befestigtes Lot bezeichnet wird. Indem man die Koordinaten x und y von c in bezug auf ab mißt und im Gelände in bezug auf AB absetzt, erhält man C und kann auf diesem Punkte den Meßtisch zentrisch aufstellen. Ist dies geschehen, so wird die Kippregel an ab angelegt und der Meßtisch solange gedreht, bis B in der Visierebene liegt. Den so aufgestellten Meßtisch bezeichnet man als *orientiert*.

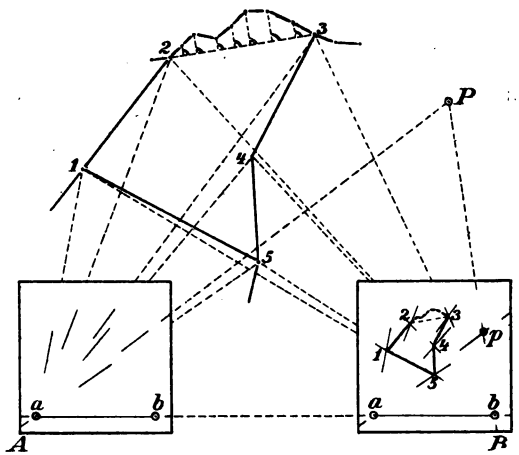


Fig. 126.

Während die Kippregel beständig an den Punkt a angelegt bleibt, werden der Reihe nach die im Gelände durch Baken bezeichneten Eckpunkte 1, 2, 3 usw. (Fig. 126) der aufzunehmenden Figur mit dem Fernrohr eingestellt und längs der Zeichenkante des Lineals feine Linien gezogen. Man darf jedoch hierbei nie versäumen, die Röhrenlibelle mit Hilfe

der Kippschraube zum Einspielen zu bringen. Hierauf wird der Meßtisch nach *B* getragen, dort orientiert, und die Aufnahme der Strahlen von *B* nach den einzelnen Punkten wie in *A* ausgeführt. Es genügt, die Visierstrahlen nur an den Stellen auszuziehen, an denen die Lage der einzelnen Punkte auf der Zeichnung vermutet werden kann. Die Schnittpunkte der Strahlen werden durch feine Nadelstiche dauernd bezeichnet.

In Fällen, in denen es nicht möglich ist, einzelne Punkte von beiden Standpunkten aus anzuvisieren, wird die Punktbestimmung durch Ziehen nur eines Strahls und Messung der Entfernung ausgeführt, was allerdings sehr zeitraubend ist.[1]) Direkte Messung von Entfernungen wird man auch bei Punkten anwenden müssen, die sich, vielleicht durch Geländehindernisse verdeckt, überhaupt nicht anvisieren lassen. Zwei auf der Karte schon vorhandene Punkte z. B. 2 und 3, Fig. 126, werden dann durch eine Gerade verbunden, und die betreffenden Punkte von dieser Geraden aus durch Abszissen und Ordinaten aufgenommen.

§ 75. Das Stationieren.

Eine Probe für die Richtigkeit der einzelnen Punktbestimmungen ist darin zu finden, daß man den Meßtisch noch auf einem dritten Geländepunkt, dessen Lage auf dem Meßtischblatt auch bereits gegeben ist, aufstellt und auch von hier aus die Strahlen nach den einzelnen Punkten zieht. Erst dann, wenn die drei entsprechenden Strahlen sich überall in einem Punkte schneiden, ist die Richtigkeit der erhaltenen Figur verbürgt.

Da Strahlen mit Schnittwinkeln von weniger als 30^0 keine genaue Punktbestimmung zulassen, bei einer Aufnahme von nur zwei Standpunkten aus jedoch kaum zu vermeiden sein werden, so wird auch aus diesem Grunde die Benutzung weiterer Standpunkte erforderlich sein.

Die Bestimmung der Lage neuer Standpunkte auf dem Meßtischblatt, das *Stationieren*, kann in erster Linie nach dem-

1) Häufig wird die Entfernungsmessung mit Hilfe des *Distanzmessers* (vgl. § 112) ausgeführt werden können, und dann ist diese Methode der Polarkoordinatenmessung sehr bequem.

selben Verfahren ausgeführt werden, das zur Bestimmung der Geländepunkte dient, und das der Theodolitaufnahme entsprechend als *Vorwärtsabschneiden* bezeichnet werden kann. Es ist jedoch erforderlich, für alle Punkte, die später als Standpunkte des Meßtisches dienen sollen, die Anschnitte der bestimmenden Strahlen am Rande auszuziehen, um ein genaues Anlegen der Kippregel späterhin zu ermöglichen. So ist in Fig. 126 der Punkt P als neuer Stationspunkt durch Vorwärtsabschneiden bestimmt worden.

Häufig kann die Punktbestimmung nach dem Verfahren des *Seitwärtsabschneidens* auch bei der Meßtischaufnahme mit Vorteil angewendet werden. Die Aufgabe wird hier am einfachsten so gestellt, daß nicht die Lage eines Punktes P (Fig. 127),

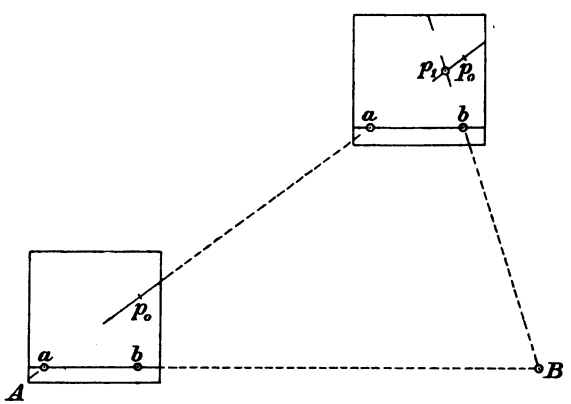


Fig. 127.

sondern die eines beliebigen in der Nähe von P gelegenen Punktes auf dem Meßtischblatt gefunden werden soll. Es sind hierzu wieder zwei Geländepunkte A und B als Punkte a und b der Karte gegeben, ein Punkt P im Gelände durch eine Bake bezeichnet. Die Messung im Punkte A ist dieselbe wie beim Vorwärtsabschneiden. Auf dem von A nach P gezogenen Strahl wird ein vermutlich in der Nähe von P liegender Punkt mit p_0 bezeichnet und hierauf der Meßtisch mit p_0 über P durch die Richtung nach A orientiert. Zieht man nun den Strahl bB, so erhält man den Punkt p_1, und durch Herabloten desselben

den Punkt P_1, der dann als Stationspunkt verwendet werden kann.

Nicht immer wird die Bestimmung weiterer Stationspunkte nach diesen Verfahren angängig sein, da bei ihrer Anwendung übersichtliches Gelände vorausgesetzt wird. Im andern Falle wird man die Längenmessung zu Hilfe nehmen, und durch Strecken- und Winkelmessung entweder *geschlossene Polygone* oder zwischen schon vorhandenen Stationspunkten *Polygonzüge* konstruieren.

Sind A, B, C, D und E in Fig. 128 Punkte, die als Stationspunkte dienen sollen, und deren Aufnahme nur durch ein Polygon möglich ist, so wird man zunächst eine Seite, etwa AB, messen und im gewählten Maßstab auftragen. Hierauf wird man den Tisch über B mit ba orientieren, den Strahl bc ziehen und die gemessene Strecke BC auf dem Strahl absetzen, wodurch der Punkt c erhalten wird. Das Verfahren wird auf den Punkten C, D und E wiederholt und jedesmal die vorhergehende Polygonseite zur Orientierung des Tisches benutzt. Auf dem Punkte E erhält man jedoch durch die Visur nach A infolge der Messungsfehler nicht wieder den Punkt a, sondern einen Punkt a', so daß aa' den *Abschlußfehler* des Polygons bezeichnet.

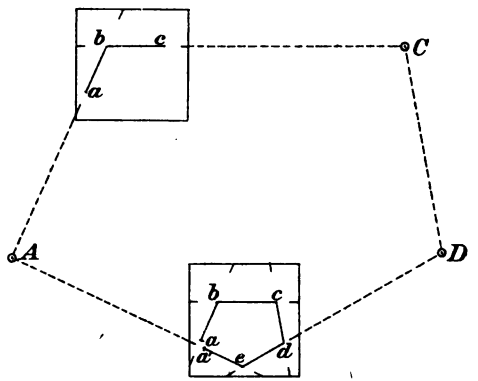


Fig. 128.

Man könnte nun diesen Schlußfehler auf graphischem Wege nach demselben Verfahren beseitigen, das numerisch bei der Berechnung geschlossener Polygone angewendet wurde (S. 94). Hier wird der Abschlußfehler jedoch fast ausschließlich den Fehlern der Winkelmessung zuzuschreiben sein, da die Fehler der Streckenmessung selten im Maßstabe der Karte bemerkbar sein werden. Es gelingt deshalb in den meisten Fällen, den Abschlußfehler durch gleichmäßige Änderung der Polygonwinkel zu beseitigen.

Um den Gesamtbetrag α des Winkelabschlußfehlers zu finden, ist es notwendig, den Meßtisch auch auf A jedoch mit a' und der Richtung $a'e$ zu orientieren und nach B einen Strahl zu ziehen, der ab unter dem Winkel α schneidet. Der Winkel α ist gleichmäßig auf die fünf Polygonwinkel zu verteilen, so daß in Fig. 128 z. B. bc um $\frac{1}{5}\alpha$, cd um $\frac{2}{5}\alpha$, de um $\frac{3}{5}\alpha$ usw. rechtsläufig zu drehen ist. Nach der Drehung ist dann noch eine Parallelverschiebung der Polygonseiten erforderlich, um ihre Endpunkte wieder zusammenfallen zu lassen.

Sollte nach der Ausgleichung des Winkelfehlers noch ein kleiner, der Streckenmessung zuzuschreibender Abschlußfehler übrig bleiben, so wird man ihn am besten auf diejenigen Polygonseiten verteilen, die parallel der Richtung des Abschlußfehlers laufen.

Dasselbe Verfahren ist anzuwenden, wenn zwei schon auf der Zeichnung vorhandene Punkte A und B (Fig. 129) durch einen Polygonzug verbunden werden. Zur Orientierung des Zuges ist auf dem ersten Standpunkt die Visur nach einem weiteren gegebenen Punkt C erforderlich, während zur Feststellung des Winkelabschlußfehlers der Tisch auf dem Endpunkt des Zuges nach der letzten Polygonseite zu orientieren und wieder die Visur nach einem gegebenen Punkt D zu ziehen ist.

Fig. 129.

Die Orientierung des Meßtisches wird sehr erleichtert, wenn die Kippregel mit einem *Orientierkompaß* versehen ist, der in einem Kästchen auf dem Kippregellineal befestigt ist. Nach der Orientierung des Tisches auf dem ersten Standpunkt läßt man die Magnetnadel einspielen und bezeichnet die Lage des Kippregellineals durch zwei Anschnitte. Wird der Meßtisch nun an einer beliebigen andern Stelle aufgestellt, so braucht man zu seiner näherungsweisen Orientierung nur die Kippregel an die Anschnitte zu legen und ihn solange zu drehen, bis die Magnetnadel einspielt.

§ 76. Größere Meßtischaufnahmen.

Die Ausführung einer Meßtischaufnahme auf weit ausgedehntem Gebiet macht die vorhergehende Bestimmung einer großen Anzahl von Stationspunkten erforderlich. Die fortgesetzte Anwendung der Methode des Vorwärts- und Seitwärtsabschneidens, die man als eine *graphische Triangulation* bezeichnen kann, führt bei aller Vorsicht und Sorgfalt zu einer allmählichen Häufung der Messungsfehler, die schließlich größere Abweichungen auf der Zeichnung hervorruft. Auch durch die Größe des Meßtischblattes wird einer solchen Triangulation sehr bald die Grenze gesetzt. In solchen Fällen muß der Meßtischaufnahme eine Triangulation mit Hilfe des Theodolits vorausgehen, durch die die rechtwinkligen Koordinaten einer großen Anzahl von Dreieckspunkten bestimmt werden. Ist das Maßstabverhältnis der Aufnahme festgesetzt, so wird hiernach das ganze Gebiet in einzelne Meßtischblätter zerlegt, deren Grenzen am besten den Koordinatenachsen parallel laufen.

Die Vorbereitung der Meßtischblätter für die Feldarbeit besteht zunächst in dem Auftragen der gegebenen Dreieckspunkte nach ihren Koordinaten. Die Anzahl der auf das einzelne Blatt fallenden Punkte wird bei dem für geometrische Karten in Anwendung kommenden großen Maßstabe sehr gering sein. Um die Vorteile, die die Anschnitte für die genaue Orientierung des Meßtisches bieten, auch hier ausnutzen zu können, wird man sie durch Rechnung ermitteln und eintragen.

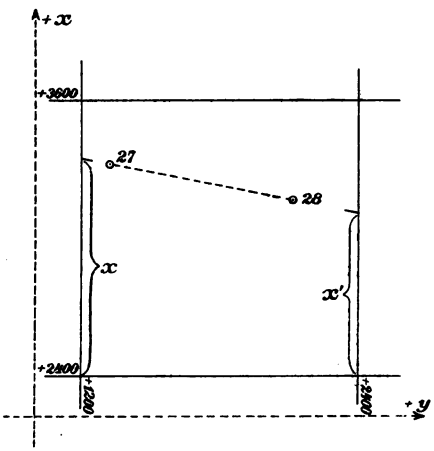


Fig. 130.

Liegt z. B. in Fig. 130 ein Blatt einer im Maßstabe 1:2500 auszuführenden Meßtischaufnahme vor, auf dem die beiden Dreieckspunkte 27 und 28 liegen, so wird es zweckmäßig sein,

die Anschnitte für die Verbindungslinie der beiden Punkte zu berechnen. Die Koordinaten der beiden Punkte seien:

$$27\colon\ y = +\,1310{,}86 \qquad x = +\,3327{,}94$$
$$28\colon\ y = +\,2117{,}25 \qquad x = +\,3175{,}46\,.$$

Führen wir zur Bestimmung der beiden Anschnitte nach Fig. 130 die Bezeichnungen x und x' ein, so ist

$$x = x_{27} - \frac{x_{27} - x_{28}}{y_{27} - y_{28}}(y_{27} - 1200)$$
$$x' = x_{28} + \frac{x_{27} - x_{28}}{y_{27} - y_{28}}(2400 - y_{28}),$$

und mit den obigen Zahlenwerten erhält man

$$x = +\,3348{,}90 \qquad x' = +\,3122{,}00\,.$$

Nach demselben Verfahren wird man auch Anschnitte für solche Strahlen berechnen, die nach den auf Nachbarblättern gelegenen Punkten führen, wobei man namentlich solche Punkte auswählen wird, deren Sichtbarkeit auf größere Entfernung verbürgt ist, wie z. B. Kirchturmspitzen.

§ 77. Punkteinschaltung.

Die wenigen auf einem Blatt liegenden Dreieckspunkte werden als Standpunkte des Meßtisches bei der Einzelaufnahme nicht genügen und man wird gezwungen sein, noch weitere Stationspunkte einzuschalten. Die verschiedenen Methoden des Stationierens, die wir schon kennen gelernt haben, werden hierbei zur Anwendung kommen. Es ist jedoch noch ein Verfahren, das *Rückwärtseinschneiden*, nachzutragen, das den andern in bezug auf Bequemlichkeit und Einfachheit der Ausführung weit überlegen ist, da bei der Anwendung desselben der Meßtisch an beliebiger Stelle im Gelände orientiert werden kann. Voraussetzung ist hierbei, daß von dem betreffenden Geländepunkte aus drei auf dem Meßtischblatt vorhandene Dreieckspunkte sichtbar sind.

Von den vielen Lösungen der Aufgabe des Rückwärtseinschneidens auf dem Meßtisch sollen im folgenden zwei angegeben werden, die man mit Vorteil gemeinsam, sich gegenseitig ergänzend, anwenden kann.

Die erstere, von dem sächsischen Major *Lehmann* (geb. 1765 in Baruth, gest. 1811 in Dresden) gefundene Lösung beginnt mit einer vorläufigen nach Schätzung auszuführenden Orientierung des Meßtisches. In Fig. 131 mögen abc auf dem Meßtisch die drei Dreieckspunkte ABC darstellen, die von dem Stationspunkt aus sichtbar sind. Würden bei richtiger Orientierung des Meßtisches die drei Strahlen aA, bB und cC mit Hilfe der Kippregel gezogen, so würden sie sich in einem Punkte d schneiden. Nach der vorläufigen Orientierung werden die drei Visierstrahlen sich in der Regel nicht in einem Punkt schneiden, sondern ein *fehlerzeigendes* Dreieck $a'b'c'$ bilden. Da die Abstände des Stationspunktes von den drei Dreieckspunkten ABC im Verhältnis zu denen des Punktes d von $a'b'c'$ sehr groß sind, so werden die Winkel zwischen den Visierstrahlen sowohl bei der genäherten als bei der richtigen Orientierung dieselben sein, so z. B. die beiden Winkel γ in Fig. 131. Man kann infolgedessen durch die vier Punkte $abc'd$ einen Kreis legen, woraus folgt, daß $\alpha' = \beta'$ ist. Ebenso läßt sich zeigen, daß $\alpha' = \gamma'$, also auch $\alpha' = \beta' = \gamma'$ ist. Bezeichnet man mit s_a, s_b und s_c die Abstände der Fußpunkte der drei Lote h_a, h_b und h_c von a, b und c, so ist

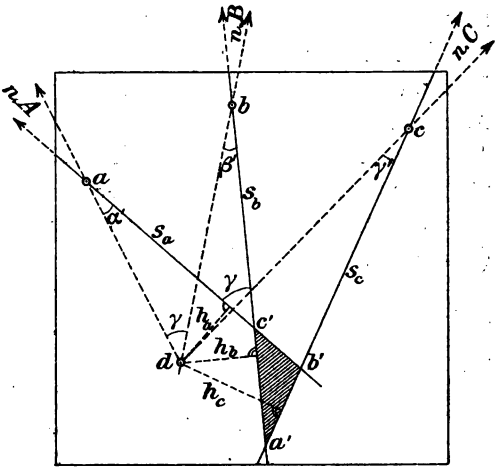


Fig. 131.

$$h_a : h_b : h_c = s_a : s_b : s_c. \tag{1}$$

Anstatt der drei Entfernungen s_a, s_b und s_c können auch die Abstände der Punkte abc von der Mitte des fehlerzeigenden Dreiecks genommen werden, so daß die Verhältnisse $h_a : h_b : h_c$ bekannt sind. Es ist dann leicht, durch mehrere Versuche den

Punkt d zu finden, der die Bedingung (1) erfüllt. Ist d gefunden, so wird der Meßtisch mit Hilfe eines Visierstrahls z. B. da orientiert. Hierauf wird man noch feststellen, ob auch die Punkte dbB und dcC in Geraden liegen, wodurch die Richtigkeit der Orientierung geprüft wird.

Die zweite hier zu behandelnde Lösung der Aufgabe des Rückwärtseinschneidens verdanken wir dem württembergischen Astronomen *Bohnenberger* (geb. 1765 zu Simmotzheim, gest. 1831 zu Tübingen). Auch hiernach wird der Meßtisch zunächst näherungsweise orientiert und durch Ziehen der drei Strahlen aA, bB, cC das fehlerzeigende Dreieck $a'b'c'$ erhalten (Fig. 132). Das Verfahren wird wiederholt, nachdem der Tisch mit der Feinbewegung ein wenig gedreht ist, und gibt ein zweites fehlerzeigendes Dreieck $a''b''c''$. Die Winkel α, β und γ zwischen den Visierstrahlen werden aus demselben Grunde wie zuvor in beiden Dreiecken dieselben sein, so daß man durch die Punkte $abc'c''$, $acb'b''$ und $bca'a''$ je einen Kreis legen kann. (Fig. 132 ist der Deutlichkeit wegen verzerrt gezeichnet, so daß die Beziehungen nicht zutreffen.)

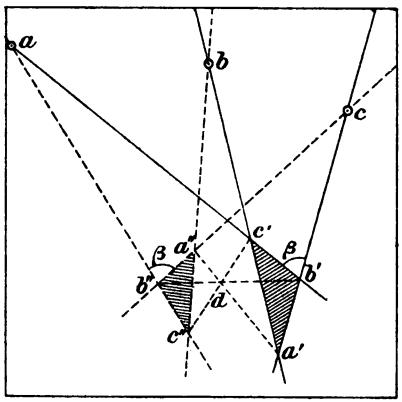


Fig. 132.

Der gesuchte Punkt d muß im Schnittpunkt der drei Kreise liegen, da die Strahlen sich in d auch unter denselben Winkeln schneiden. War die erste Orientierung nicht allzu ungenau, so werden die fehlerzeigenden Dreiecke sehr klein werden, und die drei Kreisbogen $a'a''$, $b'b''$ und $c'c''$ können durch ihre Sehnen ersetzt werden. Man braucht also nur die entsprechenden Eckpunkte der beiden Dreiecke zu verbinden, um als gemeinsamen Schnittpunkt der drei Verbindungslinien den gesuchten Punkt d zu erhalten. Die Orientierung des Tisches und die Prüfung der Punktbestimmung erfolgt wie vorher.

Das *Lehmann*sche Verfahren ist größerer Genauigkeit fähig,

als das von *Bohnenberger*, nach letzterem läßt sich der Punkt *d* jedoch schneller finden. Es wird deshalb häufig von Vorteil sein, die ungefähre Lage des Stationspunktes nach *Bohnenberger*, seine genaue Lage nach *Lehmann* aufzusuchen.

Daß die Punktbestimmung durch Rückwärtseinschneiden ungenau oder unmöglich wird, wenn die vier Punkte *abcd* in der Nähe eines Kreises oder auf einem Kreise liegen, trifft hier ebenso zu, wie bei der Theodolitmessung.

Unter Anwendung der verschiedenen Methoden des Einschneidens und der graphischen Konstruktion von Polygonzügen wird es immer möglich sein, in das Netz der gegebenen Dreieckspunkte eine so große Anzahl von Stationspunkten einzuschalten, daß von diesen aus die eigentliche Meßtischaufnahme erfolgen kann. Bei der Ausführung derselben findet das, was über die Aufnahme einfacher Figuren mit dem Meßtisch bereits gesagt ist, Verwendung. Schwierigkeiten entstehen bei der Aufnahme sehr unübersichtlicher Geländeabschnitte, wie z. B. geschlossener Ortschaften. Um den hier notwendig werdenden vielen Stationierungen, durch die die Messung außerordentlich schwerfällig wird, aus dem Wege zu gehen, ist es besser, außerhalb der Ortschaft eine genügende Anzahl von Stationspunkten zu bestimmen, diese durch ein Netz von Messungslinien zu verbinden und die Einzelaufnahme nach rechtwinkligen Koordinaten auszuführen.

10. Kapitel.

Flächeninhaltsberechnungen.

§ 78. Verwendung der Messungszahlen.

Außer der Gestalt der einzelnen durch Messungen aufgenommenen Figuren spielt ihr Flächeninhalt eine wichtige Rolle, häufig bildet er sogar den Hauptzweck einer Aufnahme. Die Berechnung des Flächeninhalts erfolgt am zuverlässigsten lediglich aus den bei der Messung erhaltenen Längenmaßen, da in diesem Falle das Resultat nur durch die Messungsfehler beeinflußt wird. Müssen die zur Flächenermittlung notwendigen

Längenmaße aus der Karte mit einem Maßstab entnommen werden, so wird die Berechnung um so ungenauer, je kleiner der Kartenmaßstab ist.

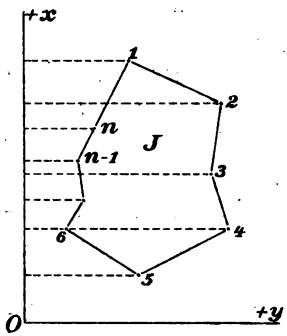


Fig. 133.

Bei den von einer einzigen Abszissenachse aus aufgenommenen Figuren ergibt sich die Flächenbestimmung durch Zerlegung in Dreiecke und Trapeze von selbst. Eine elegante Methode zur Berechnung des Flächeninhalts eines Polygons aus den Koordinaten seiner Eckpunkte hat *C. F. Gauß* angegeben. Aus der nebenstehenden Fig. 133 erhält man für den Inhalt J des Polygons $1, 2 \cdots n$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} 2J &= (x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + \cdots \\ &\quad + (x_5 - x_6)(y_5 + y_6) + \cdots + (x_n - x_1)(y_n + y_1) \end{aligned} \tag{1}$$

und hieraus durch Herausziehen der einzelnen Faktoren y

$$\begin{aligned} 2J &= y_1(x_n - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_4) + \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} y_i(x_{i-1} - x_{i+1}). \end{aligned} \tag{2}$$

In derselben Weise gibt (1) durch Herausziehen der Faktoren x

$$\begin{aligned} 2J &= x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} x_i(y_{i+1} - y_{i-1}). \end{aligned} \tag{3}$$

Für den speziellen Fall des Vierecks findet sich aus beiden Formeln übereinstimmend

$$2J = (y_1 - y_3)(x_4 - x_2) + (y_4 - y_2)(x_3 - x_1). \tag{4}$$

Nicht immer werden die Koordinaten aller Eckpunkte einer Figur bekannt sein. Es ist zwar immer möglich, sie durch Rechnung aus dem Liniennetz nach Art der Kleinpunktsberechnung (§ 7) zu ermitteln, jedoch würde eine solche Berechnung für die Flächenbestimmung zu umständlich sein. Man zieht es deshalb vor, die Karte zu Hilfe zu nehmen und ge-

gebenen Falles nur einzelne Längen aus den Messungen selbst zu entnehmen. In Fig. 134 seien die Koordinaten der vier Eckpunkte 1, 2, 3, 4 des ganzen Vierecks gemessen, während zur Bestimmung der Punkte 5, 6, 7, 8 nur die Strecken 1—6, 6—5, 5—2, 3—7 usw. gemessen seien. Zur Berechnung des Flächeninhalts J_2 benutzen wir die gemessenen Strecken a und b und greifen in der Karte die beiden Höhen h_a und h_b ab, woraus wir erhalten

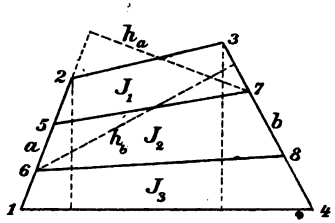


Fig. 134.

$$2J_2 = ah_a + bh_b. \tag{5}$$

Die Fehler in h_a und h_b sind wesentlich größer als die in a und b; da jedoch die Strecken a und b bei langgestreckten Figuren klein sind, so hängt die Genauigkeit von J_2 fast nur von der Genauigkeit der Größen a und b ab und diese Methode der Flächenberechnung steht deshalb der obigen wenig nach. Beim Abgreifen von h_a und h_b ist mit Hilfe des Quadratnetzes (vgl. S. 165) die Änderung des Papiers festzustellen und jede abgegriffene Länge zu verbessern.

§ 79. Graphische Flächenberechnung.

Steht für die Flächenberechnung die Karte allein zur Verfügung, so werden die Figuren in Dreiecke zerlegt, deren Grundlinien und Höhen mit einem Maßstab ermittelt werden. Statt der Zerlegung eines Vielecks in mehrere Dreiecke ist in manchen Fällen eine Umwandlung desselben in ein Dreieck gleichen Inhalts durch einfache graphische Konstruktion vorzuziehen.

Zur unmittelbaren Bestimmung des Flächeninhalts von Dreiecken dient eine auf den Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel beruhende Hilfstafel. Für jeden Punkt einer gleichseitigen Hyperbel (Fig. 135)

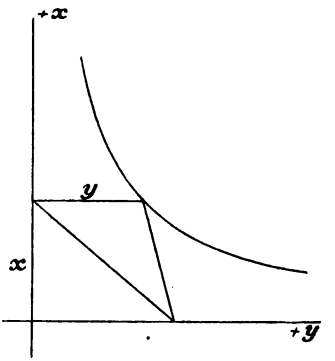


Fig. 135.

gilt in bezug auf die Asymptoten als Koordinatenachsen $xy = C$. Alle Dreiecke, deren Eckpunkte auf der Hyperbel und den beiden Koordinatenachsen liegen und deren eine Seite parallel einer Koordinatenachse ist, haben infolgedessen den Inhalt $\frac{C}{2}$. Die Hilfstafel Fig. 136 enthält eine Schar von gleichseitigen Hyperbeln auf Glas gezeichnet, deren jeder der Wert des halben Parameters beigeschrieben ist. Wird die Glasplatte auf ein in der Karte enthaltenes Dreieck in der vorgenannten Lage aufgelegt, so kann der Inhalt desselben unmittelbar abgelesen werden. In Fig. 136 ist $J = 50{,}0$.

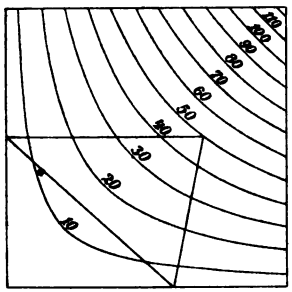


Fig. 136.

Bei ganz unregelmäßig begrenzten Figuren ist die Zerlegung in Dreiecke zu schwerfällig, weshalb man hier eine rein mechanische Bestimmung des Flächeninhalts vorzieht. Ein einfaches Hilfsmittel hierfür bildet die Planimeterharfe, Fig. 137, ein System äquidistanter Parallelen, die entweder auf einen Rahmen gespannte Fäden oder auf Pauspapier gezogene Linien sind. Durch Auflegen der Parallelen auf die Karte wird ein beliebiges Vieleck in eine Reihe von Flächenstreifen zerlegt, die mit geringer Vernachlässigung als Trapeze angesehen werden können. Bezeichnet man die mittleren Längen der einzelnen Trapeze mit $l_1\, l_2 \cdots$ und den Abstand der Parallelen mit d, so ist

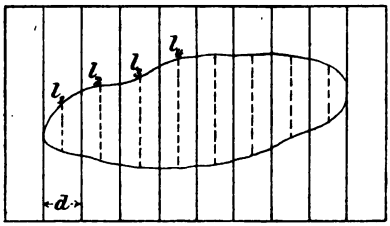


Fig. 137.

$$J = d \sum l. \tag{1}$$

Die einzelnen l werden mit einem Zirkel abgegriffen und zugleich mechanisch addiert, soweit es bei mäßiger Zirkelöffnung möglich ist. Durch Verkleinerung von d kann die Flächenberechnung bis zu jedem beliebigen Grade von Genauigkeit gebracht werden. Die Anwendung der Harfe ist jedoch nur bei langgestreckten Vielecken von geringer Breitenausdehnung be-

quem; es empfiehlt sich, bei größeren Figuren zunächst eine Zerlegung in Dreiecke vorzunehmen, diese besonders zu berechnen, und nur die Abweichungen der Vielecksfläche von den Dreiecken mit Hilfe der Harfe zu bestimmen.

§ 80. Theorie der Umfahrungsplanimeter.

Die Flächenermittlung beliebig gestalteter Vielecke läßt sich in bequemster Weise durch die sogenannten Umfahrungsplanimeter ausführen, bei denen die ganze Tätigkeit des Rechners darin besteht, einen *Fahrstift* Q auf der Umgrenzungslinie des Polygons vollständig herumzuführen. Zur Darstellung der allgemeinen Theorie der Umfahrungsplanimeter nach *Runge* möge in Fig. 138 ein Stab SQ aus seiner ursprünglichen Lage nach $S'Q'$ verschoben werden und dabei die unendlich kleine Fläche df beschreiben. Die rechtwinkligen Koordinaten x, y und x', y' der beiden Punkte S und Q erleiden hierdurch die Veränderungen dx, dy und dx', dy'. Aus Gl. (4) § 78 ist

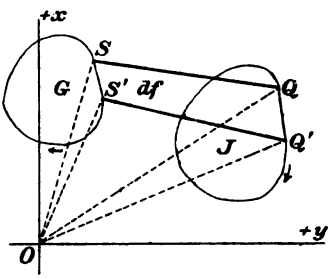


Fig. 138.

$$2df = (y - y' - dy')(x + dx - x') + (x' + dx' - x)(y + dy - y')$$

und mit Vernachlässigung der Glieder zweiten Grades

$$2df = (x'dy' - y'dx') - (xdy - ydx) - y'dx - xdy' + x'dy + ydx'$$

oder

$$(1)\quad 2df = (x'dy' - y'dx') - (xdy - ydx) + d(x'y) - d(xy').$$

Die beiden ersten Klammerausdrücke rechts stellen die doppelten Flächen der Dreiecke OQQ' und OSS' dar.

Beschreiben bei der weiteren Bewegung des Stabes die Punkte S und Q die geschlossenen Figuren G und J und kehren wieder in die Anfangslage zurück, so erhält man durch Integration der vorstehenden Gleichung (1) rechts $2J - 2G$, da das bestimmte Integral der beiden letzten Glieder bei der Rückkehr zu den Ausgangspunkten verschwindet. Es ist also

$$(2)\qquad F = J - G.$$

§ 81. Das Polarplanimeter.

Eine schöne Anwendung findet diese Grundgleichung in dem von *Amsler* in Schaffhausen im Jahre 1856 erfundenen Polarplanimeter. Zwei Stäbe p und r (Fig. 139) sind durch ein Scharnier S miteinander verbunden. Der Endpunkt P ist auf der Zeichnungsebene befestigt, während der Endpunkt Q mit einem Fahrstift versehen ist. Im Abstande q von S ist auf der Verlängerung von r eine Rolle befestigt, die sich um r als Achse dreht. Wird Q beliebig auf der Zeichnungsebene bewegt, so wird die Rolle zum Teil gleiten, zum Teil sich drehen. Verschiebt man r parallel, so wird an dem Rollenumfang nur der senkrechte Abstand dh abgewickelt, während bei einer Drehung von r um den feststehend gedachten Punkt S_1 um den Winkel $d\varphi$ die Rollenabwicklung $q\,d\varphi$ erfolgt.

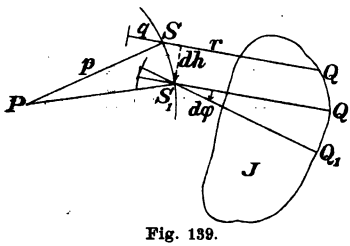


Fig. 139.

Wird der Fahrstift Q nach Q_1 bewegt, so denken wir uns diese Bewegung entstanden durch eine Parallelverschiebung des Fahrarms um dh und eine Drehung desselben um $d\varphi$. Diese beiden Bewegungen sollen positiv sein, wenn sie im Sinne der Pfeilrichtungen erfolgen. Die von r beschriebene Fläche ist dann

$$df = r\,dh + \tfrac{1}{2}r^2 d\varphi\,. \tag{1}$$

Die Abwicklung da des Rollenumfangs ist bei dieser Bewegung

$$da = dh - q\,d\varphi, \tag{2}$$

also

$$df = r\,da + (rq + \tfrac{1}{2}r^2)d\varphi\,. \tag{3}$$

Umfährt Q eine Fläche J, die den Pol P nicht einschließt, so bewegt S sich auf einem Kreisbogen mit dem Radius p, umfährt also die Fläche $G = 0$. Nach (2) § 80 (S. 185) ist infolgedessen das Integral von (3)

$$F = ra + (rq + \tfrac{1}{2}r^2)\int d\varphi = J \tag{4a}$$

und da bei der Rückkehr in die Anfangslage $\int d\varphi = 0$ ist, so wird

$$J = ra. \tag{5a}$$

Umfährt Q eine Fläche, die den Pol P einschließt, so beschreibt S einen Kreis G mit dem Radius p, und es ist

$$F = ra + (rq + \tfrac{1}{2}r^2)\int d\varphi = J - G \tag{4b}$$

und da $G = p^2\pi$, $\int d\varphi = 2\pi$ ist, so erhalten wir

$$J = ra + \pi(r^2 + p^2 + 2rq). \tag{5b}$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Entwicklung auch gilt, wenn die Rollenachse nicht mit r zusammenfällt, sondern nur parallel r ist, wie es bei der wirklichen Ausführung des Instruments immer der Fall ist.

In Fig. 140 ist ein Polarplanimeter von *Coradi* in Zürich abgebildet. Der Fahrarm A und der Polarm P sind durch das Scharnier D miteinander verbunden, während der Pol auf einer zylindrischen Messingscheibe b befestigt ist. An Stelle des Fahrstiftes f gleitet ein Stift s auf der Papierfläche; die Spitze

Fig. 140.

des Fahrstiftes berührt das Papier nicht. Die Abwicklung a an der Rolle wird hier nicht, wie es in (5a) und (5b) vorausgesetzt ist, in Längenmaß, etwa in mm ermittelt, sondern durch Zählung der Rollenumdrehungen, die an einem Zählwerk und einem Nonius c bis auf $\frac{1}{1000}$ einer Umdrehung abgelesen werden. Aus den Ablesungen vor und nach der Umfahrung wird die Differenz a' gebildet, und wenn ϱ den Rollenradius bezeichnet, so ist

$$a = a' \frac{2\varrho\pi}{1000}. \tag{6}$$

Die Abbildung zeigt, daß die Länge r des Fahrarms durch Verschiebung in der mit der Rollenachse verbundenen Hülse verändert werden kann. Zur jedesmaligen Ermittlung von r dient eine Einteilung in halbe Millimeter, die sich auf der Oberfläche des Fahrarms befindet, und ein mit der Hülse verbundener Nonius n. Bezeichnet e_0 die Ablesung am Nonius für den (nicht möglichen) Fall, in dem der Fahrstift mit der Scharnierachse zusammenfällt, so ist für jede andere Ablesung e die Fahrarmlänge in mm

$$r = \tfrac{1}{2}(e - e_0). \tag{7}$$

Für (5ª) erhalten wir hiermit

$$J = a'(e - e_0)\frac{\varrho\pi}{1000}. \tag{8}$$

Die beiden Instrumentkonstanten e_0 und ϱ können durch direkte Messung nicht genügend genau ermittelt werden. Ist der Flächeninhalt J einer Figur genau bekannt, und wird diese Figur bei zwei möglichst verschiedenen Fahrarmeinstellungen e_1 und e_2 umfahren, so ergeben sich die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho}\frac{J}{\pi}1000 + a'_1 e_0 &= a'_1 e_1 \\ \frac{1}{\varrho}\frac{J}{\pi}1000 + a'_2 e_0 &= a'_2 e_2, \end{aligned} \tag{9}$$

aus denen ϱ und e_0 berechnet werden können. e_0 ist in der Regel wenig von Null verschieden.

In der geodätischen Praxis wird das Polarplanimeter zur Ermittlung des Flächeninhalts in qm auf einer Karte im Maßstab $\frac{1}{\mathrm{m}}$ benutzt. Unter Festhaltung der bisherigen Maßeinheiten und unter Einführung von $k = \frac{\varrho\pi}{1000}$ ist dann

$$J = a'(e - e_0)\, k \frac{\mathrm{m}^2}{1000^2}. \tag{10}$$

Ist also beim Umfahren einer Figur die Rollenumdrehung a' gefunden worden, so ist diese mit dem Faktor

$$w = (e - e_0)\, k \frac{\mathrm{m}^2}{1000^2} \tag{11}$$

zu multiplizieren, um die Fläche anzugeben. Man bezeichnet w

als den *Wert der Noniuseinheit* bei der Fahrarmeinstellung e und dem Kartenmaßstab $\frac{1}{m}$. Durch passende Wahl von e hat man es in der Hand, w auf einen bequemen runden Wert zu bringen. Hierzu hat man

$$e = e_0 + \frac{w}{k}\frac{1000^2}{m^2}. \tag{12}$$

Für das der hiesigen geodätischen Sammlung gehörige Polarplanimeter Nr. 6623 von *Coradi* wurde ermittelt

$$e_0 = +\,0{,}75 \qquad k = \frac{1}{33{,}450} = 0{,}02990,$$

so daß

$$e = +\,0{,}75 + 33{,}45\,\frac{w}{m^2}\,1000^2$$

ist.

Soll z. B. für Messungen auf einer Karte im Maßstab 1:2000 $w = 20$ qm werden, so ist der Fahrarm auf $e = 168{,}00$ einzustellen.

In derselben Weise wie die Konstanten e_0 und ϱ bestimmt man auch die in (5^b) auftretende Konstante $\pi(r^2+p^2+2rq)$. Es läßt sich übrigens zeigen, daß der Ausdruck den Flächeninhalt eines Kreises darstellt, dessen Radius gleich dem Abstand des Fahrstifts vom Pol ist, wenn die Rollenebene durch den Pol geht.

§ 82. Das Stangenplanimeter.

Eine zweite eigentümliche Anwendung findet die Gleichung (2) § 80 S. 185 $F = J - G$ in der Theorie des von *H. Prytz* im Jahre 1886 erfundenen Stangenplanimeters (Fig. 141). Dieses besteht lediglich aus einem Fahrarm, der in S ein Rädchen und in Q einen Fahrstift trägt. Die Peripherie des ersteren ist mit einer Schneide versehen, deren Ebene durch den Fahrstift geht.

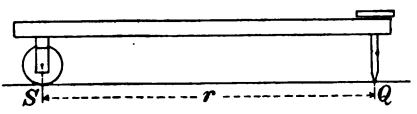


Fig. 141.

Wird mit dem Fahrstift eine Figur J (Fig. 142) vollständig umfahren, so beschreibt die Schneide den Weg $S_0 S_1 S_2$, und wenn hierauf durch Drehung des Fahrarms um Q die Schneide

nach S_0 zurückgeführt ist, so hat auch S eine geschlossene Figur G beschrieben und es ist nach (2) § 80 S. 185

$$F = J - G.$$

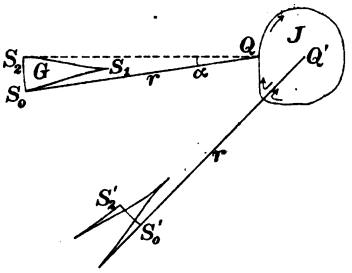


Fig. 142.

Auf die von dem Fahrarm beschriebene Fläche wenden wir wieder die Gl. (1) § 81 S. 186 an, wonach

$$df = r\,dh + \frac{1}{2}r^2\,d\varphi$$

ist. Während die Schneide den Weg $S_0 S_1 S_2$ beschreibt, bleibt dh beständig gleich Null, es kommt also für diesen Teil des Weges nur das zweite Glied der obigen Differentialgleichung in Betracht.

Den Übergang des Fahrarms von QS_2 nach QS_0 zerlegen wir in unendlich kleine Bewegungen, die wir uns wie in Fig. 139 S. 186 aus Parallelverschiebungen und Drehungen entstanden denken. Hierfür ist dann $dh = r\,d\alpha$, also wird für die ganze Bewegung des Fahrarms

$$(1) \qquad F = r^2 \int d\alpha + \tfrac{1}{2} r^2 \int d\varphi.$$

Da r wieder in die Anfangslage zurückkehrt, so ist $\int d\varphi = 0$, also

$$F = r^2\alpha \quad \text{und} \quad J = r^2\alpha + G,$$

oder auch

$$(2) \qquad J = r\overset{\frown}{S_0 S_2} + G.$$

Bei kleinen Figuren wird es genügen, statt des Bogens $\overset{\frown}{S_0 S_2}$ die Sehne $\overline{S_0 S_2}$ einzuführen, also zu setzen

$$(3) \qquad J = r\overline{S_0 S_2} + G.$$

Für die praktische Anwendung zur Flächenberechnung muß die Fläche von G auf anderem Wege, etwa mit einer Planimeterharfe bestimmt werden. Auch kann eine kleine Hilfstabelle angelegt werden, die für jede Sehne $\overline{S_0 S_2}$ die Länge des Bogens $\overset{\frown}{S_0 S_2}$ angibt, wenn man nicht nach der Näherungsformel (3) rechnen will.

Durch passende Wahl der Anfangsstellung von r ist es möglich, G näherungsweise gleich Null zu machen, so daß das erste Glied von (2) bzw. (3) den Flächeninhalt angibt. Man erreicht dies nahezu dadurch, daß man Q in die Mitte der Figur setzt (Q' in Fig. 142), auf der Geraden in der Richtung von r nach der Umgrenzungslinie fährt, und nach der Umfahrung der Figur auf derselben Geraden in den Ausgangspunkt zurückkehrt. Die Schneide S beschreibt hierbei eine verschränkte Figur, deren Teilflächen sich näherungsweise aufheben.

II. Abschnitt.

Höhenaufnahmen.

11. Kapitel.

Das geometrische Nivellement.

§ 83. Das Nivelliergerät und sein Gebrauch.

Die einfachen Hilfsmittel, die zur Bestimmung des Höhenunterschieds zweier Punkte nach der Methode des geometrischen Nivellements notwendig sind, bestehen in einer Visiervorrichtung, deren Visierachse horizontal gestellt werden kann, dem *Nivellierinstrument*, und einer eingeteilten Skala, der *Nivellierlatte*. Das Prinzip der Ausführung einer solchen Messung werde in Fig. 143 erläutert, in der der Höhenunterschied der Oberflächen zweier Steine bestimmt werden soll. Da die unmittelbare Messung von Höhenunterschieden durch geometrisches Nivellement nur auf kurze Entfernungen ausführbar ist, so werden in Abständen von rund 100 m Hilfspunkte oder *Wechselpunkte* angenommen, in denen nacheinander die Nivellierlatte lotrecht aufgestellt wird. Zur Bestimmung des Höhenunterschieds zweier aufeinanderfolgenden Wechselpunkte wird das Nivellierinstrument zwischen denselben aufgestellt und die Visierhöhe in bezug auf den am unteren Ende der Latte befindlichen Nullpunkt der Lattenteilung abgelesen.

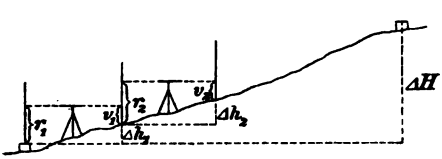


Fig. 143.

Werden die Ablesungen im Rückblick und Vorblick mit $r_1 r_2 \cdots v_1 v_2 \cdots$ bezeichnet, so sind die Höhenunterschiede der einzelnen Wechselpunkte

$$\Delta h_1 = r_1 - v_1$$
$$\Delta h_2 = r_2 - v_2$$
$$\vdots$$

und der gesuchte Höhenunterschied der beiden Endpunkte ist

$$\Delta H = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \cdots = \sum \Delta h .$$

Abgesehen von einigen kleinen Nivellierinstrumenten, die für den Freihandgebrauch bestimmt sind und die später noch erwähnt werden sollen, wird als Visiervorrichtung das mit einem Fadenkreuz ausgestattete Fernrohr und zum Wagrechtstellen der Visierachse die Röhrenlibelle benutzt. Zwei Grundformen des Nivellierinstruments, das *norddeutsche* und das *Sicklersche*, sind in Fig. 144 u. 145 dargestellt. In beiden Fällen dreht sich das

Fig. 144.

Fernrohr mit der Libelle um eine Stehachse, die vermittelst dreier Fußschrauben lotrecht gestellt werden kann. Während aber in Fig. 144 das Fernrohr und die Libelle mit der Stehachse starr verbunden sind, ist in Fig. 145 das Fernrohr um eine Kippachse drehbar und kann zusammen mit der Libelle vermittelst einer aufrechtstehenden *Kippschraube*, deren geränderter Kopf links sichtbar ist, innerhalb mäßiger Grenzen geneigt werden. Die abgebildeten Instrumente sind aus der Werkstätte von *Th. Rosenberg* in Berlin hervorgegangen.

Die verschiedenartige Konstruktion bedingt einen verschiedenartigen Gebrauch der als justiert vorausgesetzten In-

strumente. Wird bei dem ersteren mit Hilfe der Röhrenlibelle nach S. 71 die Stehachse lotrecht gestellt, so ist hiermit auch zugleich eine wagrechte Lage der Visierachse erreicht, das Instrument also gebrauchsfertig aufgestellt. Bei der zweiten Grund-

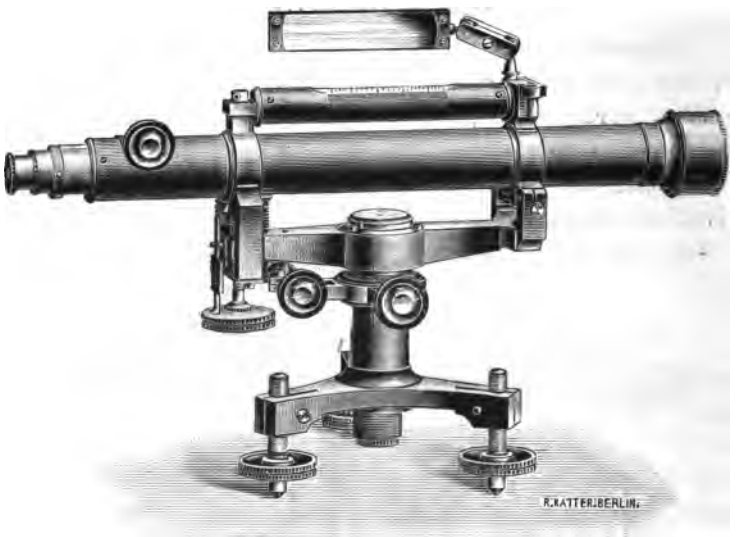


Fig. 145.

form dagegen wird die Stehachse nur näherungsweise unter Anwendung der Dosenlibelle lotrecht gestellt; die horizontale Lage der Visierachse wird dann unmittelbar vor jeder Ablesung dadurch erzielt, daß man die Röhrenlibelle mittelst der Kippschraube zum Einspielen bringt.

An weiteren Einzelheiten der Konstruktion zeigen beide Instrumente eine Klemme nebst Feinbewegung, die zum Nivellieren zwar nicht erforderlich, aber bequem sind. Ein in Fig. 145 auf dem Fernrohr mittelst doppelten Kugelgelenks angebrachter Spiegel gestattet dem Beobachter, die Einstellung der Libelle vom Okular aus zu übersehen.

Die *Nivellierlatte*, das zweite wesentliche Hilfsmittel bei der Ausführung von Nivellements, besteht aus einer Holzlatte von 3—4 m Länge und zirka 10 cm Breite, die mit einer Zentimetereinteilung versehen ist. Um die Deutlichkeit nicht zu stören, ist die Bezifferung nur bei den Dezimeterstrichen angebracht

Eine einfache Strichteilung ist für den vorliegenden Zweck nicht geeignet, da die Breite der Striche die Schätzung der Millimeter erschwert. Dieser Übelstand wird beseitigt, wenn statt der Strichteilung eine *Felderteilung* angewendet wird, wie sie in zwei verschiedenen Anordnungen aus Fig. 146 ersichtlich ist. In der ersteren Form zeigt sich zugleich das Bestreben, die Übersicht so viel als möglich zu erleichtern. Für die Bezifferung gilt der Grundsatz, daß jede Zahl zu dem Dezimeterfelde gehört, innerhalb dessen sie selbst steht; hiervon abweichende Bezifferungen können bei kurzen Zielweiten infolge des kleinen Fernrohrgesichtsfeldes Anlaß zu groben Ablesefehlern geben. In Fig. 146 sind zu der eigentlichen Bezifferung noch die dekadischen Ergänzungen der Dezimeterzahlen hinzugefügt, auf deren Verwendung später näher eingegangen werden soll. Zur äußeren Ausrüstung einer Nivellierlatte gehören noch zwei Handgriffe und eine seitlich oder an der hinteren Fläche angebrachte Dosenlibelle, die das Lotrechthalten der Latte ermöglicht.

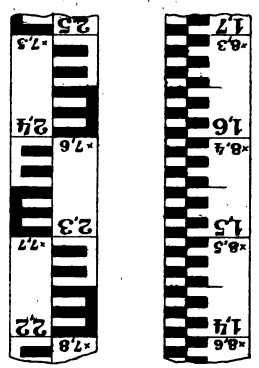


Fig. 146.

Auch Nivellierlatten machen eine Prüfung der Lattenlänge erforderlich, namentlich dann, wenn größere Höhenunterschiede auftreten können. Jedoch kommt hier als Ursache der Längenänderung nur die Wirkung der Luftfeuchtigkeit in Frage, während bei Meßlatten auch leicht Änderungen in der Lage der Endbeschläge eintreten. Für die vorliegenden Zwecke wird es deshalb genügen, die Latte für längere Zeit als unveränderlich anzusehen, und es ist dann nur die einmalige Bestimmung der Länge des Lattenmeters notwendig. Man verwendet hierzu entweder ein Normalmeter mit Strichteilung oder auch ein solches mit Endschneiden in Verbindung mit dem zur Prüfung der Meßbandlänge auf S. 11 erwähnten kleinen Hilfsmaßstab.

Zum Aufstellen der Latte in den Wechselpunkten genügt ein kurzer Holzpflock, der durch den Lattenträger so tief in den Boden geschlagen wird, daß ein Nachsinken unter dem Druck der Nivellierlatte nicht eintreten kann. Bequemer ist es,

eine *Fußplatte* zu benutzen, eine runde Eisenplatte von etwa 10 cm Durchmesser, die unten drei kurze Füße und oben einen halbkugelig abgerundeten Knopf trägt, auf den die Latte aufgesetzt werden kann. Werden die Füße fest in den Boden gedrückt, so bietet die Fußplatte einen außerordentlich sicheren Stützpunkt zum Aufsetzen der Latte.

§ 84. Justierung der einfachen Nivellierinstrumente.

Die beiden auf S. 193/194 erläuterten Nivellierinstrumente wurden bisher als justiert angesehen. Es ist nun zu untersuchen, welchen Bedingungen in diesem Falle die einzelnen Achsen der Instrumente unterliegen, und auf welche Weise die Bedingungen durch die Justierung erfüllt werden können.

Bei der norddeutschen Form des Nivellierinstruments wird die Stehachse mit Hilfe der Röhrenlibelle lotrecht gestellt und hierauf die Lage der Visierachse als wagrecht angenommen. Es ergeben sich also für das justierte Instrument die beiden Bedingungen:

1. Die Libellenachse muß normal zur Stehachse stehen.
2. Die Visierachse muß bei lotrechter Stehachse wagrecht liegen.

Diesen beiden Forderungen entsprechend sind zwei Justiervorrichtungen vorgesehen, die eine zum Verstellen der Libelle, die andere zum Verstellen des Fadenkreuzes. Die hierzu dienenden Justierschrauben sind in Fig. 144 deutlich erkennbar. Die Justierung der Libelle in bezug auf die Stehachse ist bereits S. 71 allgemein behandelt und kann hiernach ausgeführt werden.

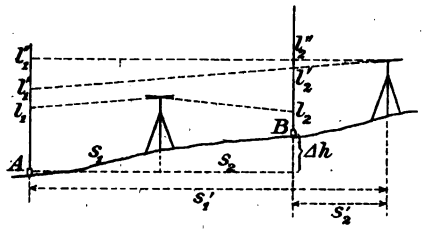


Fig. 147.

Dem zweiten Teil der Justierung muß eine Hilfsmessung vorangehen, die die Bestimmung des Höhenunterschiedes zweier Punkte im Abstand von 60—80 m bezweckt. Diese beiden Punkte A und B (Fig. 147) werden durch Pflöcke oder Fußplatten bezeichnet, und das Nivellierinstrument

wird so aufgestellt, daß die lotrechte Stehachse gleichweit von den beiden Punkten A und B entfernt ist. Durch Abschreiten kann die hierzu erforderliche Genauigkeit erreicht werden. Die Visierachse habe bei lotrechter Stehachse eine gegen die Horizontale geneigte Lage und man finde für die beiden Punkte A und B die Lattenablesungen l_1 und l_2. Da $s_1 = s_2$, so ist der Höhenunterschied $\Delta h = l_1 - l_2$. Es folgt hieraus der wichtige Satz, daß der Höhenunterschied auch bei nicht justierter Visierachse fehlerfrei gefunden wird, wenn die Zielweiten im Vor- und Rückblick gleich sind. Bei einer zweiten Aufstellung des Instruments mit möglichst ungleichen Zielweiten s_1' und s_2' erhalte man die Ablesungen l_1' und l_2'. Aus den vier Ablesungen lassen sich diejenigen berechnen, die der wagrechten Lage der Visierachse entsprechen. Werden diese mit l_1'' und l_2'' bezeichnet, so ergibt sich aus ähnlichen Dreiecken

$$\frac{l_1'' - l_1'}{s_1'} = \frac{l_2' + \Delta h - l_1'}{s_1' - s_2'}, \quad \text{also} \quad l_1'' = l_1' + \frac{l_2' + \Delta h - l_1'}{s_1' - s_2'} s_1'.$$

Wird durch Verschiebung des Fadenkreuzes die Visierachse auf die berechnete Ablesung l_1'' eingestellt, so ist die Justierung erledigt. Durch eine dritte Aufstellung mit anderen Zielweiten wird die Richtigkeit der Justierung geprüft. Es mag noch bemerkt werden, daß streng genommen die Zielweiten s_1' und s_2' vom vorderen Brennpunkt des Objektivs aus zu messen sind, da sich beim Verstellen des Fadenkreuzes die Visierachse um einen Punkt der vorderen Brennebene dreht. Praktisch spielt dies indessen keine Rolle.

Zur Vereinfachung des Verfahrens wird immer die Annahme zulässig sein, daß die Visierachse durch die Mitte der Objektivfassung geht. Steht dann bei der zweiten Aufstellung das Instrument unmittelbar hinter dem Punkte B, so kann die Höhe des oberen und unteren Randes der Objektivfassung an der Latte abgelesen werden, und das Mittel beider Ablesungen gibt l_2'. Da $s_2' = 0$, so ist $l_1'' = l_2' + \Delta h$.

Beim praktischen Gebrauch des norddeutschen Nivellierinstruments ergibt sich die Schwierigkeit, daß das strenge Lotrechtstellen der Stehachse sehr zeitraubend ist. Es wird deshalb meistens die Stehachse nur näherungsweise lotrecht gestellt und

vor jeder Ablesung die Libelle mit einer Fußschraube zum Einspielen gebracht. Auch hierbei erhält man eine horizontale Lage der Visierachse, allerdings unter der Voraussetzung, daß letztere der Libellenachse parallel läuft. Ist eine Kreuzung zwischen beiden Achsen vorhanden, so wird ein Teil derselben sich als Neigung der Visierachse äußern. Der Fehler wird jedoch von verschwindendem Einfluß sein, wenn die Stehachse nicht wesentlich von der Lotrichtung abweicht.

Diese zweite Art des Gebrauchs des Nivellierinstruments liegt der *Sicklers*chen Konstruktion (Fig. 145) zugrunde. Zur näherungsweisen Lotrechtstellung der Stehachse dient hier die Dosenlibelle, und die Kippschraube zur Einstellung der Libelle vor jeder Ablesung. Für die Justierung gibt es deshalb, abgesehen von der Dosenlibelle, nur die eine Forderung, daß bei horizontaler Lage der Visierachse die Libelle einspielt. Das Verfahren zur Wagrechtstellung der Visierachse ist dasselbe wie beim norddeutschen Instrument, nur erfolgt hier das Einstellen auf die berechnete Ablesung l_1'' mit Hilfe der Kippschraube. Wird hierauf die Libelle mit ihrer Justierschraube zum Einspielen gebracht, so ist die obige Forderung erfüllt.

Einige weitere Formen von Nivellierinstrumenten werden am Schluß dieses Kapitels Berücksichtigung finden. Zunächst wenden wir uns den praktischen Anwendungen des geometrischen Nivellements zu.

§ 85. Nivellementszüge.

Über das Verfahren des Nivellierens bleibt zu dem bereits Gesagten wenig hinzuzufügen. Wenn auch die Justierung des Nivellierinstruments unter allen Umständen vor Beginn der Arbeit ausgeführt werden muß, so wird man doch, um kleine Reste von Fehlern unschädlich zu machen, möglichst gleiche Zielweiten anwenden. Die Größe der Zielweite richtet sich nach der Vergrößerung des Fernrohrs; in der Regel werden auf Entfernungen von 50 m noch Millimeter geschätzt werden können.

Eine wesentliche Vereinfachung der Berechnung des Nivellements gewährt die Benutzung der dekadischen Bezifferung der Latte bei der Ablesung. Da die Differenz $r - v$ bei wechselndem

Gelände teils positiv, teils negativ wird, so ist die Berechnung der Summe $\sum (r - v)$ umständlich, und es liegt nahe, statt der negativen Differenzen ihre dekadischen Ergänzungen einzuführen, um alle Subtraktionen in Additionen umzuwandeln. Dies erreicht man unmittelbar dadurch, daß man beim Vorblick stets in der dekadischen Bezifferung der Latte abliest,

z. B. Rückblick nach Wechselpunkt 3: 1,782
Vorblick nach Wechselpunkt 4: × 7,964

$\Delta h = \times 9{,}746$ statt $-0{,}254$.

In dem nachstehenden Beispiel ist die Höhe des Punktes A über Normal-Null (N. N.) gegeben und ein Nivellementszug zur Bestimmung der Höhe des Punktes B ausgeführt. Als durchgreifende Prüfung und zugleich auch zur Erhöhung der Genauigkeit ist ein zweiter Zug von B nach A geführt, also eine vollständige *Nivellementsschleife* geschlossen. Das Beispiel zeigt auch die Aufschreibung der Ablesungen und die Berechnung des Nivellements in einem übersichtlichen Formular.

Punkt	Rückblick	Vorblick	Steigung	Höhe	Bemerkungen
			1. Nivellement.		
A	2,627			25,826	Die Höhen beziehen sich auf N. N.
1	1,538	× 8,692	1,319	27,145	
2	1,724	× 8,675	0,213	27,358	
3	0,718	× 9,057	0,781	28,139	
4	1,302	× 8,294	× 9,012	27,151	
5	2,586	× 8,655	× 9,957	27,108	
B		× 9,443	2,029	29,137	
	10,495	× 2,816	3,311	× 6,689	
	3,311				
			2. Nivellement.		
B	0,487			29,137	
1	1,469	× 7,232	× 7,719	26,856	
2	1,657	× 8,603	0,072	26,928	
3	1,183	× 9,071	0,728	27,656	
4	1,753	× 8,441	× 9,624	27,280	
5	1,508	× 8,081	× 9,834	27,114	
A		× 7,200	× 8,708	25,822	
	8,057	× 88,628	× 6,685	3,315	
	× 6,685				

Als arithmetisches Mittel aus beiden Messungen ergibt sich der Wert 29,139. Die vorstehende Tabelle gewährt bequeme Proben für die Richtigkeit der Berechnung durch Summierung der Spalten 2 bis 4, da die zweite und dritte Spalte zusammen die Summe der Steigungen ergeben muß. Wird ferner die Summe der Steigungen mit umgekehrtem Vorzeichen zur Höhe des letzten Punktes hinzugefügt, so muß die Ausgangshöhe wieder erscheinen, ein Beweis, daß alle Höhen richtig berechnet sind.

§ 86. Nivellieren mit Meßproben.

Ein weiterer Vorteil der dekadischen Bezifferung besteht darin, daß sie zur Prüfung der einzelnen Ablesungen benutzt werden kann. Wird bei jedem Blick an beiden Bezifferungen abgelesen, so müssen die Ablesungen sich zu Null ergänzen. Das Niederschreiben beider Ablesungen ist jedoch nicht nötig, da man davon eine nennenswerte Steigerung der Genauigkeit des Nivellements nicht erwarten kann.

Einen vollkommenen Schutz gegen Ablesefehler bietet die dekadische Bezifferung nicht, ein solcher ist bequem durch Benutzung einer auf beiden Seiten geteilten Latte, einer *Wendelatte*, zu erreichen. Ist der Nullpunkt der zweiten Seite gegen den der ersten um ein unrundes Maß, die *Lattenkonstante*, verschoben, so erhält man vollkommen verschiedene Ablesungen, deren Differenz einen Ablesefehler sofort aufdeckt. In dem folgenden Beispiel sind die Ablesungen beider Lattenseiten untereinander geschrieben. Wird zu der ersten Ablesung die Konstante 3,035 bzw. × 6,965 hinzugefügt, so soll sich die zweite Ablesung ergeben. Die dabei auftretende Differenz wird in die Spalte „Probe“ eingetragen, was notwendig ist, um die Ausrechnung der Probe nie zu vergessen.

Da die Ablesungen vollkommen unabhängig voneinander sind, so ist ersichtlich, daß durch Mittelung der beiden Steigungen jedes Standes eine wesentliche Verfeinerung des Nivellements erzielt wird. Schon aus diesem Grunde ist das Mitführen der Zehntel-Millimeter bei der Berechnung erwünscht, unentbehrlich wird es aber, wenn die Rechenproben in derselben Weise an-

Punkt	Rückblick (3,035)	Vorblick (× 6,965)	Probe		Steigung	Höhe	Bemerkungen
□ *C*	1,728 4,764		+ 1			14,2870	
1	1,629 4,665	× 8,643 × 5,608	+ 1	0	0,371 0,372	0,3715 14,6585	
2	1,850 4,885	× 8,342 × 5,306	0	— 1	× 9,971 × 9,971	× 9,971 14,6295	
3	1,483 4,518	× 7,956 × 4,923	0	+ 2	× 9,806 × 9,808	× 9,807 14,4365	
□ *D*		× 8,108 × 5,072		— 1	× 9,591 × 9,590	× 9,5905 14,0270	
	25,522	× 73,958			× 9,480	0,260	
	× 9,480				× 9,740		

gewendet werden sollen, wie bei dem einfachen Nivellement. Für den letzten Teil der Probe ist hier die Summe der Steigungen durch 2 zu dividieren.

Steht eine Wendelatte nicht zur Verfügung, so kann die Ablesung an beiden Lattenseiten durch Benutzung *doppelter Wechselpunkte* ersetzt werden, die in verschiedener Höhe liegen. Man verwendet hierzu entweder eine Fußplatte mit zwei ungleich hohen Knöpfen oder zwei in den Boden geschlagene Holzpflöcke. Die Meßprobe besteht dann darin, daß die zu einem Wechselpunkt gehörigen Vorblicke dieselbe Differenz zeigen müssen, wie die Rückblicke, daß z. B. in Fig. 148 $v_3 - v_3' = r_4 - r_4'$ sein muß. Man sieht jedoch, daß die Probe sich stets über zwei Aufstellungen des Instruments erstreckt und nicht eine sofortige Prüfung jeder Aufstellung zuläßt.

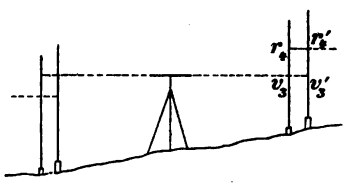


Fig. 148.

Im übrigen hat man hierbei zwei nebeneinanderlaufende Nivellementszüge mit gemeinsamen Instrumentaufstellungen, weshalb man auch im Feldbuch beide Züge getrennt nebeneinander aufschreiben wird. Es ist aber nicht zu übersehen, daß weder die Methode doppelter Wechselpunkte noch die der Wendelatte eine Nivellementsschleife ersetzen kann, in der allein die Un-

abhängigkeit beider Züge gewahrt ist. So bleiben z. B. bei den vorstehenden Methoden die Fehler unentdeckt, die aus der Vernachlässigung der Libelleneinstellung hervorgehen.

§ 87. Fehlerfortpflanzung in Nivellementszügen.

Die Erfahrung hat gelehrt, daß der mittlere Fehler einer Lattenablesung nahezu der Zielweite proportional ist, so daß wir

$$\mu = s \cdot c \tag{1}$$

setzen können. Da der Höhenunterschied Δh zweier Wechselpunkte durch zwei Lattenablesungen bestimmt wird, so ist

$$\mu_{\Delta}^{2} = 2\mu^2, \tag{2}$$

und wenn der Zug sich aus n Aufstellungen des Instruments zusammensetzt, so erhalten wir für den mittleren Fehler des ganzen Zuges

$$M^2 = 2n\mu^2. \tag{3}$$

Wir bezeichnen mit L die Länge des Zuges und finden, da $L = 2ns$ ist,

$$M = \sqrt{\frac{L}{s}}\,\mu$$

oder nach (1)

$$M = \sqrt{Ls}\,c. \tag{4}$$

Hieraus gehen die beiden wichtigen Sätze hervor:

Bei konstanter Zielweite s wächst der mittlere Fehler des Zuges mit der Quadratwurzel aus der Länge des Zuges, und bei konstanter Zuglänge mit der Quadratwurzel aus der Zielweite.

Hieraus erklärt es sich, daß man für Nivellementszüge die kurze Zielweite von rund 50 m wählt, die durch die Fernrohre der Nivellierinstrumente keineswegs gefordert wird. Die Frage, ob man in einzelnen Fällen besser zu größeren oder kleineren Zielweiten übergeht, muß nach der gewünschten Genauigkeit und der verfügbaren Zeit erwogen werden.

Die Genauigkeit von Nivellementszügen gibt man in der Regel durch den mittleren Fehler eines einmaligen Nivellements von 1 km Länge an.

Mit den in § 83 S. 193 und 194 beschriebenen kleinen Instrumenten kann der mittlere Kilometerfehler von $\pm$ 10 mm bei Zielweiten von 50 m bequem innegehalten werden.

Legen wir einem Nivellementszug von 1 km Länge mit dem mittleren Fehler μ_1 das Gewicht Eins bei, so ist für einen Zug von der Länge L (in km)

(5) $$\mu_l^2 = \mu_1^2 L$$

und da auch

$$\mu_l^2 = \frac{\mu_1^2}{g_l}$$

ist, so wird

(6) $$g_l = \frac{1}{L}.$$

Das Gewicht des Zuges kann somit gleich der reziproken Zuglänge angenommen werden.

§ 88. Längen- und Querprofile.

Höhenaufnahmen durch geometrische Nivellements werden kaum jemals im Zusammenhange auf größerem Gebiet ausgeführt. Ein Bedürfnis für solche genauen Aufnahmen liegt nicht in demselben Maße vor wie für Horizontalaufnahmen. Für ausgedehnte Höhenaufnahmen gelangen meistens andere Methoden zur Anwendung. Durch geometrische Nivellements werden immer nur diejenigen speziellen Höhenbestimmungen ausgeführt, die für technische Aufgaben gebraucht werden. Um aber auch in diesem Falle den einheitlichen Zusammenhang aller Höhenaufnahmen zu wahren, ist es wie bei den Horizontalaufnahmen notwendig, zunächst die Höhenlage einer Anzahl von Festpunkten in Abständen von 1—2 km zu bestimmen, an die die einzelnen Höhenmessungen angeschlossen werden. Die Festlegung der Höhenmarken erfolgt durch *Nivellementsbolzen* in fest fundierten Mauern von Gebäuden oder in besonders zu diesem Zweck aufgestellten Steinen (Fig. 149). Die Höhenmarke wird in der Regel durch den höchsten Punkt einer kugeligen Fläche des Bolzens bezeichnet, auf die in bequemer Weise die Nivellierlatte aufgesetzt werden kann. Die einzelnen Höhen-

Fig. 149.

marken werden durch Nivellementszüge miteinander verbunden, und diese bilden in ihrer Gesamtheit ein Nivellementsnetz, das dem Dreiecksnetz der Horizontalaufnahme entspricht. Bei der Messung der Nivellementszüge finden die verschiedenen Methoden des Nivellierens Anwendung, die vorstehend erläutert wurden. In den einzelnen Polygonen des Nivellementsnetzes ergeben sich infolge der unvermeidlichen Messungsfehler Widersprüche, die durch eine Ausgleichung des ganzen Netzes beseitigt werden müssen. Erst nach dieser Ausgleichung erhält man eindeutige Werte für die Höhenunterschiede der einzelnen Festpunkte, und wenn die Meereshöhe eines der letzteren, bzw. seine Höhe über der Normal-Nullniveaufläche bekannt ist, so können sämtliche Höhen hieran angeschlossen werden.

Die Aufgaben der Technik machen entweder die Höhenaufnahme langgestreckter Flächenstreifen erforderlich, wie beim Bau von Eisenbahnen, Straßen, Kanälen usw., oder die Aufnahme kleinerer geschlossener Flächen, wie bei der Ausführung kulturtechnischer Arbeiten, oder endlich die Bestimmung des Gefälles von Wasserläufen für die Aufgaben des Wasserbaues. Für diese verschiedenen Arbeiten haben sich bestimmte Methoden entwickelt, die im folgenden erläutert werden sollen.

Die Aufnahme von *Längen- und Querprofilen* beginnt mit der Absteckung der Längsachse, die in der Regel einen Polygonzug bilden wird. Zur Bestimmung der Situation der Achse werden, sofern eine Karte des Geländes vorliegt, die Knickpunkte der Achse von Messungslinien aus aufgenommen, die entweder Polygonpunkte oder Kleinpunkte oder auch nötigenfalls andere in der Karte und in der Natur vorhandene Punkte verbinden. Ist keine Karte vorhanden, so ist die ganze Längsachse als selbständiger Polygonzug durch Winkel- und Streckenmessung aufzunehmen.

Hierauf erfolgt die Einteilung der Achse durch Stationspunkte und Zwischenpunkte, deren Lage durch die Wahl der Querprofile oder durch Gefällwechsel bedingt wird. In der Regel wählt man für die einzelnen Stationspunkte, durch die auch die Querprofile gelegt werden, den Abstand von 100 m, wobei aber auch noch in einzelnen Zwischenpunkten je nach Bedürfnis Querprofile aufgenommen werden. Die Bezeichnung der Stations-

punkte und Zwischenpunkte geschieht durch kleine Holzpflöcke, die bis zum Kopf in den Boden geschlagen werden und durch daneben gesetzte Nummerpflöcke, auf denen die Nummer der Stationspunkte bzw. der Abstand der Zwischenpunkte vom vorhergehenden Stationspunkt vermerkt ist. Die Querprofile werden rechtwinklig zur Längsachse abgesteckt und die Abstände ihrer einzelnen Punkte von der Achse durch Messung bestimmt.

Das Nivellement der Längsachse wird in derselben Weise ausgeführt, wie die bereits S. 198 erläuterten Nivellementszüge. Zur Bestimmung der Höhen in bezug auf die allgemeine Normal-Nullniveaufläche ist ein Anschluß an die nächstgelegene Höhenmarke erforderlich. Kann auch zum Abschluß des Nivellements eine solche Höhenmarke benutzt werden, so genügt die einmalige Aufnahme des Längenprofils, während sonst eine Wiederholung der Messung unerläßlich ist. Als Wechselpunkte dienen die einzelnen Stationspunkte, während die Zwischenpunkte durch Seitenblicke aufgenommen werden. Da die Höhenunterschiede hierbei nicht immer aus Zielweiten von gleicher Länge gebildet werden, so ist die sorgfältige Justierung des Nivellierinstruments notwendig.

In dem nachstehenden Beispiel ist die Höhe des Anfangspunktes durch ein Anschlußnivellement ermittelt worden, und in der folgenden Tabelle ist das Nivellement der Längsachse wiedergegeben.

Nr.	Rückblick	Vorblick	Steigung	Höhe	Bemerkungen
0	1,884			82,232	
1	2,575	× 9,302	1,186	83,418	
2	1,360	× 9,361	1,936	85,354	
2+78	(1,683)	× 8,317	× 9,677	85,031	
3	0,342	× 7,813	× 9,496	84,527	
3+44	(1,850)	× 8,150	× 8,492	83,019	
4	2,887	× 8,899	0,749	83,768	
5	1,759	× 9,739	2,626	86,394	
6	2,533	× 9,305	1,064	87,458	
7	1,650	× 9,831	2,364	89,822	
8		× 9,462	1,112	90,934	
	18,523	× 90,179	8,702	× 1,298	
	8,702				

Die Ablesungen für die Zwischenpunkte werden als Vorblicke und Rückblicke eingetragen, woraus man den Vorteil erhält, daß die Steigungen genau so berechnet werden können, als ob die Zwischenpunkte auch Wechselpunkte wären. Zum Unterschied von den wirklichen Wechselpunkten sind die Rückblicke in Klammern gesetzt.

Das Nivellement der Querprofile erfolgt getrennt von dem der Längsachse. In der Regel wird es bequem sein, für jedes Profil eine besondere Aufstellung des Instruments vorzunehmen, nur bei sehr geringem Abstand der Profile wird die Aufnahme mehrerer Profile von einem Stande aus vorteilhaft sein. In den einzelnen Profilpunkten wird die Latte unmittelbar auf den Erdboden gesetzt, es genügt infolgedessen das Ablesen der Zentimeter; nur bei dem Punkt, der der Längsachse angehört und der für das Profil zugleich als Anschlußpunkt gilt, ist eine genauere Ablesung von Wert. Zum Aufschreiben der Ablesungen benutzt man am besten nicht ein Formular, sondern eine Skizze

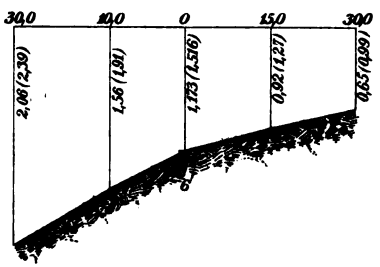


Fig. 150.

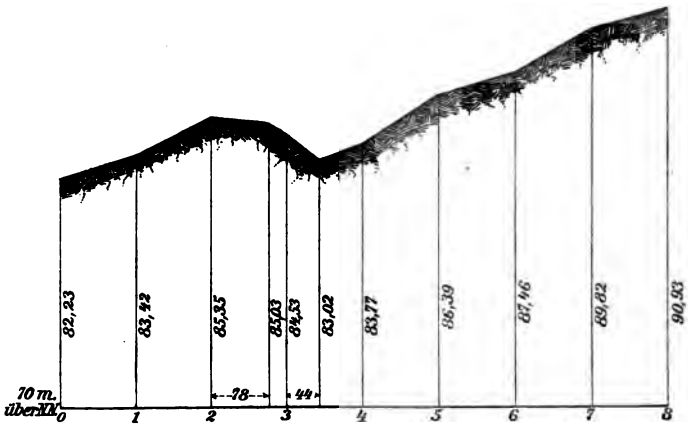


Fig. 151.

des Profils, in die die Längen- und Höhenmaße eingetragen werden. Die Skizze gibt den Anblick des Profils vom vorher-

gehenden aus gesehen wieder, was zur Bestimmung von rechts und links zu beachten ist. Eine zweimalige, unmittelbar aufeinanderfolgende Aufnahme jedes Profils bei verschiedener Instrumenthöhe liefert eine hinreichende Meßprobe ohne nennenswerten Zeitverlust. Die Ablesungen der zweiten Messung werden in Klammern beigefügt (vgl. Fig. 150).

In Fig. 151 ist auf Grund der Messungszahlen der Höhenplan des Längenprofils entworfen. Die Darstellung ist so erfolgt, als ob alle Punkte in einer Vertikalebene lägen. Um die Höhenunterschiede deutlicher hervortreten zu lassen, werden für die Höhen und Längen verschiedene Maßstäbe angewendet, so z. B. 1 : 200 und 1 : 5000 (Fig. 151 ist auf die Hälfte verkleinert). Zugleich ist es bequem, alle Höhen um ein rundes Maß zu verkleinern, was um so weniger von Einfluß ist, als die einzelnen Höhen in die Zeichnung eingeschrieben werden.

Die Querprofile werden in der Regel unverzerrt in passendem Maßstabe gezeichnet, damit der Bauentwurf unmittelbar eingetragen werden kann.

§ 89. Flächennivellements.

Zur Höhenaufnahme von Flächen, die sich nach beiden Richtungen hin ausdehnen, ist die Methode der Längen- und Querprofile weniger bequem als die Ausführung von *Flächennivellements*, bei denen die aufzunehmenden Punkte in Form eines quadratischen Rostes über die Fläche verteilt werden. Die Seiten der Quadrate erhalten je nach dem Zweck der Aufnahme eine Länge von 10—20 m, bei gleichförmigem Gelände werden jedoch auch größere Abstände am Platze sein. Die Eckpunkte sind lediglich durch Nummerpflöcke zu bezeichnen. Wird eine Horizontalaufnahme gleichzeitig ausgeführt, so sind geeignete Punkte des Quadratnetzes von den Messungslinien aus mit aufzunehmen; auch bei vorhandenem Lageplan ist das Quadratnetz durch Einmessung einzelner Nummerpflöcke an Punkte der Karte anzuschließen.

Das Nivellement beginnt mit dem Anschluß an den nächstgelegenen Festpunkt, von dem ein Nivellementszug nach dem Aufnahmegebiet geführt wird. Hier werden die einzelnen Ge-

ländepunkte, die Ecken des Quadratnetzes, als Zwischenpunkte aufgenommen, für die, da die Latte unmittelbar auf den Boden gesetzt wird, die Ablesung der Zentimeter genügt. Nur bei den Wechselpunkten, die zum Übergang von einer Aufstellung zur andern dienen, ist die genaue Ablesung notwendig, um einer Häufung der Fehler vorzubeugen. Das Aufschreiben erfolgt in dem bisher benutzten Formular, in dem die bequemen Rechenproben die geringe Mehrarbeit der doppelten Aufschreibung jeder Zwischenpunktsablesung sehr wohl rechtfertigen. Durch den Abschluß des Nivellements bei einer zweiten Höhenmarke wird eine Meßprobe für die Wechselpunkte, nicht aber für die Zwischenpunkte erlangt; es ist deshalb eine Wiederholung der ganzen Aufnahme erforderlich.

Das Flächennivellement unter Anwendung eines quadratischen Rostes erfreut sich großer Beliebtheit infolge der bequemen Eintragung der Höhenaufnahme in den Lageplan. Zur genauen Darstellung des Geländereliefs ist es nicht das geeignetste Verfahren, da die Eckpunkte der Quadrate nicht immer die charakteristischen Punkte des Geländes treffen werden. Für eine genaue Höhenaufnahme ist deshalb die Auswahl der Punkte lediglich in Rücksicht auf die Bodengestaltung zu treffen, so daß nicht nur die Verbindungslinien der Punkte in der Geländeoberfläche liegen, sondern auch die Flächen der von ihnen gebildeten Dreiecke und windschiefen Vierecke. Eine Zerlegung der Geländeoberfläche in ebene Dreiecke würde ausreichend sein, jedoch bietet die Hinzuziehung des in welligem Gelände oft genug vorkommenden windschiefen Vierecks in vielen Fällen eine Vereinfachung der Aufnahme, indem es mehrere Dreiecke ersetzen kann. Bei der Horizontalaufnahme der ausgewählten Geländepunkte sind ihre Verbindungslinien in einer Skizze zur Darstellung zu bringen, damit nicht bei der häuslichen Bearbeitung durch falsche Verbindungen ein der Natur nicht entsprechendes Relief entsteht. Die Schwerfälligkeit eines Flächennivellements nach *zerstreuten Punkten* liegt in der Horizontalaufnahme derselben, die ein besonderes Netz von Messungslinien erforderlich macht. Es eignet sich deshalb dieses Verfahren mehr für die später zu behandelnden tachymetrischen Höhenaufnahmen.

Die aus dem Flächennivellement hervorgehenden Höhen der Geländepunkte bedürfen ebenfalls der bildlichen Darstellung, um für praktische Zwecke verwendbar zu sein. Die zeichnerische Wiedergabe liegt hier nicht so nahe, wie bei den Profilen, es muß vielmehr eine besondere Methode angewendet werden, die Methode der *Höhenkurven* oder *Niveaukurven*. Denken wir uns Parallelflächen zum Geoid in regelmäßigen lotrechten Abständen z. B. von 10 zu 10 m gelegt, so schneiden diese die physische Erdoberfläche in Kurven, die lediglich von der Gestalt der letzteren abhängig sind. Werden diese Kurven auf die Geoidfläche projiziert und im Lageplan dargestellt, so lassen sie die Geländeformen deutlich erkennen. Diese Methode wurde von dem Geographen *Buache* im Jahre 1752 zum ersten Male zur Darstellung der Tiefen des Kanals benutzt und 1771 durch den französischen Privatgelehrten *Du Carla* auch für die Wiedergabe der Höhen in Landkarten in Vorschlag gebracht. Seit dieser Zeit hat die Methode der Höhenkurven allgemeine Verbreitung gefunden.

Zur Konstruktion der Höhenkurven werden zunächst die Höhen aller Punkte in den Lageplan eingetragen und die Schnittpunkte der Kurven mit den Quadratseiten durch Interpolation aufgesucht. Da im Falle des quadratischen Rostes die Eckpunkte ohne Rücksicht auf die Geländeformen gelegt werden, so können die Geländeflächen innerhalb der Quadrate auch keinesfalls als windschiefe Vierecke angesehen werden, und es genügt deshalb, die auf den Quadratseiten gefundenen Kurvenpunkte durch je einen abrundenden Zug zu verbinden, der als Höhenkurve angesehen werden kann. Den wirklichen Höhenkurven wird man durch dieses Verfahren um so näher kommen, je kleiner die Quadratseiten sind.

Anders ist es bei der Aufnahme nach zerstreuten Punkten, bei der die Flächen der Dreiecke und windschiefen Vierecke sich dem Gelände mit großer Annäherung anschmiegen und deshalb eine genauere Konstruktion der Höhenkurven notwendig machen. Die Fläche eines windschiefen Vierecks $ABCD$ (Fig. 152), dessen Horizontalprojektion $A'B'C'D'$ ist, wird durch eine Gerade PQ beschrieben, die die Seiten BC und AD stets nach demselben Verhältnis teilt. (In der Mathematik wird

diese Fläche als ein hyperbolisches Paraboloid bezeichnet.) Die Höhenkurven erhält man dadurch, daß man ihre Schnittpunkte mit der Geraden PQ in jeder Lage der letzteren durch Interpolation bestimmt. Die Kurven bilden innerhalb eines Vierecks, wie leicht nachzuweisen ist, Hyperbeln.

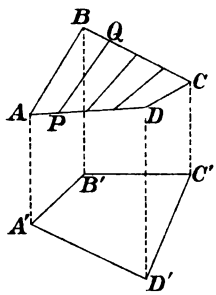


Fig. 152.

Auch die Aufnahme von Längen- und Querprofilen kann zur Konstruktion von Höhenkurven verwendet werden. Jedoch ist es hierzu notwendig, daß bereits bei der Wahl der Punkte in den Querprofilen auf die Verbindung der Profile durch Dreiecke und windschiefe Vierecke soweit als möglich Rücksicht genommen wird, weil sonst der Verlauf der Kurven zwischen den Profilen sich schwer ermitteln läßt.

Es wiederholt sich hierbei stets die Aufgabe, eine gerade Linie, deren Endpunktshöhen gegeben sind, derartig einzuteilen, daß die Teilpunkte bestimmten Höhen entsprechen. Um die Lösung dieser Aufgabe zu erleichtern, ist eine große Anzahl von mechanischen Hilfsmitteln konstruiert worden, von denen in Fig 153 der *Schichtensucher* von *Hamann* in Friedenau bei Berlin dargestellt ist. Das Lineal a ist mit dem Lineal b durch ein Scharnier verbunden, dessen Zentrum eine Durchbohrung enthält. Diese wird auf den Endpunkt A der vorliegenden Linie gebracht und das Lineal c an b so angelegt, daß man an dem Zeigerstrich die Höhe 71,1 des Punktes A abliest. Hierauf wird b verschoben, bis der Zeiger auf der Höhe 49,8 von B steht, und das Lineal a soweit gedreht, daß es durch B geht. Wird nun der Maßstab festgehalten und der Zeiger der Reihe nach auf 50,0, 55,0 usw. eingestellt, so zeigt die Kante von a unmittelbar die gesuchten Teilpunkte der Linie AB.

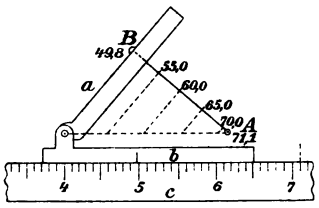


Fig. 153.

§ 90. Gefällmessungen.

Im Wasserbau spielt die Ermittlung des Spiegelgefälles fließender Gewässer eine wichtige Rolle. Seine Bestimmung

durch ein Nivellement ist ohne weiteres ausführbar, wenn für längere Zeit der Wasserspiegel als unveränderlich angesehen werden kann; ein gewöhnliches Längennivellement längs des Ufers, verbunden mit der Messung der Abstände der Lattenaufstellungen, genügt hierzu. Bei kleinen Bächen mit stärkerem Gefälle wird man auf diesem Wege immer eine genügende Genauigkeit erzielen. Anders ist es aber bei größeren Wasserläufen mit schwachem Gefälle, bei denen Hebungen und Senkungen des Wasserspiegels das letztere beträchtlich beeinflussen.

Hier ist zunächst eine Stationierung etwa mit Abständen von 100 m durch kleine Pfähle, die im Wasser unmittelbar am Ufer stehen, auszuführen. Durch ein Längennivellement werden die Höhen aller Pfahlköpfe bestimmt, und es sind dann nur noch gleichzeitig ihre Höhen über dem Wasserspiegel mit einem kleinen Maßstabe zu messen, um das Gefälle zu finden, wozu allerdings ein großes Gehilfenpersonal erforderlich wird. Ist der Beobachter auf einen Gehilfen allein angewiesen, so bleibt nur die Annahme übrig, daß die Änderungen des Wasserspiegels überall dieselben und der Zeit proportional sind. Werden dann die Höhen der Pfahlköpfe über dem Wasserspiegel von Punkt zu Punkt gleichmäßig fortschreitend auf dem Hinwege und auf dem Rückwege gemessen, so entspricht das arithmetische Mittel beider Messungen unter der obigen Annahme einer gleichzeitigen Beobachtung auf allen Punkten.

§ 91. Nivellierinstrumente mit Ringfernrohr.

Bei zwei weiteren Grundformen des Nivellierinstruments ist, wie die Fig. 154 u. 155 zeigen, das Fernrohr mit zylindrischen Ringen versehen, mit denen es in y-förmigen Lagern ruht. Da hierbei eine Drehung des Fernrohrs um die *Ringachse* möglich ist, so tritt als erste Bedingung für die Justierung dieser Instrumente die Parallelstellung der Visierachse und der Ringachse oder das *Zentrieren des Fadenkreuzes* auf. Die Parallelität beider Achsen spricht sich dadurch aus, daß ein mit dem Fadenkreuz eingestelltes entferntes Ziel beim Drehen des Fernrohrs um die Ringachse im Gesichtsfelde seine Lage gegen das Fadenkreuz nicht ändert.

Zur Zentrierung des Fadenkreuzes werden am besten die beiden Fäden nacheinander in ihre richtige Stellung gebracht. Wird mit dem Horizontalfaden an einer Nivellierlatte abgelesen und die Ablesung nach Drehung um die Ringachse um 180° bei sonst unveränderter Stellung des Instruments wiederholt, so ist der Faden mit den Justierschrauben auf das arithmetische Mittel beider Ablesungen einzustellen. Dieselbe Justierung ist

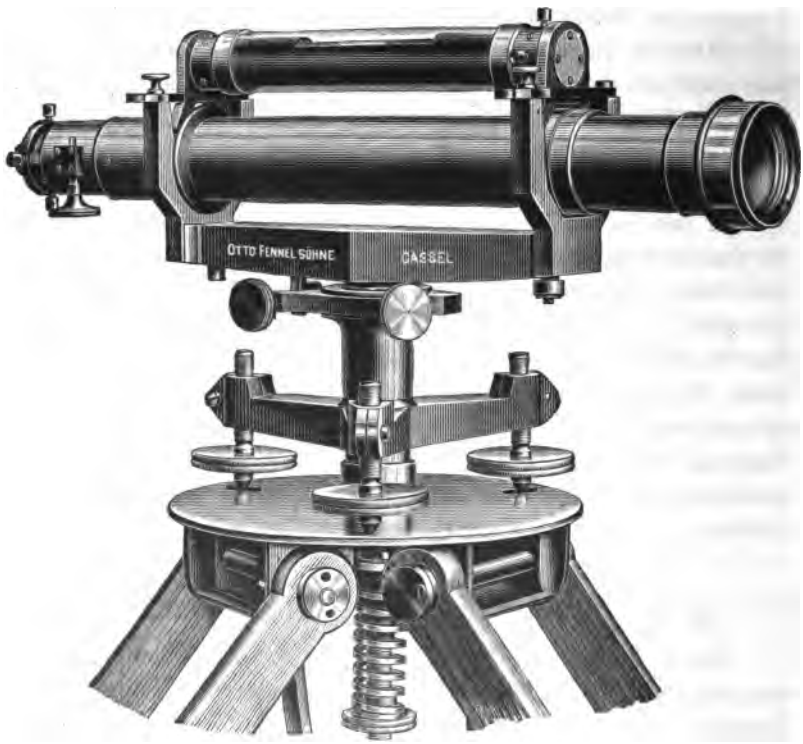


Fig. 154.

mit dem Vertikalfaden auszuführen. Da die optische Achse des Objektivs in der Regel nicht mit der Ringachse zusammenfallen wird, so ist bei der Zentrierung des Fadenkreuzes die Latte in größerem Abstand vom Instrument aufzustellen; es genügt aber auch, statt der Latte einen beliebigen entfernten Zielpunkt einzustellen, statt der zweiten Ablesung den Abstand des Fadens

vom Zielpunkt zu schätzen und die Zentrierung durch sukzessive Annäherung auszuführen.

Der wesentliche Unterschied beider Instrumente besteht in der Befestigung der Libelle auf dem Fernrohr. In Fig. 154 ist eine Reiterlibelle auf die Ringe des Fernrohrs lose aufgesetzt, während in Fig. 155 eine Wendelibelle starr mit dem Fernrohr verbunden ist.

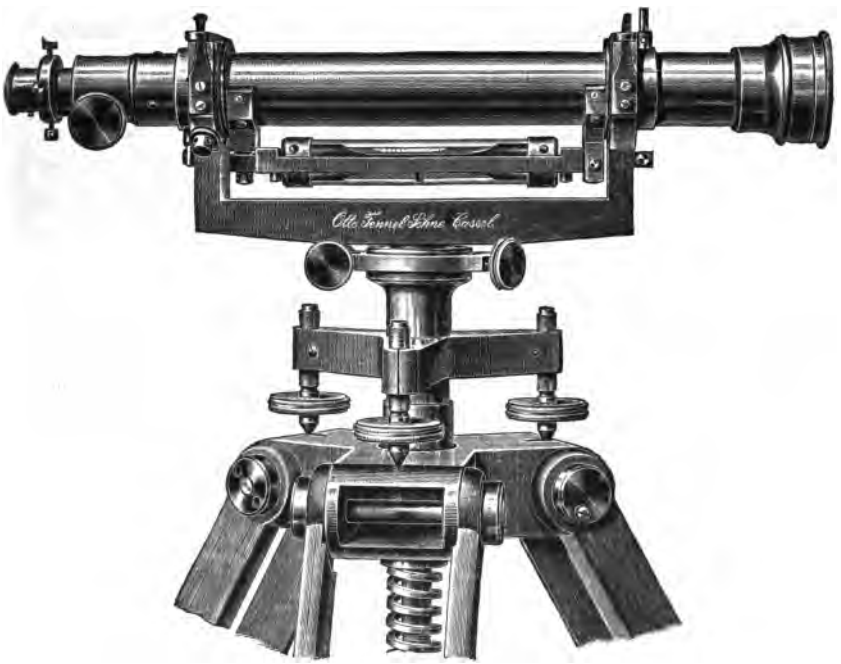


Fig. 155.

Betrachten wir zunächst das *Nivellierinstrument mit Ringfernrohr und Reiterlibelle* (Fig. 154). Nach der Zentrierung des Fadenkreuzes ist die Kreuzung der Libellen- und Ringachse zu beseitigen und es sind beide Achsen einander parallel zu stellen. Sind die beiden Ringdurchmesser gleich, so können die Ringe als einem Zylinder angehörig betrachtet werden, und die Justierung entspricht dann der S. 69 und 70 behandelten Aufgabe.

Ist endlich, wie in Fig. 154, keine Kippschraube vorhanden, so muß noch die Forderung erfüllt werden, daß der Winkel

zwischen der Ringachse und der Stehachse ein rechter ist. Hierzu ist eine geringe Drehung des ganzen oberen Teiles des Instruments um eine in der Mitte liegende Kippachse mit Hilfe zweier Justierschrauben ausführbar, die unter den beiden Fernrohrträgern sichtbar sind.

Die Annahme, daß beide Ringe ein und demselben Zylinder angehören, wird nicht immer streng erfüllt sein, weshalb eine Prüfung der Ringe auszuführen ist. Denken wir uns in Fig. 156 die Ringe, ihre Lager und die Libellenfüße in die Zeichnungs-

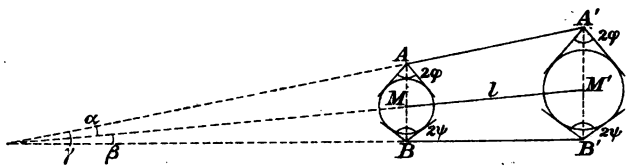


Fig. 156.

ebene hineingedreht, so ist zunächst einleuchtend, daß die drei Linien AA', BB' und MM' sich in einem Punkt schneiden. Hebt man die Libelle auf, vertauscht die Ringe des Fernrohrs in ihren Lagern durch Umlegen desselben und setzt die Libelle in unveränderter Lage wieder auf, so erleidet die Linie AA' eine Neigungsänderung von 2γ, die durch die Bewegung der Luftblase gemessen werden kann. Werden die Radien der Ringe mit R und r bezeichnet, so ist

$$\alpha = \frac{A'M' - AM}{l} = \frac{R - r}{l} \frac{1}{\sin \varphi},$$

$$\beta = \frac{B'M' - BM}{l} = \frac{R - r}{l} \frac{1}{\sin \psi}$$

und

$$\gamma = \alpha + \beta = \frac{R - r}{l} \left(\frac{1}{\sin \varphi} + \frac{1}{\sin \psi} \right).$$

Hieraus findet sich

$$\alpha = \gamma \frac{\sin \psi}{\sin \varphi + \sin \psi}.$$

Ist γ in Teilen der Libellenskala gegeben, so kann α in derselben Einheit berechnet werden. Wird die Libelle justiert, so erzielt man nur, daß AA' parallel der Libellenachse wird;

soll jedoch die Ringachse horizontal gestellt werden, so ist der Libelle der Ausschlag α zu geben.

Nach dem Vorstehenden läßt sich auch leicht die Differenz $R - r$ berechnen, da l meßbar ist.

$$R - r = \gamma l \frac{1}{\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{1}{\sin\psi}} = \gamma l \frac{\sin\varphi \sin\psi}{\sin\varphi + \sin\psi}.$$

An dem Nivellierinstrument Nr. 6268 von *Fennel* in Cassel, das der hiesigen geodätischen Sammlung angehört, wurde festgestellt, daß der Ring am Objektivende größer als der am Okularende ist und daß $\gamma = 0{,}125$ Libellenteilen ist.

Durch direkte Messung ergab sich $\varphi = 49^0$, $\psi = 46^0$, $l = 190$ mm und hieraus $\alpha = 0{,}061$ Libellenteilen. Die Ungleichheit der Ringe kann demnach bei der Justierung vernachlässigt werden.

Um auch noch $R - r$ berechnen zu können, wurde die Angabe der Libelle zu $22''$ bestimmt, womit $\gamma = 2{,}75''$ wird. Mit Hilfe der vorstehenden Gleichung ergibt sich $R - r = 0{,}93\,\mu$ ($1\,\mu = \frac{1}{1000}$ mm).

Den Vorteil der einfachen Justierung behält das Instrument auch dann noch, wenn die Libelle mit dem Ringfernrohr fest verbunden ist, da in § 31 S. 70 gezeigt wurde, wie auch in diesem Falle die Horizontalstellung der Zylinderachse ausführbar ist. Die feste Verbindung von Libelle und Fernrohr ist sogar der losen vorzuziehen, da selbst bei der justierten Reiterlibelle Sandkörner unter den Libellenfüßen leicht den Parallelismus der Libellen- und Ringachse stören können. Um auch dem Einfluß verschiedener Ringdurchmesser Rechnung tragen zu können, wird solchen Instrumenten in der Regel noch eine besondere, für die Prüfung bestimmte Reiterlibelle beigefügt.

Bei dem *Nivellierinstrument mit Ringfernrohr und Wendelibelle* (Fig. 155) ist die Ringachse als Drehachse aufzufassen und die Justierung der Libelle nach S. 71 auszuführen. Da diese Justierung von der Gestalt des Rotationskörpers unabhängig ist, so ist die Gleichheit der Ringdurchmesser nicht erforderlich.

Auch hier ist, wenn die Kippschraube fehlt, die Ringachse senkrecht zur Stehachse zu stellen.

Den Anlaß zur Konstruktion der Instrumente mit Ring-

fernrohr gab nicht in erster Linie die Möglichkeit einer bequemen Justierung, sondern das Bestreben, die Instrumentalfehler bei der Messung durch Ablesen in zwei verschiedenen Fernrohrlagen, ähnlich wie bei der Horizontalwinkelmessung unschädlich zu machen. Solche Messungen mit Kompensation der Fehler werden indessen jetzt kaum noch ausgeführt, und es wird nur noch der Vorteil der bequemen Justierung ausgenutzt.

§ 92. Taschennivellierinstrumente.

Außer den Instrumenten, die für die exakte Ausführung geometrischer Nivellements bestimmt sind, gibt es noch eine Anzahl kleinerer *Taschennivellierinstrumente* für flüchtige Höhenbestimmungen mit geringerer Genauigkeit. Als einfachstes Instrument sei hier die geschlossene *Kanalwage* von *Kahle* genannt, eine zu einem geschlossenen Rechteck mit den Dimensionen 20 und 10 cm zusammengebogene Glasröhre, die etwa zur Hälfte mit gefärbtem Alkohol gefüllt ist. Eine horizontale Visur wird mit diesem Instrument dadurch erhalten, daß man über die beiden Oberflächen der Flüssigkeit hinwegblickt. Da das Instrument lediglich mit der Hand gehalten wird, so gibt die Augenhöhe zugleich die Visierhöhe an. Wird hierzu noch eine einfache Nivellierlatte mit Dezimeterteilung genommen, so kann mit diesen einfachen Hilfsmitteln ein Nivellement in der gewöhnlichen Weise ausgeführt werden.

Höheren Anforderungen genügen diejenigen Taschennivellierinstrumente, die mit einer Libelle versehen sind, wie das in den Fig. 157 u. 158 in der Ansicht und im Horizontalschnitt dargestellte Instrument von *Sartorius* in Göttingen. Mit Hilfe des Spiegels *S* sieht man die Wendelibelle *L* neben dem Fadenkreuz des kleinen Fernrohrs und kann so beim Ablesen zugleich

Fig. 157.

die Stellung der Luftblase prüfen. Zur Beleuchtung der Libelle dienen zwei Fenster *F*. Das Instrument wird entweder wie in Fig. 157 auf einem Stock oder auf einem leichten Stativ mitKugelgelenk gebraucht.

Fig. 158.

Eine große Klasse von Instrumenten, die demselben Zweck dienen, besitzt statt der Libelle eine Pendelvorrichtung, durch die die Horizontalstellung des Fernrohrs selbsttätig bewirkt wird.

Die im Vorwort genannten Lehrbücher enthalten umfangreiche Kapitel über *Nivellieren*. Als spezielles Lehrbuch ist noch zu nennen *Franz Lorber*, Das Nivellieren (Wien 1894).

12. Kapitel.

Die trigonometrische Höhenmessung.

§ 93. Der Höhenkreis.

Das Verfahren der trigonometrischen Höhenmessung besteht der Hauptsache nach in der Messung von *Höhenwinkeln* oder *Zenitdistanzen*, d. h. derjenigen Winkel, die die Visierachse mit der Horizontalebene oder mit der Lotrichtung bildet. Zur Messung solcher Winkel wird der mit einem Höhenkreis versehene Theodolit benutzt. Sind beide Kreise mit gleicher Ablesegenauigkeit ausgerüstet, so wird das Instrument entsprechend dem astronomischen Sprachgebrauche als *Universalinstrument* bezeichnet.

In Fig. 159, die einen Theodolit von *Hildebrand* in Freiberg darstellt, ist die Anordnung des Höhenkreises und seiner Ablesevorrichtungen deutlich erkennbar. Der Höhenkreis ist außerhalb der Fernrohrträger auf der Kippachse starr befestigt. Die mit Nonien versehenen Zeiger sind auf einer kreisförmigen um die Kippachse drehbaren Scheibe angebracht, die zugleich als Schutzdeckel für die Teilung des Kreises dient und nur an

den Zeigern durch Glasfenster unterbrochen wird. Diese Alhidade wird durch eine Feinbewegung mit Federbolzen an einem

Fig. 159.

Zapfen der Horizontalkreisalhidade festgehalten, so daß nur eine geringe Drehung um die Kippachse möglich bleibt. Mit der Alhidade ist noch eine besondere Röhrenlibelle verbunden.

Die Bezifferung der Höhenkreisteilung gibt bei der Ablesung entweder Höhen- und Tiefenwinkel der Visierachse oder deren Zenitdistanzen an. Letzteres ist in den meisten Fällen vorzuziehen, da bei der ersteren Anordnung Verwechslungen zwischen Höhen- und Tiefenwinkeln leicht auftreten können. Im folgenden soll durchlaufende Bezifferung von 0^0 bis 360^0 vorausgesetzt werden, die in der ersten Fernrohrlage am ersten Zeiger Zenitdistanzen angibt.

Wenn wir von dem Höhenkreis absehen, so entspricht Fig. 159 einem Theodolit mit exzentrischem Fernrohr (vgl. § 38). Das an das Okular angeschraubte Prisma erleichtert die Einstellung des Fernrohrs auf kleine Zenitdistanzen und

kann für die vorliegenden Zwecke entfernt werden. Für die Nonien des Horizontalkreises sind statt der Lupen Mikroskope angebracht, da bei der kompendiösen Form des Instruments die Annäherung des Auges an die Lupen nicht bequem sein würde. Die Bedingungen, die von den verschiedenen Achsen des Instruments für die Horizontalwinkelmessung erfüllt sein müssen, sind bereits früher S. 76 und 80 behandelt worden, hier ist nur noch die Messung der Zenitdistanzen zu erörtern.

Daß eine Exzentrizität der Alhidade und eine Abweichung des Zeigerabstandes von 180° unschädlich ist, gilt für den Höhenkreis ebenso wie für den Horizontalkreis (vgl. S. 86). Sollen die Ablesungen am Höhenkreise die wahren Zenitdistanzen der Visierachse angeben, so muß die Alhidade zwei Bedingungen erfüllen:

1. Die Verbindungslinie beider Zeiger muß stets denselben Winkel mit der Lotrichtung einschließen.

2. Bei lotrechter nach dem Zenit gerichteter Visierachse muß die Zenitdistanz 0° abgelesen werden.

Zur Erfüllung der ersten Bedingung werden drei verschiedene Anordnungen angewendet, von denen Fig. 159 die vollkommenste wiedergibt. In der ersten nur für untergeordnete Zwecke gebräuchlichen Form sind die Zeiger des Höhenkreises mit der Alhidade des Horizontalkreises oder mit einem der beiden Fernrohrträger bis auf eine kleine Justierbewegung fest verbunden. Die konstante Lage der Verbindungslinie beider Zeiger gegen die Lotrichtung kann in erster Linie dadurch erzielt werden, daß man die Stehachse des Theodolits mit der Reiterlibelle in aller Schärfe lotrecht stellt. Da im Laufe der Messungen auf einem Standpunkt jedoch namentlich durch unvermeidliche Änderungen in der Stellung des Stativs leicht eine geringe Neigung der Stehachse eintritt, die wohl für die Horizontalwinkelmessung bedeutungslos ist, Zenitdistanzen aber unter Umständen ihrem ganzen Betrage nach beeinflussen kann, so liefert diese Methode nicht die besten Resultate.

Vorteilhafter ist es, wenn auf der Alhidade des Horizontalkreises oder an einem Fernrohrträger eine Röhrenlibelle in der Richtung der Visierebene angebracht ist. Nachdem die Visierebene auf das Ziel gerichtet ist, wird diese Libelle mit Hilfe

einer Fußschraube in aller Schärfe zum Einspielen gebracht, und hierauf der Horizontalfaden des Fernrohrs auf das Ziel eingestellt. Hierdurch werden die kleinen Abweichungen der Stehachse von der lotrechten Stellung unschädlich gemacht. Es ist jedoch zu bedenken, daß bei Anwendung dieses Verfahrens nicht gleichzeitig auch Horizontalwinkel gemessen werden können, da beim Drehen der Fußschrauben stets geringe Drehungen des Horizontalkreises auftreten.

Bei der zweiten und besten Anordnung der Höhenkreisalhidade wird die Lotrechtstellung der Stehachse nur mit derjenigen Schärfe ausgeführt, die für die Messung der Horizontalwinkel erforderlich ist. Die Konstruktion ist bereits S. 218 an Fig. 159 erläutert worden. Ist für die Messung einer Zenitdistanz der Horizontalfaden auf das Ziel eingestellt, so kann die Verbindungslinie der Zeiger dadurch in die konstante Lage gebracht werden, daß man die Alhidadenlibelle einspielen läßt. Da hierbei die Stellung des Horizontalkreises keine Änderungen erleidet, so können auch zugleich Horizontalwinkel gemessen werden.

Am unbequemsten ist eine dritte Konstruktion, bei der die Zeiger wieder fest mit den unteren Teilen des Instruments verbunden sind, während das Fernrohr mit einer Nivellierlibelle versehen ist, deren Achse der Visierachse parallel gestellt ist. Diese Einrichtung eignet sich mehr zur Messung von Höhenwinkeln als zur Zenitdistanzmessung. Wird zunächst bei einspielender Fernrohrlibelle und hierauf bei Einstellung des Ziels an den Zeigern des Höhenkreises abgelesen, beides bei derselben Stellung der Horizontalkreisalhidade, so gibt die Differenz beider Ablesungen den Höhenwinkel. Für jeden Höhenwinkel sind demnach zwei Ablesungen erforderlich.

§ 94. Die Indexverbesserung des Höhenkreises.

Die zweite Bedingung von S. 219 wird sehr selten erfüllt sein, vielmehr bedürfen alle gemessenen Zenitdistanzen einer Korrektion, der *Indexverbesserung*, um in die wahren Werte der Zenitdistanzen überzugehen. Im folgenden möge vorausgesetzt werden, daß die erste Bedingung stets erfüllt ist, daß also bei

jeder Fernrohreinstellung die Verbindungslinie der Zeiger dieselbe Zenitdistanz hat. In Fig. 160 sei OF_0 diejenige Stellung der Visierachse, bei der die Ablesung am Höhenkreis gleich Null ist. Nun denken wir uns die Visierachse in die Lotrichtung OZ gebracht, wobei wir die Ablesung i erhalten. Stellen wir hierauf die Visierachse auf ein Ziel F_1 in der Zenitdistanz z ein, so findet sich die Ablesung

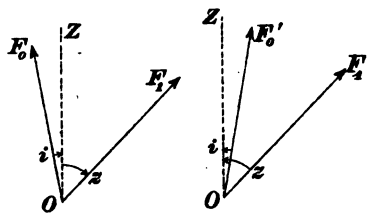


Fig. 160.

$$a_1 = i + z.$$

Hierauf drehen wir die Alhidade des Horizontalkreises um 180°, so daß die Nullrichtung nach OF_0' kommt und stellen wiederum das Ziel F_1 ein. Da bei F_0' die Ablesung gleich Null ist, so wird bei der neuen Einstellung

$$a_2 = 360^0 - (z - i)$$

abgelesen. Hieraus findet sich

$$a_1 + a_2 = 360^0 + 2i \quad \text{oder} \quad i = \frac{a_1 + a_2 - 360^0}{2}$$

und

$$z = a_1 - i = 360^0 - a_2 + i.$$

Wird also eine Zenitdistanz in beiden Fernrohrlagen gemessen, so gibt die Abweichung der Summe beider Messungen von 360° die doppelte *Indexverbesserung.*

Wenn hieraus auch hervorgeht, daß eine vollkommene Beseitigung des Indexfehlers nicht notwendig ist, und alle genauen Messungen in beiden Fernrohrlagen auszuführen sind, so wird dieses Verfahren für manche Aufgaben zu schwerfällig sein. Um auch bei einmaliger Messung die wahren Werte der Zenitdistanzen zu erhalten, muß die Indexverbesserung gleich Null gemacht werden.

Nach der Ermittlung der Indexverbesserung ist der wahre Wert der Zenitdistanz irgend eines Ziels F_1 Fig. 160 bekannt. Ist das Fernrohr auf dieses Ziel eingestellt, so bleibt bei der ersten Anordnung der Alhidade (S. 219) nur übrig, die Zeiger mit Hilfe ihrer Justiervorrichtungen auf die wahre Zenitdistanz

einzustellen. Entweder sind beide Zeiger gemeinsam um die Kippachse drehbar oder jeder für sich in vertikaler Richtung verstellbar eingerichtet. Bei der zweiten Anordnung (S. 220) sind, nachdem das Fernrohr auf das Ziel gerichtet ist, die Zeiger mit Hilfe ihrer Feinbewegung auf die wahre Zenitdistanz einzustellen und es ist hierauf die Libelle zu justieren. Bei der dritten Konstruktion endlich kommt die zweite Bedingung gar nicht in Frage, da die Indexverbesserung jedesmal durch Ablesen bei horizontaler Visur bestimmt wird.

Außer diesen beiden für die Zenitdistanzmessung speziell bestehenden Bedingungen spielen auch noch diejenigen eine Rolle, die bei der Horizontalwinkelmessung für die Stehachse, Kippachse und Visierachse aufgestellt wurden. Es genügt hier jedoch die Forderung, daß der Kollimations- und Kippachsenfehler kleiner als etwa 1' bleiben, da dann ihr Einfluß auf die Zenitdistanzmessung nicht mehr wahrnehmbar ist.

Zur fehlerfreien Messung ist es ferner notwendig, daß der Horizontalfaden im Fernrohr bei lotrechter Stehachse horizontal liegt. Geringe Abweichungen von dieser Lage bleiben ohne Einfluß, wenn die Einstellung in der Nähe des Vertikalfadens erfolgt.

Beispiel einer Zenitdistanzmessung:

Ziel	Fernrohrlage	Zeiger I			Zeiger II			Mittel			Indexverbesserung	Zenitdistanz		
		°	′	″	°	′	″	°	′	″	″	°	′	″
						Standpunkt *P*								
A	1	78	36	45	258	36	15	78	36	30	+ 11	78	36	41
	2	281	23	00	101	23	15	281	23	08	+ 11	281	23	19
	Probe	359	59	45	359	59	30	359	59	38	+ 22	360	00	00
B	1	93	38	15	273	38	00	93	38	08	+ 7	93	38	15
	2	266	21	30	86	21	45	266	21	38	+ 7	266	21	45
	Probe	359	59	45	359	59	45	359	59	46	+ 14	360	00	00

§ 95. Einfache Aufgaben der trigonometrischen Höhenmessung.

Aus der Zenitdistanz eines Ziels und seiner Entfernung kann der Höhenunterschied zwischen diesem Ziel und der Kipp-

achse des Instruments berechnet werden. Durch zweimalige Anwendung dieses einfachen Prinzips ergibt sich der Höhenunterschied zweier Ziele.

Die obigen Zenitdistanzen wurden gemessen, um die Höhe der Spitze A eines trigonometrischen Signals über einer Höhenmarke zu bestimmen. Auf die letztere wurde ein Stab von 0,864 m Länge lotrecht aufgesetzt und seine obere Endfläche B anvisiert. Ferner wurden die beiden Abstände vom Standpunkte aus gemessen: $s_1 = 243{,}87$ m und $s_2 = 38{,}56$ m. Nach Fig. 161 ist

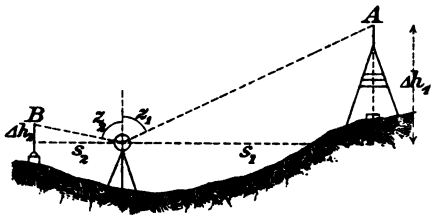


Fig. 161.

$$\Delta h_1 = s_1 \operatorname{cotang} z_1$$
$$\Delta h_2 = s_2 \operatorname{cotang} z_2$$
$$\Delta H = \Delta h_1 - \Delta h_2 = s_1 \operatorname{cotang} z_1 - s_2 \operatorname{cotang} z_2.$$

Ist $z_2 > 90^0$, so wird $\operatorname{cotang} z_2$ negativ, die Formel gilt also auch für diesen Fall. Es findet sich $\Delta h_1 = +\,49{,}122$, $\Delta h_2 = -\,2{,}451$, also $\Delta H = +\,51{,}573$. Die Meereshöhe der Höhenmarke ist 12,246 m, folglich die Höhe von B gleich 13,110 und hieraus die von A auf Zentimeter abgerundet gleich 64,68 m.

Dasselbe einfache Verfahren ist anzuwenden für die Messung von Turmhöhen, nur tritt hier an die Stelle der direkten Messung der Strecke s_1 die indirekte Bestimmung dieser Entfernung unter Anwendung eines Hilfsdreiecks, in dem eine Seite und zwei Horizontalwinkel zu messen sind.

Aber auch ohne Horizontalwinkelmessung ist die Entfernungsbestimmung möglich, wenn Zenitdistanzen auf zwei Standpunkten gemessen werden, die mit der Turmspitze in einer Vertikalebene liegen. In Fig. 162 werden in den beiden Punkten A und B Zenitdistanzen ge-

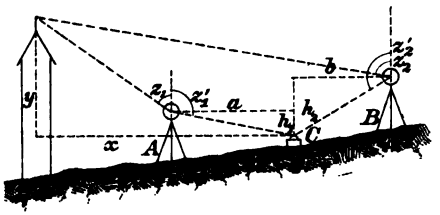


Fig. 162.

messen, um die Höhe der Turmspitze über der Höhenmarke C zu bestimmen. Sind ferner die Entfernungen a und b gemessen, so ist $h_1 = a \operatorname{cotang} z_1'$, $h_2 = b \operatorname{cotang} z_2'$. Hiernach ist

$$\begin{aligned} x - a &= (y - h_1) \operatorname{tang} z_1, \\ x + b &= (y - h_2) \operatorname{tang} z_2, \end{aligned} \quad \text{also} \quad y = \frac{a + b + h_2 \operatorname{tang} z_2 - h_1 \operatorname{tang} z_1}{\operatorname{tg} z_2 - \operatorname{tg} z_1}.$$

§ 96. Einfluß der Erdkrümmung und der Strahlenbrechung.

Die vorstehende einfache Berechnung der trigonometrischen Höhenmessung findet etwa bei der im Beispiel S. 223 vorkommenden Entfernung von 250 m ihre Grenze der Anwendbarkeit. Bei größeren Entfernungen ist es nicht mehr zulässig, für die Berechnung der Höhenunterschiede die Geoidfläche als horizontale Ebene anzusehen, es muß vielmehr auf die Krümmung des Geoids Rücksicht genommen werden. Es genügt jedoch, die schon anfangs erwähnte Annahme einer Kugel mit dem Radius von 6370 km einzuführen.

Ferner entspricht für größere Entfernungen die Annahme einer geradlinigen Visur nicht mehr der Wirklichkeit. Infolge der verschiedenen Dichtigkeit der Atmosphäre an verschiedenen Stellen des Weges, den der Lichtstrahl zurücklegt, wird letzterer mehrfache Richtungsänderungen durch Brechung erleiden und deshalb eine gekrümmte Kurve bilden. Der genauen Berechnung dieser Refraktionskurve stellen sich fast unüberwindliche Hindernisse entgegen, da die Beschaffenheit der Atmosphäre auf dem Wege des Lichtstrahls nur in wenigen Punkten, in der Regel nur in den Endpunkten, aus meteorologischen Messungen ermittelt werden kann. Neben anderen meteorologischen Elementen hat die Lufttemperatur auf die Strahlenbrechung einen großen Einfluß, und der Mangel genügender Temperaturmessungen ist eine Hauptschwierigkeit in der Berechnung der Refraktion. Der Erfolg aller bis jetzt aufgestellten Refraktionstheorien ist infolgedessen sehr zweifelhaft geblieben.

Bei kleineren Entfernungen, wie sie hier vorkommen können, ist zunächst erfahrungsmäßig die Annahme gerechtfertigt, daß die Visierkurve in der Vertikalebene bleibt, die durch die beiden

Endpunkte gelegt wird. Da ferner die Krümmungsradien dieser Kurve sich in ihrem Verlaufe nur allmählich ändern, so wird bei kleinen Entfernungen auch die Annahme überall gleicher Krümmung, also die Substitution eines Kreisbogens, nicht wesentlich von der Wirklichkeit abweichen, und hierdurch wird dann eine einfache Berechnung der Refraktion ermöglicht. Bei Entfernungen unter 5 km werden diese Vereinfachungen keine wahrnehmbaren Vernachlässigungen im Resultat verursachen.

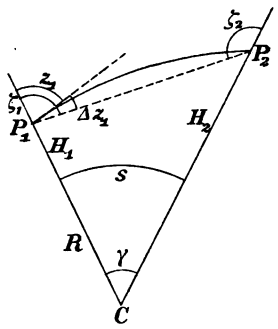


Fig. 163.

Zur Berechnung des Höhenunterschieds $H_2 - H_1$ bezeichne in Fig. 163 z_1 die gemessene, ζ_1 die wahre Zenitdistanz in P_1, mithin Δz_1 den Betrag der Refraktion. Die früher (S. 7) gegebene Definition für den Abstand zweier Punkte P_1 und P_2 ist jetzt dahin zu präzisieren, daß hierunter der Abstand s ihrer Lotrichtungen, gemessen in der Geoidfläche, zu verstehen ist. Unter Benutzung der übrigen Bezeichnungen der Fig. 163 ist in dem Dreieck $P_1 P_2 C$:

$$(1) \qquad \frac{H_2 - H_1}{H_1 + H_2 + 2R} = \frac{\operatorname{tang} \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}}{\operatorname{tang}\left(180^0 - \frac{\zeta_2 + \zeta_1}{2}\right)},$$

und da $\zeta_2 = 180^0 - \zeta_1 + \gamma$, so ist

$$(2) \qquad \operatorname{tang} \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} = \operatorname{cotang}\left(\zeta_1 - \frac{\gamma}{2}\right) \quad \text{und}$$
$$\operatorname{tang}\left(180^0 - \frac{\zeta_2 + \zeta_1}{2}\right) = \operatorname{cotang} \frac{\gamma}{2},$$

also

$$H_2 - H_1 = (H_1 + H_2 + 2R) \operatorname{cotang}\left(\zeta_1 - \frac{\gamma}{2}\right) \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2}.$$

Wird für ζ_1 eingeführt $z_1 + \Delta z_1$, so wird

$$H_2 - H_1 = (H_1 + H_2 + 2R) \operatorname{cotang}\left(z_1 + \Delta z_1 - \frac{\gamma}{2}\right) \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2}.$$

Indem wir $\operatorname{cotang}\left(z_1 + \Delta z_1 - \frac{\gamma}{2}\right)$ nach *Taylor*s Satz entwickeln,

zugleich auch Reihenentwicklung für $\tan\frac{\gamma}{2}$ einführen, erhalten wir unter Vernachlässigung der Glieder dritter und höherer Ordnung

$$H_2 - H_1 = (H_1 + H_2 + 2R)\left\{\operatorname{cotang} z_1 - \frac{1}{\sin^2 z_1}\left(\Delta z_1 - \frac{\gamma}{2}\right)\right\}\frac{\gamma}{2}.$$

Da z_1 nicht wesentlich von 90^0 abweichen wird, so kann in den Gliedern zweiter Ordnung $\frac{1}{\sin^2 z_1}$ durch die Einheit ersetzt werden, wodurch wir erhalten

$$H_2 - H_1 = (H_1 + H_2 + 2R)\left\{\operatorname{cotang} z_1 - \left(\Delta z_1 - \frac{\gamma}{2}\right)\right\}\frac{\gamma}{2}.$$

Unter der Annahme eines kreisbogenförmigen Lichtstrahls ist es üblich, die Refraktion in der Form

$$\Delta z_1 = \frac{1}{2} k_1 \gamma \tag{3}$$

darzustellen, wobei man k_1 als *Refraktionskoeffizienten* bezeichnet. Wird dies und zugleich $\gamma = \frac{s}{R}$ eingeführt, so findet sich

$$H_2 - H_1 = (H_1 + H_2 + 2R)\,\frac{s}{2R}\left\{\operatorname{cotang} z_1 + \frac{s}{2R}(1 - k_1)\right\}$$

oder

$$H_2 - H_1 = \left(1 + \frac{H_1 + H_2}{2R}\right)\left\{s \operatorname{cotang} z_1 + \frac{s^2}{2R}(1 - k_1)\right\}.$$

Bei den hier in Frage kommenden Fällen wird der Faktor $\frac{H_1 + H_2}{2R}$ stets vernachlässigt werden können, es ergibt sich somit die einfache Gebrauchsformel

$$h = H_2 - H_1 = s \operatorname{cotang} z_1 + \frac{s^2}{2R}(1 - k_1). \tag{4}$$

Die vielen bisher ausgeführten Bestimmungen des Refraktionskoeffizienten haben gezeigt, daß derselbe je nach dem Zustand der Atmosphäre zwischen den Grenzen 0,1 und 0,2 schwankt, wobei eine jährliche sowie eine tägliche Periode erkennbar ist. Aus den hierauf bezüglichen Untersuchungen geht hervor, daß die Werte des Refraktionskoeffizienten mittags am kleinsten sind und wenigstens für die Tagesstunden des Sommers in gleichen Zeitabständen von Mittag gleiche Größe haben. Ferner zeigt sich, daß für Visuren, die über die Meeresfläche

hinweggehen oder unmittelbar an der Küste liegen, der Refraktionskoeffizient erheblich größer als im Binnenlande ist. Der österreichische Oberst *Hartl* (geb. 1839, gest. 1903) hat unter Zuzammenfassung des gesamten Materials für das nordöstliche Deutschland die folgenden Mittelwerte des Refraktionskoeffizienten für das Binnenland als Funktion der Tageszeit aufgestellt. Werden die Tagesstunden b vor oder nach dem wahren Mittage in Teilen des halben Tagbogens (der Zeit vom wahren Mittag bis zum Sonnenaufgang oder -untergang) gerechnet, so findet sich

$$k = 0{,}1041 + 0{,}0840\, b^2, \tag{5}$$

wobei jedoch b nicht über 0,8 hinausgehen darf.

Für Linien, die über die See hinweggehen, findet *Hartl*

$$k = 0{,}1510 + 0{,}0962\, b^2. \tag{6}$$

Es ergibt sich hiernach die folgende Tabelle:

b	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
k (Land)	0,10	0,10	0,11	0,11	0,12	0,13	0,13	0,15	0,16
k (See)	0,15	0,15	0,16	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21

Wenn eine genauere Bestimmung des Refraktionskoeffizienten nicht vorliegt, so gibt die obige Tabelle die wahrscheinlichsten Mittelwerte. Für kleinere Entfernungen wird es übrigens immer genügen, einen allgemeinen Mittelwert $k = 0{,}13$ zu benutzen.

Mit dem Mittelwert $k = 0{,}13$ geht (4) über in

$$h = s \operatorname{cotang} z + 0{,}0685\, (s_{km})^2, \tag{7}$$

wobei in das zweite Glied die Entfernung s in Kilometern einzusetzen ist. In der nachstehenden Tabelle sind die Werte dieses Gliedes in Metern für Entfernungen bis zu 4,9 km zusammengestellt.

km	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,02	0,02	0,03	0,04	0,06
1,	0,07	0,08	0,10	0,12	0,13	0,15	0,17	0,20	0,22	0,25
2,	0,27	0,30	0,33	0,36	0,39	0,43	0,46	0,50	0,54	0,57
3,	0,61	0,66	0,70	0,74	0,79	0,84	0,88	0,93	0,99	1,04
4,	1,09	1,15	1,21	1,26	1,32	1,38	1,44	1,51	1,57	1,64

§ 97. Gegenseitige Zenitdistanzen.

Liegen in beiden Punkten P_1 und P_2 Messungen der Zenitdistanz vor, so ergibt sich aus (1) und (2) § 96 S. 225

$$H_2 - H_1 = (H_1 + H_2 + 2R) \operatorname{tang} \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2},$$

und da

$$\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} = \frac{z_2 - z_1}{2} + \frac{\Delta z_2 - \Delta z_1}{2} = \frac{z_2 - z_1}{2} + \frac{\gamma}{4}(k_2 - k_1)$$

ist, so finden wir auf demselben Wege wie früher

$$H_2 - H_1 = (H_1 + H_2 + 2R) \frac{\gamma}{2} \left\{ \operatorname{tang} \frac{z_2 - z_1}{2} + \frac{1}{\cos^2 \frac{z_2 - z_1}{2}} \frac{\gamma}{4}(k_2 - k_1) \right\}$$

oder, da $\cos^2 \frac{z_2 - z_1}{2} = 1$ gesetzt werden kann und unter Einführung der früheren Vernachlässigungen

$$(1) \qquad H_2 - H_1 = s \operatorname{tang} \frac{z_2 - z_1}{2} + \frac{s^2}{4R}(k_2 - k_1).$$

Im allgemeinen werden die beiden Kurven $P_1 P_2$ und $P_2 P_1$ nicht zusammenfallen, was durch die verschiedenen Koeffizienten k_1 und k_2 ausgedrückt ist. Wenn jedoch die Beobachtungen z_1 und z_2 gleichzeitig ausgeführt sind, so wird für die vorliegenden Zwecke die Annahme eines gleichen Zustandes der Atmosphäre in beiden Punkten gerechtfertigt sein, woraus $k_1 = k_2$ folgt. Unter dieser Annahme wird also der Höhenunterschied frei vom Einfluß der Refraktion erhalten.

Da hierbei auch $\Delta z_1 = \Delta z_2$ ist, so bietet die gleichzeitige Messung gegenseitiger Zenitdistanzen auch ein Mittel zur Bestimmung von k. Nach Fig. 163 (S. 225) ist nämlich

$$2\Delta z = 180^0 - z_1 - z_2 + \gamma,$$

und da $\Delta z = \frac{\gamma}{2} k$, so ist

$$(2) \qquad k = 1 + \frac{180^0 - (z_1 + z_2)}{\gamma}.$$

Der Wert von k wird hieraus um so genauer ermittelt, je größer der Abstand der beiden Punkte ist. Nehmen wir z. B. an, daß $z_1 + z_2$ mit einem Fehler von 10″ behaftet ist, so beträgt der Fehler in k bei 1 km, 5 km und 10 km bzw. 0,31, 0,06 und 0,03.

13. Kapitel.

Die barometrische Höhenmessung.

§ 98. Die Messung des Luftdrucks.

Der vertikale Druck, den eine Flüssigkeitssäule von 1 qmm Querschnittsfläche und einer Höhe von h mm ausübt, ist gleich ihrem Gewicht. Da bei allen nicht zusammendrückbaren Flüssigkeiten das Gewicht einer solchen Säule ihrer Höhe proportional ist, so kann man in kurzer Bezeichnung auch sagen, der Druck ist gleich h mm der Flüssigkeit.

Die atmosphärische Luft ist als eine zusammendrückbare Flüssigkeit anzusehen, deren Dichtigkeit infolgedessen an der Erdoberfläche größer als in den höheren Schichten ist. Zur Messung des Luftdrucks gibt man die Höhe einer Vergleichsflüssigkeit an, die den Druck einer Luftsäule von gleichem Querschnitt ausübt. Hierzu benutzt man das Quecksilber, dessen großes spezifisches Gewicht eine sehr geringe Höhe der Vergleichssäule bedingt. Wenn also z. B. in einfacher Bezeichnung gesagt wird, der Luftdruck beträgt 745 mm, so ist hiermit der Druck gemeint, den eine Quecksilbersäule von 745 mm Höhe auf die Flächeneinheit ausübt.

Die Maßeinheit ist hiermit noch nicht genügend definiert, weil zwei Quecksilbersäulen von verschiedener Temperatur und gleicher Höhe verschiedenen Druck ausüben. Da ferner das Gewicht und somit auch der Druck einer Quecksilbersäule von der Schwerkraft abhängt, diese aber mit der Meereshöhe und der geographischen Breite veränderlich ist, so ist außer einer Normaltemperatur auch ein bestimmter Normalwert der Schwerkraft anzugeben. Der Luftdruck wird deshalb durch die Höhe einer Quecksilbersäule in mm gemessen, die bei 0^0 in der Meeresfläche und unter der geographischen Breite von 45^0 denselben Druck ausübt.

Denken wir uns die Lufthülle überall bis zur Meeresfläche verlängert und Mittelwerte des Luftdrucks für alle Punkte der Erdoberfläche gebildet, so ist das Mittel aller dieser Werte, der normale Luftdruck, ca. 760 mm. Betrachtet man die Mittelwerte

des Luftdrucks an verschiedenen Stellen der Meeresfläche, so sind diese, wie die mittleren Isobaren zeigen, sehr verschieden. Aber auch der Luftdruck in einem Punkt der Meeresfläche schwankt zwischen ziemlich weiten Grenzen; es ist hier eine periodische von einer zufälligen Luftdruckschwankung zu unterscheiden. Die periodische Schwankung tritt mit großer Regelmäßigkeit auf und hat in den Tropen eine Amplitude von 2—3 mm, die mit wachsender geographischer Breite abnimmt und bei 60° kaum noch wahrnehmbar ist. Die Periode ist eine doppelte, zwei Minima treten um 4 Uhr morgens und nachmittags, zwei Maxima um 10 Uhr morgens und abends auf. Jedoch machen sich namentlich in höheren Breiten lokale Einflüsse geltend, auch überwiegen hier die zufälligen Schwankungen derartig, daß es langer Beobachtungsreihen bedarf, um die periodischen Schwankungen nachzuweisen.

§ 99. Das Siedethermometer.

Die Siedetemperatur einer Flüssigkeit ist von dem Druck abhängig, unter dem die letztere steht. Ist das Abhängigkeitsgesetz zwischen Siedetemperatur und Druck bekannt, so kann durch Messung der ersteren der Druck ermittelt werden. Der Zusammenhang beider Elemente ist für Wasser von *Régnault* experimentell bestimmt worden; von den Resultaten dieser Untersuchung ist nachstehend ein kurzer Auszug nach *Landoldt* und *Börnstein*[1]) wiedergegeben.

Siedetemp. °C	Druck mm	Diff.
99,5	746,52	
99,6	749,20	2,68
99,7	751,89	2,69
99,8	754,58	2,69
99,9	757,29	2,71
100,0	760,00	2,71
100,1	762,72	2,72
100,2	765,45	2,73
100,3	768,18	2,73
100,4	770,93	2,75
100,5	773,68	2,75

1) *Landoldt-Börnstein*, Physikalisch-chemische Tabellen. 3. Aufl. Berlin 1905.

Da bei einer Siedepunktsänderung von $^1/_{27}{}^0$ sich der Druck bereits um 1 mm ändert, so ist eine sehr genaue Temperaturmessung erforderlich, wenn der Luftdruck bis auf $^1/_{10}$ mm genau ermittelt werden soll. Die für diesen Zweck geeigneten, zuerst von *Wollaston* konstruierten *Siedethermometer* umfassen nur wenige Grade, etwa das Intervall von 85°—101°, während für alle tieferen Temperaturen das Quecksilber im Gefäß bleibt.

Bisher lag die Schwierigkeit der Anwendung dieser sehr empfindlichen Thermometer in Nachwirkungserscheinungen, die eine Veränderung des Eispunktes nach sich zogen. Die durch Erhitzung des Thermometers entstandene Ausdehnung des Glases ging bei schneller Abkühlung erst ganz allmählich vorüber, infolgedessen zeigte der Eispunkt eine zeitweilige Depression. Andererseits trat infolge von Molekularveränderungen ein allmähliches Zusammenziehen und damit Hand in Hand eine Erhöhung des Eispunktes ein. Diese von der Glasart abhängigen Nachwirkungen sind erst in neuerer Zeit durch Anwendung des in Jena hergestellten Borosilikatglases (59^{III}) überwunden worden. Mit der Einführung dieser neuen Thermometer hat die vorstehende Methode der Luftdruckmessung derartig an Wert gewonnen, daß sie mit den andern älteren Methoden erfolgreich konkurrieren kann.

Die Skala der Siedethermometer ist entweder in Zehntelgrade oder auf Grund der vorstehenden Tabelle in Doppelmillimeter geteilt, so daß statt der Siedetemperatur unmittelbar der Luftdruck abgelesen werden kann.

Siedendes Wasser hat in der Regel eine höhere Temperatur als diejenige, die dem äußeren Druck entspricht; letztere Temperatur nehmen dagegen die Dämpfe an der Oberfläche des siedenden Wassers an. Es sind deshalb besondere Kochvorrichtungen konstruiert worden, in denen die Temperatur des Wasserdampfs gemessen werden kann, wie z. B. der in Fig. 164 dargestellte *Siedeapparat* von *Fueß* in Steglitz. Durch eine Spirituslampe wird das Wasser in dem von dem Dreifuß getragenen Kochgefäß *A* zum Sieden gebracht. An den Deckel des letzteren schließt sich eine zylindrische Röhre *B* mit doppeltem Mantel an, in die das Thermometer von oben mit Hilfe eines Gummiringes hineingehängt werden kann. Der innere Mantel paßt in

die Öffnung des Kochgefäßes hinein, so daß der Dampf in ihm aufsteigen muß. Oben dringt er durch Löcher in den äußeren Zylinder und entweicht nach unten durch seitliche Öffnungen. Um das Spritzwasser von der Thermometerkugel fernzuhalten, ist über der Öffnung des Kochgefäßes ein Drahtnetz befestigt. Das Dampfrohr kann durch Ausziehen verlängert oder verkürzt

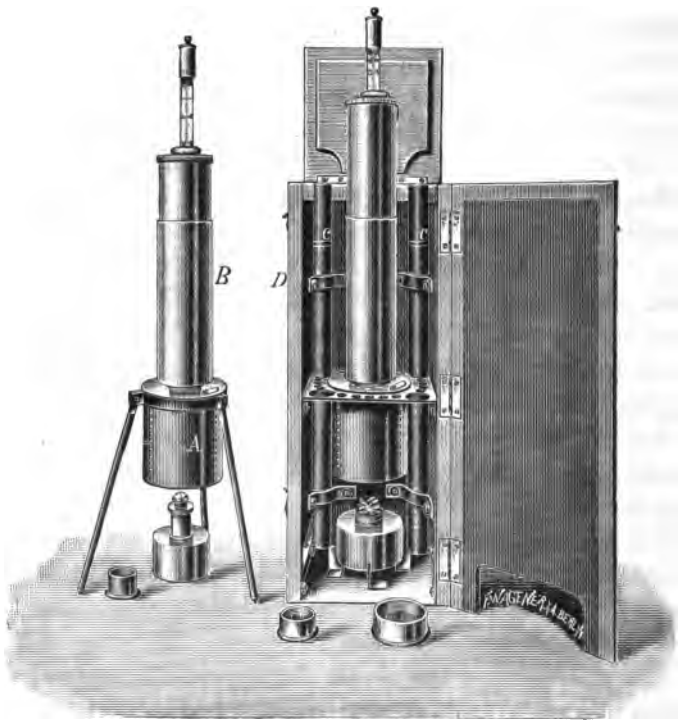


Fig. 164.

werden, entsprechend dem jeweiligen Stand des Thermometers, dessen Quecksilberfaden nicht mehr als 1—2 mm herausragen darf. Für den Gebrauch im Freien kann die Vorrichtung zum Schutz gegen Wind in einen innen mit Eisenblech ausgeschlagenen Holzkasten *D* gestellt werden, der zugleich als Verpackung für den Transport dient und in den Hülsen *c* auch zwei Thermometer aufnehmen kann.

Bei der Ausführung der Messung ist darauf zu achten, daß

die Flamme der Lampe nur mäßig groß bleibt, da bei sehr großer Flamme Änderungen in der Angabe des Thermometers wahrgenommen sind. Vor der Ablesung ist zur Überwindung des Reibungswiderstandes im Innern der Röhre leicht auf den Kopf des Thermometers zu klopfen. Die Ablesung erfolgt am besten mit einem in geringer Entfernung wagrecht aufgestellten Fernrohr, da dann die Parallaxe vermieden werden kann.

Nach dem Gebrauch ist das Thermometer durch Umwenden vollständig mit Quecksilber zu füllen, um die beim Erhitzen überdestillierten Quecksilberkügelchen ins Gefäß zurückzubringen.

§ 100. Das Quecksilberbarometer (Gefäßbarometer).

Zur unmittelbaren Vergleichung des Luftdrucks mit einer Quecksilbersäule dienen die Quecksilberbarometer. Sie werden für Höhenmessungen als *Gefäßbarometer* oder als *Heberbarometer* konstruiert. Im Gefäßbarometer ist eine mit Quecksilber gefüllte oben geschlossene Glasröhre in ein Gefäß mit Quecksilber getaucht. In der Röhre sinkt hierbei das Quecksilber, bis die Säule über dem Gefäß dem Luftdruck das Gleichgewicht hält, wobei über dem Quecksilber ein luftleerer Raum, das *Vakuum*, entsteht. Mit der Röhre ist ein in Millimeter eingeteilter Maßstab verbunden, mit dem die Höhe der Quecksilbersäule gemessen werden kann.

Als Reiseinstrument eignet sich das Gefäßbarometer in der von dem Pariser Mechaniker *Fortin* angegebenen Konstruktion, die zurzeit in der Werkstätte von *Fueß* in Steglitz ausgeführt wird. Fig. 165 zeigt ein solches Instrument neuerer Form

Fig. 165.

in gebrauchsfertiger Aufstellung. Die nähere Einrichtung wird durch die Fig. 166 und 167 erläutert. In Fig. 166 sieht man, daß das Gefäß mit dem Schaft der Röhre durch ein Schraubengewinde verbunden ist, so daß es durch Drehen gehoben oder gesenkt werden kann. Die Gefäßwand ist durch drei Glasfenster unterbrochen, durch die man die Quecksilberoberfläche und auch die in das Quecksilber tauchende Röhre sehen kann. Mit letzterer ist ein spitz auslaufender Stift starr verbunden, dessen Spitze den Nullpunkt der Barometerskala bezeichnet. Wird das Quecksilber durch Drehen des Gefäßes so eingestellt, daß es die Spitze berührt, so fällt der Skalennullpunkt mit der Quecksilberoberfläche zusammen.

Fig. 166.

In Fig. 167 ist ein Teil der Barometerröhre mit ihrer Fassung und der Ablesevorrichtung abgebildet. Die Fassung, eine Messingröhre, trägt in ihrer oberen Hälfte auf beiden Seiten einen rund 5 mm breiten Spalt, durch den das Glasrohr sichtbar wird. Auf der Röhre läßt sich eine kurze Hülse h_1 mit einiger Reibung verschieben, auf der ein Ring r drehbar, jedoch nicht verschiebbar angebracht ist. Eine zweite etwas längere Hülse h_2 ist mit dem Ring r durch ein Schraubengewinde verbunden. Die untere Hülse h_1 dient dazu, die ganze Vorrichtung durch ihre Reibung in beliebiger Höhe festzuhalten, während durch Drehen des Ringes die obere Hülse ein wenig verschoben werden kann. Letztere trägt zwei gegenüberliegende Fenster, deren wagrechte Oberkanten in genau gleicher Höhe liegen. Die hierdurch bestimmte horizontale Visierebene wird auf den Scheitel der ein wenig gewölbten Quecksilberoberfläche eingestellt, und ihre Höhe an der Skala abgelesen. Hierzu ist das vordere Fenster rechts erweitert, so daß die Skala sichtbar wird, und mit einem Nonius versehen, dessen Nullstrich in der Visierebene liegt.

Fig. 167.

Da beim Sinken der Quecksilberoberfläche sich die letztere infolge der Adhäsion unregelmäßig bildet,

so ist die Quecksilbersäule vor dem Ablesen durch Neigen des Barometers langsam in Bewegung zu setzen, um die Adhäsion aufzuheben.

Oberhalb des Gefäßes ist ein Thermometer befestigt, das die Temperatur der Quecksilbersäule angibt.

Um das Instrument für den Transport vorzubereiten, wird es vorsichtig geneigt, wobei das Vakuum sich mit Quecksilber füllt, und gleichzeitig das Gefäß aufwärts gedreht, bis ein am Boden befestigter federnder Stopfen sich gegen das Ende der Glasröhre preßt und diese abschließt. Hierauf wird das Barometer mit dem Gefäß nach oben in ein Etui gesteckt, in dem auch das leichte Stativ untergebracht wird.

Bei *Gefäßbarometern mit festem Gefäß und fester Skala* wird beim Steigen und Fallen des Barometers der Skalennullpunkt bald über, bald unter der Oberfläche des im Gefäß befindlichen Quecksilbers liegen. Die Ablesung an der Skala wird also nur bei einem bestimmten Luftdruck die Höhe der Quecksilbersäule angeben, während sie im übrigen einer Korrektion bedarf. Bezeichnen wir den inneren Durchmesser des Gefäßes mit D, den der Röhre mit d und den äußeren Durchmesser der Röhre mit δ, so wird, wenn das Quecksilber in der Röhre um h steigt, das Quecksilber im Gefäß um

$$H = \frac{d^2}{D^2 - \delta^2} h$$

fallen. Eine Änderung der Barometerablesung um h mm entspricht somit einer Luftdruckänderung von $h + H$ mm. Bequemer als die jedesmalige Berechnung der Korrektion ist die Änderung der Skaleneinheit, so daß letztere einem Millimeter der Luftdruckänderung entspricht. Die *reduzierte Skaleneinheit* ist in Millimetern gleich

$$\frac{h}{h + H} = \frac{1}{1 + \frac{d^2}{D^2 - \delta^2}} = 1 - \frac{d^2}{D^2 - \delta^2},$$

wobei D, d und δ ebenfalls in Millimetern gerechnet sind.

§ 101. Das Quecksilberbarometer (Heberbarometer).

Wird das untere offene Ende des Glasrohrs u-förmig aufwärts gebogen, so kann dieser Teil der Röhre das Quecksilber-

Fig. 168.

gefäß ersetzen. Das Barometer wird dann als *Heberbarometer* bezeichnet. Der Luftdruck wird auch hier durch den Höhenunterschied der beiden Quecksilberoberflächen gemessen, der an einer Skala abgelesen werden kann.

Das *Darmer*sche *Reisebarometer* (Fig. 168) hat zwei getrennte Glasröhren, die durch einen Gummischlauch miteinander verbunden sind, wodurch eine bequeme Verschlußvorrichtung in Form zweier Quetschhähne für den Transport angebracht werden kann. Statt einer zusammenhängenden Metallskala sind zwei getrennte Skalenteile vorhanden, deren Länge für alle vorkommenden Barometerstände ausreicht. Die Einstellvorrichtungen, die den S. 234 beschriebenen ähnlich sind, können an Zahnstangen auf und ab bewegt werden und sind ebenfalls mit Nonien versehen. Das Holzbrett, das als Träger dient, hat hinter dem Glasrohr einen genügend weiten Spalt, der zur genauen Einstellung der Kuppen gegen einen hellen Hintergrund gerichtet wird. Die Höhe der Quecksilbersäule ergibt sich als Differenz der beiden Ablesungen.

*Die Buntens*che *Spitze.* Da es trotz aller Vorsicht vorkommt, daß Luftbläschen in das Barometerrohr gelangen, so wird häufig im Innern desselben ein Glastrichter mit nach unten gerichteter Spitze angebracht, der die aufsteigenden Luftbläschen abfängt, bevor sie in das Vakuum gelangen. Beim *Darmer*schen Barometer kann diese Vorrichtung in einfachster Weise dadurch eingeführt werden, daß das untere Ende des langen Glasrohrs spitz ausgezogen wird, so daß zwischen der Spitze und dem Gummischlauch eine Falle zur Aufnahme von Luftbläschen entsteht.

§ 102. Die Korrektionen des Quecksilberbarometers.

Zu den Reduktionen, die nach S. 229 erforderlich sind, kommen noch weitere, durch die Einrichtung der Instrumente bedingte Verbesserungen.

1. *Die Temperaturkorrektion des Quecksilbers* (Δ_1).

Bezeichnen wir die Höhe der Quecksilbersäule bei der am Thermometer abgelesenen Temperatur t mit B, die Höhe der Säule bei 0^0 mit B_0 und den Ausdehnungskoeffizienten des Quecksilbers mit α, so ist

$$B = B_0(1 + \alpha t),$$

also

$$B_0 = \frac{B}{1 + \alpha t} = B(1 - \alpha t),$$

wenn höhere Potenzen von αt vernachlässigt werden.

Da $\alpha = 0{,}00018$ ist, so erhalten wir die Korrektion

$$\Delta_1 = -\,0{,}00018\ Bt. \tag{1}$$

Nach Gl. (1) ist die nachstehende Hilfstafel (Fig. 169) konstruiert worden, aus der Δ_1 entnommen werden kann.

2. *Die Skalenkorrektion* (Δ_2).

Von der Berücksichtigung der Teilungsfehler der Skala wird man in der Regel absehen können, jedoch darf die Ausdehnung derselben infolge der Temperaturänderung nicht vernachlässigt werden. Ist t_0 die Normaltemperatur der Skala, für die alle gemessenen Längen L fehlerfrei sind, und β der Ausdehnungskoeffizient, so ist der wahre Wert einer bei der Temperatur t gemessenen Länge L

$$L' = L(1 + \beta(t - t_0))$$

und die Verbesserung $\Delta L = L\beta(t - t_0)$.

Mithin ist die Verbesserung des gemessenen Barometerstandes

$$\Delta_2 = +\,B\beta(t - t_0). \tag{2}$$

Der Ausdehnungskoeffizient β ist für Messing gleich 0,000 019, für Neusilber gleich 0,000 018.

Eine konstante Verbesserung wird durch unrichtige Lage des Noniusnullstrichs und beim *Fortin*schen Barometer durch die Abweichung der Einstellspitze von dem Skalennullpunkt erforderlich.

Für ein Gefäßbarometer mit festem Gefäß und fester *nicht reduzierter* Skala kommt noch eine weitere Reduktion hinzu. Ist B_n der Normalbarometerstand, für den der Skalennullpunkt in

die Quecksilberoberfläche fällt, so ist die Korrektion für einen beliebigen Barometerstand B nach S. 235 gleich

$$+(B-B_n)\frac{d^2}{D^2-\delta^2},$$

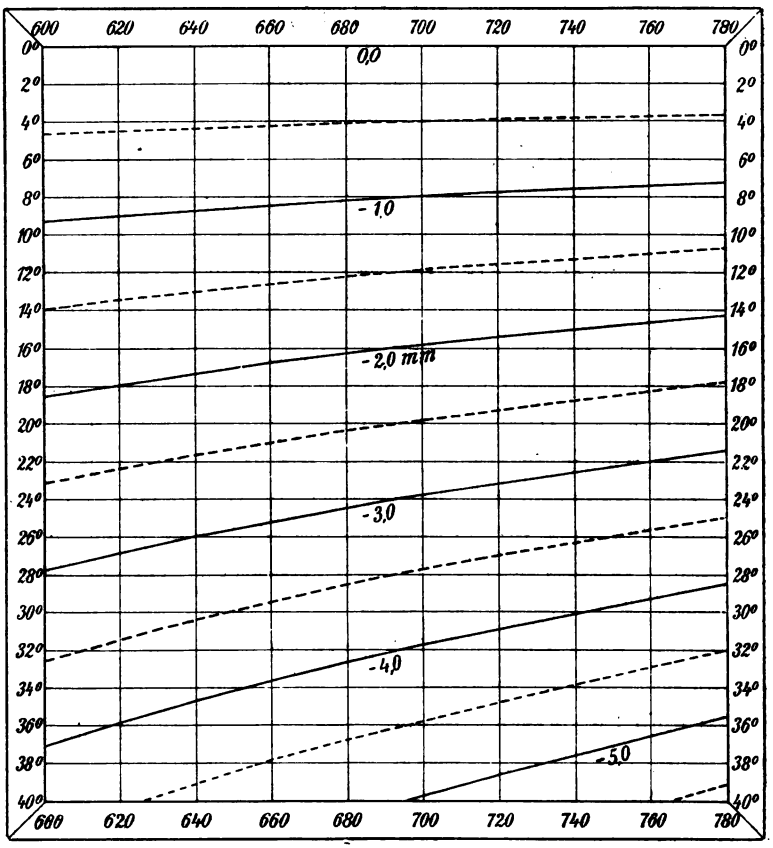


Fig. 169.

und wenn das konstante Glied $-B_n\frac{d^2}{D^2-\delta^2}$ mit den übrigen konstanten Gliedern zusammengefaßt wird, so ist die Verbesserung

$$\Delta_2' = +B\frac{d^2}{D^2-\delta^2}. \tag{3}$$

3. *Die Kapillardepression* (Δ_3).

Durch die Oberflächenspannung entsteht eine Wölbung der Quecksilberoberfläche (*Meniskusbildung*), mit der eine Senkung der letzteren, die *Kapillardepression*, verbunden ist. Die Differenz der oberen und der unteren Kapillardepression ist infolgedessen als Verbesserung der gemessenen Quecksilbersäule hinzuzufügen. Die Ermittlung der Kapillardepression bildet einen wunden Punkt in der Benutzung des Quecksilberbarometers. Da ihr Betrag bei großer Rohrweite verschwindend klein wird, so kann man sich bei den Präzisionsbarometern der meteorologischen Stationen

Kapillardepression.

Rohrweite	Höhe des Meniskus							
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
4	0,83	1,22	1,54	1,98	2,37	.	.	.
5	0,47	0,65	0,86	1,19	1,45	1,80	.	.
6	0,27	0,41	0,56	0,78	0,98	1,21	1,43	.
7	0,18	0,28	0,40	0,53	0,67	0,82	0,97	1,13
8	.	0,20	0,29	0,38	0,46	0,56	0,65	0,77
9	.	0,15	0,21	0,28	0,33	0,40	0,46	0,52
10	.	.	0,15	0,20	0,25	0,29	0,33	0,37
11	.	.	0,10	0,14	0,18	0,21	0,24	0,27
12	.	.	0,07	0,10	0,13	0,15	0,18	0,19
13	.	.	0,04	0,07	0,10	0,12	0,13	0,14

durch Anwendung weiter Röhren helfen. Man hat durch Versuche gefunden, daß die Kapillardepression von der inneren Röhrenweite und von der Höhe des Meniskus abhängt. In der vorstehenden Tabelle sind die von *Mendelejeff* und *Gutkowski* im Jahre 1877 gefundenen Resultate nach *Landoldt* und *Börnstein* zusammengestellt.

Ein Vergleich dieser Tabelle mit anderen lehrt, daß wohl nur die Tafelwerte unter 0,5 bis auf 0,1 sicher anzunehmen sind.

Die Ermittlung der Rohrweite erfolgt am einfachsten nach einem von *Jordan* angegebenen Verfahren dadurch, daß man unter einem Neigungswinkel von 45°, etwa mit Hilfe eines an die Röhre gelegten Zeichendreiecks (Fig. 170) die beiden Ränder des Meniskus anvisiert, und die zwischen den beiden Visuren erfolgte Vertikalverschiebung

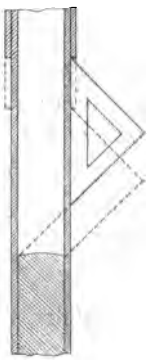


Fig. 170.

des Dreiecks mißt. Diese ist gleich dem inneren Röhrendurchmesser. Die Verschiebung kann direkt mit dem Ablesering gemessen werden, der an das Dreieck angelegt wird.

4. *Korrektion wegen Luft im Vakuum* (Δ_4).

Wenn man das Barometer vorsichtig neigt, so füllt sich das Vakuum, und das Quecksilber schlägt mit deutlich hörbarem hellem Klang gegen das Rohrende. Ist Luft im Vakuum vorhanden, so wird der Klang sehr abgeschwächt, und die Luftblase wird, wenn das Rohrende frei ist, sichtbar. Wenn die Luftblase klein ist, so erfordert sie eine für alle Barometerstände und Temperaturen konstante positive Verbesserung.

Für größere Luftmengen kann die Korrektion, die gleich dem Druck der Luft im Vakuum ist, nach einem von *Arago* angegebenen Verfahren ermittelt werden. Bei einem Barometerstand B_0, dem Luftdruck p_0 im Vakuum und der Temperatur t_0 sei das Volumen des Vakuums durch Messung gleich v_0 gefunden worden; wird hierauf im Gefäß oder im offenen Schenkel das Quecksilber durch Nachfüllen vermehrt, so steigt auch das Quecksilber in der Röhre und verkleinert das Volumen des Vakuums auf den Wert v. Ist der Druck im Vakuum hierbei gleich p und die Barometerablesung gleich B, so ist nach *Mariottes* Gesetz

$$p_0 v_0 = p v,$$

oder da

$$p - p_0 = B_0 - B$$

ist, so ist auch

$$p_0 = \frac{v(B_0 - B)}{v_0 - v}.$$

Macht man $v = \frac{1}{2} v_0$, so ist direkt $p_0 = B_0 - B$.

Ferner ist nach den Gesetzen von *Mariotte* und *Gay-Lussac* für eine beliebige Temperatur t

$$\frac{p_0 v_0}{p v} = \frac{273 + t_0}{273 + t}$$

oder

$$p = p_0 \frac{v_0}{v} \frac{(273 + t)}{(273 + t_0)}.$$

Setzen wir

$$\frac{p_0 v_0}{273 + t_0} = k,$$

so erhalten wir die Korrektion Δ_4, die gleich dem Druck der Luft im Vakuum ist,

$$\Delta_4 = k\frac{273 + t}{v}. \tag{4}$$

Die Ausführung des Verfahrens ist nicht bequem, da beim Nachfüllen des Quecksilbers leicht kleine Luftbläschen mit eingeführt werden, die das Barometer noch weiter verschlechtern. Am einfachsten ist es, wenn man die Verbesserung Δ_4 unmittelbar durch Vergleichung mit dem wahren Luftdruck bei verschiedenen Temperaturen und Barometerständen bestimmen kann.

5. *Die Schwerekorrektion* (Δ_5).

Die Luftdruckbestimmungen mögen in der Meereshöhe H und der geographischen Breite φ ausgeführt werden. Wir bezeichnen mit g die Schwerkraft des Beobachtungsortes, mit g^0 die in der Meeresfläche und der geographischen Breite φ und mit g^0_{45} diejenige für $H = 0$ und $\varphi = 45^0$. Ferner seien durch m, m^0 und m^0_{45} die Massen dreier Quecksilbersäulen ausgedrückt, die in den drei Orten denselben Druck ausüben. Es ist dann

$$mg = m^0 g^0 = m^0_{45} g^0_{45},$$

und da statt der Massen die Höhen der Quecksilbersäulen oder die Barometerstände gesetzt werden können, so ist auch

$$Bg = B^0 g^0 = B^0_{45} g^0_{45}.$$

Zwischen der Schwerkraft in der Meereshöhe H und der Schwerkraft in der Meeresfläche an derselben Stelle besteht die näherungsweise richtige Beziehung[1])

$$\frac{g}{g^0} = \frac{R^2}{(R + H)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{H}{R}\right)^2},$$

worin R den Erdradius bezeichnet. Unter Vernachlässigung der Glieder zweiter und höherer Ordnung in bezug auf $\frac{H}{R}$ erhält man

$$\frac{g}{g^0} = 1 - \frac{2H}{R}$$

1) *F. R. Helmert*, Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie. Bd. II, Leipzig 1884, S. 98.

und

$$B^0 = B\left(1 - \frac{2H}{R}\right).$$

Für die Schwerkraft im Meeresniveau und in der geographischen Breite φ hat *Helmert* aus einer großen Anzahl von Pendelmessungen gefunden[1])

$$g^0 = g^0_{45}\,(1 - 0{,}002644 \cos 2\varphi).$$

Setzen wir $\gamma = 0{,}002644$, so wird

$$B^0_{45} = B_0\,(1 - \gamma \cos 2\varphi) = B\left(1 - \frac{2H}{R}\right)(1 - \gamma \cos 2\varphi),$$

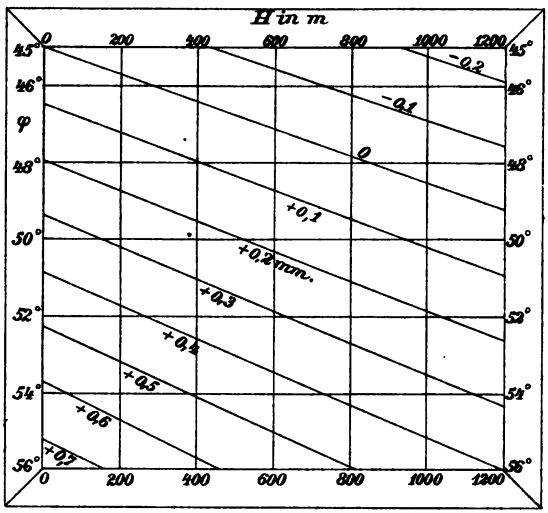


Fig. 171.

oder auch mit derselben Vernachlässigung wie vorher

$$B^0_{45} = B\left(1 - \frac{2H}{R} - \gamma \cos 2\varphi\right).$$

Mithin ist die Schwerekorrektion

$$\Delta_5 = -\,B\left(\frac{2H}{R} + \gamma \cos 2\varphi\right). \tag{5}$$

1) *F. R. Helmert,* Der normale Teil der Schwerkraft im Meeresniveau. Sitzungsberichte d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. zu Berlin. 1901. XIV, S. 336.

Die nebenstehende Tafel (Fig. 171) gibt die Schwerekorrektion Δ_5 für die Breiten 45°—56° und bis zu Höhen von 1200 m an.

6. *Die Standkorrektion* (Δ_6).

Hierunter werden alle konstanten Verbesserungen zusammengefaßt. Die Bestimmung von Δ_6 erfolgt durch Vergleichung der Barometerablesungen mit den wahren Werten des Luftdrucks, wie sie z. B. durch das Siedethermometer gegeben werden.

Beispiel: An einem *Fortin*schen Barometer wurde gefunden

$B = 756{,}48$ mm, $t = +\ 19{,}0°$, Kuppenhöhe $= 0{,}6$ mm.

Der Beobachtungspunkt hatte die geographische Breite $\varphi = 54°\,22$ und die Meereshöhe $H = 15$ m.

Der innere Röhrendurchmesser wurde gleich 5,1 mm gefunden. Ferner war die Teilungskorrektion

$$\Delta_2 = +\ 0{,}000019\, B(t + 10)$$

und die Standkorrektion

$$\Delta_6 = -\ 1{,}10 \text{ mm}.$$

Im Vakuum war keine Luft vorhanden, also $\Delta_4 = 0$. Hiermit wird

B	=	756,48
Δ_1	= −	2,59
Δ_2	= +	0,42
Δ_3	= +	0,65
Δ_5	= +	0,64
Δ_6	= −	1,10
p	=	754,5 mm.

§ 103. Das Aneroidbarometer.

Im Jahre 1847 wurde der Pariser Akademie der Wissenschaften von dem Engländer *Vidi* ein *Aneroidbarometer* vorgelegt, bei dem der Luftdruck durch die elastischen Änderungen einer Metallbüchse gemessen wurde. Dieses Prinzip ist im Laufe der Zeit einer ganzen Reihe von Konstruktionen zugrunde gelegt worden, die sich lediglich durch die Vorrichtungen zur Messung der elastischen Änderungen unterscheiden.

Der wichtigste Teil dieser Instrumente ist eine kleine zylindrische Metallbüchse (Fig. 172) mit kräftigen Seitenwänden und elastischem Boden und Deckel. Die Elastizität wird beim Deckel noch durch eingepreßte konzentrische Wellen erhöht. Die Büchse ist nahezu luftleer ausgepumpt und luftdicht verschlossen. Damit die beiden elastischen Wände nicht durch den Luftdruck eingedrückt werden, ist zu ihrer Unterstützung eine Feder C angebracht. Wird der Luftdruck größer, so wird der Abstand a kleiner und umgekehrt. Die Änderungen von a geben mithin ein Maß für die Änderungen des Luftdrucks. Bei der üblichen Größe der Büchse bewirkt eine Luftdruckänderung von 1 mm eine Änderung von a um 0,004 mm. Sollen die Luftdruckänderungen bis auf 0,1 mm genau gemessen werden, so müssen die Änderungen von a bis auf 0,0004 mm genau bestimmt werden können.

Von den verschiedenen Konstruktionen hat bis jetzt die des Pariser Mechanikers *Naudet* am meisten Verbreitung gefunden, da sie bei sorgfältiger Ausführung sich sehr gut bewährt hat. Der Mechanismus ist in der nebenstehenden schematischen Fig. 172 dargestellt. Mit der Feder C ist eine Stange AD verbunden, die mittels der Verbindung DE auf den Kniehebel EF wirkt. An letzterem ist eine Kette befestigt, die sich um die Achse eines Zeigers G schlingt, während sie von einer Spiralfeder gespannt erhalten wird. Durch diesen Übertragungsmechanismus äußern sich die elastischen Veränderungen der Büchse als Bewegungen des Zeigers G und können mit Hilfe einer Skala gemessen werden. Das Verhältnis der Bewegung der Punkte G und A ist gleich 250; man sieht hieraus, mit welcher Präzision die einzelnen Teile gearbeitet sein müssen, wenn das Übertragungsverhältnis konstant sein soll. Die Skala ist empirisch geteilt, so daß ihre Einheit einem Millimeter der Luftdruckänderung entspricht. Zugleich ist die Bezifferung der Skala so eingerichtet, daß die Ablesungen direkt den Luftdruck geben.

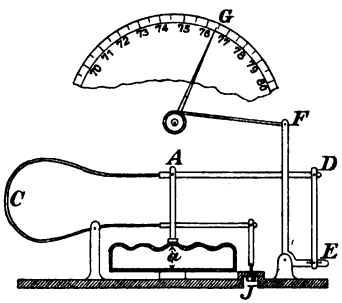


Fig. 172.

Kleine Veränderungen des Mechanismus, Justierungen, können auch nach der Zusammensetzung vorgenommen werden. Durch Drehen der außerhalb des Gehäuses sichtbaren Schraube J wird eine kleine Bewegung der Feder C und somit auch des Zeigers bewirkt. Zur Vergrößerung oder Verkleinerung der Übertragung kann durch Verschiebung des Scharniers E der kurze Arm des Kniehebels verkürzt oder verlängert werden. Diese Justierung bleibt jedoch am besten dem Mechaniker überlassen.

Da nicht alle Teile des Instruments aus demselben Metall hergestellt werden können, so müssen Temperaturänderungen Bewegungen des Zeigers hervorrufen. Zur Eliminierung des Temperatureinflusses hat der Mechaniker *Otto Bohne* in Berlin eine Kompensationsvorrichtung eingeführt. Die Stange AD ist aus zwei verschiedenen Metallen zusammengesetzt, die bei Temperaturänderungen eine Krümmung der Stange und hiermit eine Bewegung des Punktes D erzeugen. Die hieraus folgende Zeigerbewegung ist genau gleich und entgegengesetzt der durch die Ausdehnung entstandenen. Die Erfahrung lehrt, daß diese Kompensation innerhalb der Temperaturen von 0^0 bis $+ 30^0$ sich gut bewährt.

Die Fig. 173 zeigt die Draufsicht und einen Vertikalschnitt eines *Naudet*schen Aneroids, erstere nach Entfernung des Zeigers und der Skala. Gegenüber der schematischen Fig. 172 sieht man, daß die Skala und der Zeiger horizontal liegen. Im übrigen sind die einzelnen Teile der Fig. 172 hier deutlich wieder zu erkennen. Mit der Skala ist ein Thermometer zur Ermittlung der Aneroidtemperatur verbunden.

Für den praktischen Gebrauch wird das Aneroid in einen mit Tuchfütterung versehenen Holzkasten gesetzt, der nur für die Ablesung geöffnet wird und das Instrument in gleichbleibender Temperatur erhält. Schneller Übergang von tiefer zu hoher Temperatur kann ein Niederschlagen des Wasserdampfs der Luft auf die Kette und Rosten derselben verursachen. Vor dem Ablesen des horizontal gehaltenen Aneroids ist durch leichtes Aufklopfen auf den Glasdeckel die Reibung der Instrumentteile zu überwinden.

Störend wirkt beim Gebrauch des Aneroids eine Erschei-

nung, die aus der Elastizität der einzelnen Teile, namentlich der Büchse und der Spannfeder hervorgeht. Es zeigt sich, daß in-

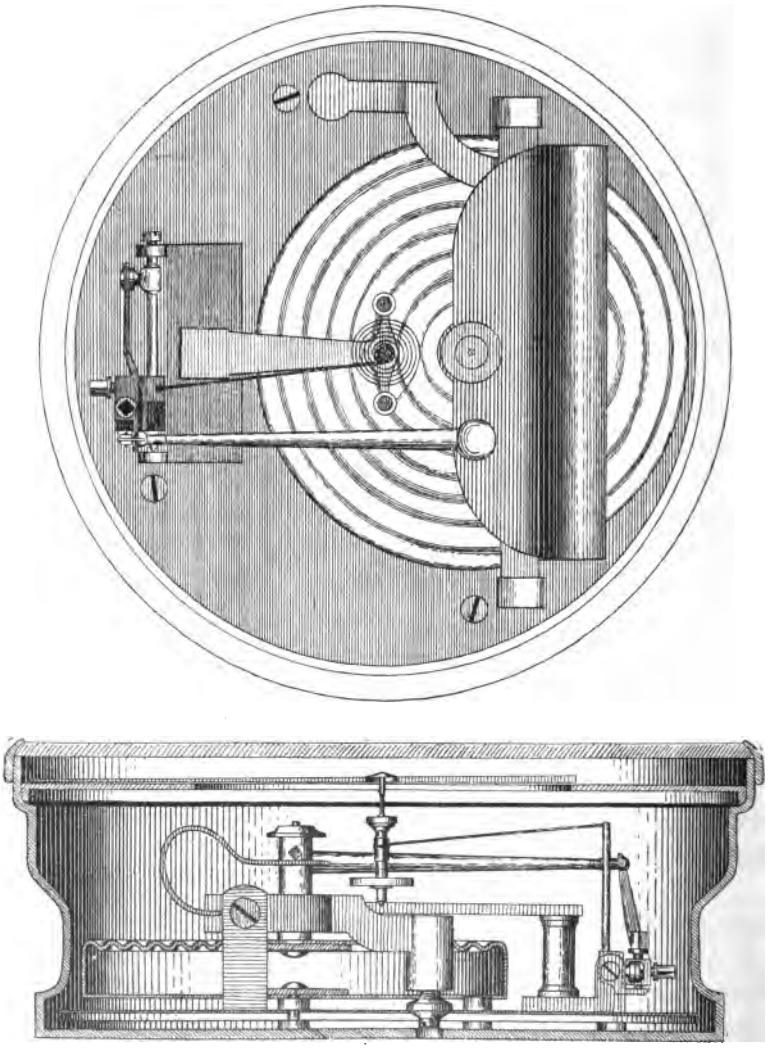


Fig. 173.

folge elastischer Nachwirkung der Zeiger einer Luftdruckänderung nicht sofort in vollem Maße folgt. Die Größe der elastischen Nachwirkung ist abhängig von der Größe und Geschwindigkeit

der Luftdruckänderung. Eingehende Untersuchungen dieser Erscheinung sind bereits mehrfach ausgeführt worden, eine Berücksichtigung der elastischen Nachwirkung im einzelnen Falle ist jedoch noch nicht möglich.

§ 104. Die Korrektionen des Aneroids.

1. Die *Standkorrektion* a ist die Verbesserung der Aneroidablesung bei 0^0 Temperatur und dem normalen Luftdrucke von 760 mm. Der Wert von a ändert sich mit der Zeit durch unvermeidliche Erschütterungen beim Gebrauch des Instruments und muß deshalb von Zeit zu Zeit neu bestimmt werden. Die Ermittlung von a kann bei 0^0 Temperatur und 760 mm Luftdruck unmittelbar durch Vergleichung mit dem Quecksilberbarometer oder dem Siedethermometer erfolgen; in allen anderen Fällen sind vorher die sonstigen Korrektionen hinzuzufügen.

2. Die *Teilungskorrektion* hängt von der Ablesung des Aneroids ab. Sie ist eine Folge der nicht genauen Justierung des Übersetzungsmechanismus und äußert sich so, als ob die Teilungseinheit der Skala zu groß oder zu klein ist. Die Verbesserung für ein Millimeter der Skala ist der *Teilungskoeffizient* b. Ist A die Ablesung des Aneroids, so ist die Teilungskorrektion gleich

$$b(760 - A). \tag{1}$$

Da die Luftdruckschwankungen an einem Ort 40 mm selten überschreiten, so müssen zur Bestimmung von b Luftpumpenversuche zu Hilfe genommen werden. Solche Versuche erfordern zur Regelung der Luftdruckabnahme bzw. Zunahme eine besondere Anordnung der Hilfsvorrichtungen.

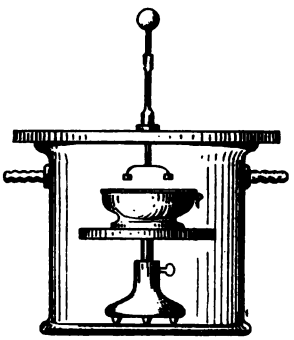


Fig. 174.

Als Rezipient dient ein zylindrisches Glasgefäß, Fig. 174, in dem das Aneroid auf einem Tischchen steht, und das mit zwei Ansatzröhren zum Aufziehen von Verbindungsschläuchen versehen ist. Das Gefäß wird luftdicht durch eine Glasplatte abgeschlossen, deren Mitte ein Klopfer in einer luftdichten Stopfbüchse durchdringt. Mit Hilfe der Luft-

pumpe wird nicht unmittelbar der Rezipient ausgepumpt, sondern eine große *Luftflasche*, in die dann ganz allmählich die Luft des Rezipienten hinüberfließen kann.

P. Schreiber hat noch eine besondere Vorrichtung getroffen, die zwischen Luftflasche und Rezipient eingeschaltet wird, und eine bequeme Regelung des Luftausflusses zuläßt. Anstatt der einfachen *Maßflasche* von *Schreiber* ist die in Fig. 175 abgebildete Flasche gut zu gebrauchen, die im chemischen Laboratorium unter dem Namen Gaswaschflasche bekannt ist. An dem Glasstopfen der zylindrischen Flasche sind zwei knieförmig gebogene Glasröhren befestigt, deren eine in die Flasche mündet, während die andere sich nach unten zu einem Zylinder erweitert. Letzterer enthält am unteren Ende eine kleine Öffnung. Für den vorliegenden Zweck ist es wünschenswert, daß die Querschnittsfläche des Zylinders gleich der halben Querschnittsfläche der Flasche ist. Die Flasche wird, wie Fig. 175 zeigt, zum Teil mit Wasser oder besser mit Glyzerin gefüllt.

Fig. 175.

Für die Ausführung der Untersuchung sind die einzelnen Teile in der Reihenfolge: Luftpumpe, Luftflasche, Maßflasche, Rezipient, Quecksilberbarometer durch Schläuche zu verbinden. Als Luftpumpe ist eine kleine Wasserstrahlpumpe aus Glas bequem zu benutzen, die an dem Wasserleitungshahn befestigt werden kann. Nachdem die Luft in der Luftflasche genügend verdünnt ist, wird die bisher geschlossene Verbindung mit der Maßflasche vorsichtig geöffnet. Die Luft strömt alsdann aus dem Rezipienten durch die Maßflasche hindurch zur Luftflasche. Hierbei wird die Flüssigkeit aus dem inneren Zylinder der Maßflasche verdrängt und die Luft steigt in kleinen Blasen an seiner Außenwand empor. Aus der Geschwindigkeit der Blasenbildung kann man auf die Schnelligkeit der Luftdruckabnahme im Rezipienten schließen und kann letztere mithin leicht regulieren. Zur Messung des Luftdrucks im Rezipienten kann ein Heberbarometer benutzt werden, dessen offener Schenkel mit dem Rezipienten verbunden wird. Von Zeit zu Zeit wird das Ausströmen der Luft unterbrochen und am Aneroid und am Quecksilberbarometer abgelesen.

Ist der tiefste Stand erreicht, so wird nach Verschluß der Luftflasche die Luftpumpe entfernt, und die Luft kann wieder in den Rezipienten eingelassen werden. Das Aufsteigen der Luftblasen in der Maßflasche findet hierbei im inneren Zylinder statt.

Als Beispiel einer Bestimmung des Teilungskoeffizienten geben wir im nachstehenden die Prüfung des Aneroids *Bohne* 4631 der hiesigen Sammlung wieder. Die Ablesung des Aneroids und des Quecksilberbarometers erfolgte von 20 zu 20 mm in dem Intervall 780—680 mm; die Barometerablesungen wurden auf 0^0 reduziert, und da die Temperatur nicht konstant gehalten werden konnte, so wurden auch die Aneroidablesungen auf eine gemeinsame Temperatur bezogen, nachdem ein vorläufiger Wert des Temperaturkoeffizienten ermittelt worden war. Von der Berücksichtigung der Kapillardepression konnte abgesehen werden, da die Kuppenhöhen unverändert blieben. Es wurden im ganzen drei Beobachtungsreihen ausgeführt, aus denen sich die folgenden Mittelwerte der Verbesserungen für die einzelnen Aneroidablesungen ergaben.

An.-Abl.	Verb.
680 mm	— 1,9 mm
700 „	— 1,9 „
720 „	— 1,8 „
740 „	— 1,5 „
760 „	— 0,9 „
780 „	— 0,7 „

Am Schluß jeder Reihe wurde der Druck eine Zeitlang konstant gehalten, wobei der Aneroidzeiger infolge der elastischen Nachwirkung einen Sprung machte, der sich in der folgenden Reihe als eine scheinbare Änderung der Standkorrektion äußerte.

Zur Bestimmung des Teilungskoeffizienten wurden die obigen Verbesserungen in Fig. 176 graphisch aufgetragen und durch eine ausgleichende Gerade verbunden. Da diese auf 100 mm um 1,4 mm ansteigt, so ist die *Teilungskorrektion* gleich $-0{,}014\,(760 - A)$ und infolgedessen

$$b = -0{,}014\,(760 - A).$$

Anstatt der graphischen Ausgleichung kann auch eine solche

nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeführt werden, die jedoch im vorliegenden Falle keine Vorteile bietet.

Häufig wird auch bei dem kleinen Intervall von 100 mm eine gekrümmte Kurve sich den Beobachtungen besser an-

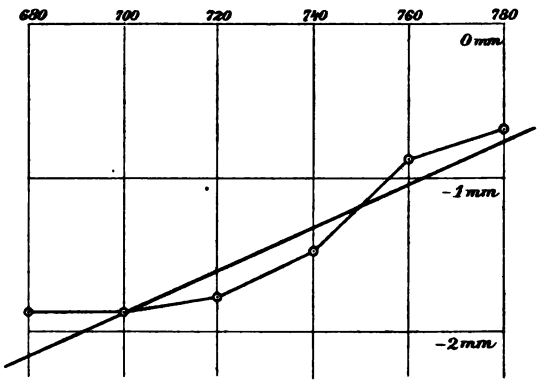


Fig. 176.

schließen als eine Gerade. In solchen Fällen wird man für die numerische Ausgleichung die Teilungskorrektion in der Form

(2) $$b(760 - A) + b'(760 - A)^2$$

annehmen.

3. Die *Temperaturkorrektion* ist die Reduktion der bei der Temperatur t erfolgten Aneroidablesung auf die Temperatur 0°. Da die Temperaturschwankungen stets in verhältnismäßig engen Grenzen bleiben werden, so kann die Korrektion proportional der Temperatur angenommen und gleich ct gesetzt werden. Die Konstante c ist der *Temperaturkoeffizient.*

Die Bestimmung des Temperaturkoeffizienten ist am bequemsten im Winter auszuführen, wo Aneroidablesungen bei beliebig hohen und tiefen Temperaturen leicht zu erlangen sind. Nachdem das Aneroid mehrere Stunden lang einer bestimmten Temperatur ausgesetzt ist, wird es mit einem Quecksilberbarometer oder Siedethermometer verglichen. Diese Vergleichung wird bei verschiedenen Temperaturen ausgeführt und zu jeder Aneroidablesung die Teilungskorrektion hinzugefügt.

Beispiel: Für das Aneroid *Bohne* 4631, dessen Teilungskoeffizient S. 249 bestimmt ist, wurden bei verschiedenen Tempe-

raturen Vergleiche mit dem Quecksilberbarometer ausgeführt. Nachdem die Barometerablesungen auf 0^0 reduziert, die Aneroidablesungen mit der Teilungskorrektion versehen worden waren, blieben die folgenden Verbesserungen des Aneroids übrig:

Temperatur	Verbesserung	Temperatur	Verbesserung
+ 1,0°	— 0,6 mm	+ 14,4°	— 3,1 mm
+ 3,0	— 1,9	+ 16,2	— 3,5
+ 5,2	— 1,6	+ 20,5	— 4,2
+ 6,8	— 2,4	+ 23,0	— 4,5
+ 9,5	— 1,8	+ 26,0	— 4,7
+ 11,4	— 2,4		

In Fig. 177, in der diese Werte graphisch aufgetragen sind, schließt sich die ausgleichende Linie recht gut den Beobachtungen

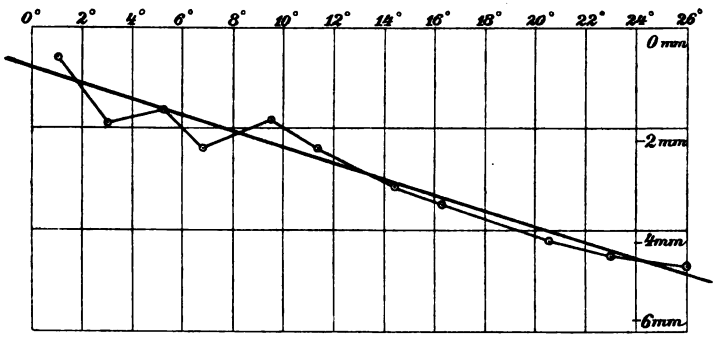


Fig. 177.

an, und es ergibt sich hieraus der Temperaturkoeffizient

$$c = -0{,}158\,.$$

Für die Standkorrektion fand sich aus Vergleichen mit dem Siedethermometer nach Berücksichtigung der Teilungs- und Temperaturkorrektion

$$a = -2{,}88 \text{ mm}.$$

Der wahre Wert des Luftdrucks wird nach dem Vorstehenden aus folgender Gleichung erhalten

$$p = A + a + b\,(760 - A) + ct\,. \tag{3}$$

Für das Aneroid 4631 ist somit

$$p = A - 2{,}88 - 0{,}014\,(760 - A) - 0{,}158\,t\,.$$

§ 105. Die barometrische Höhenformel.

Wir bezeichnen mit ϱ_0 die Dichtigkeit eines Gases bei der Temperatur t_0 und dem Druck p_0. Hat dieselbe Größe für die Temperatur t und den Druck p den Wert ϱ, so ist nach dem Gesetz von *Mariotte*

$$\frac{p_0}{p} = \frac{\varrho_0}{\varrho}$$

und nach dem Gesetz von *Gay-Lussac*

$$\frac{p\varrho_0}{p_0\varrho} = \frac{273 + t}{273 + t_0},$$

worin die Zahl 273 die absolute Temperatur für 0^0 angibt.

Hiernach erhalten wir für $t_0 = 0$ und für $\frac{1}{273} = 0{,}003665 = \alpha$

$$\varrho = \varrho_0 \frac{p}{p_0} \frac{1}{1 + \alpha t}. \tag{1}$$

Dieses allgemeine Gesetz wenden wir auf die atmosphärische Luft an. Der Druck p, unter dem ein Luftteilchen steht, setzt sich aus dem Druck der trocknen Luft und dem Druck des in der Luft befindlichen Wasserdampfes zusammen. Ist letzterer gleich e, so ist der Druck der trocknen Luft gleich $p - e$ und mithin die Dichtigkeit der trocknen Luft

$$\varrho = \varrho_0 \frac{(p - e)}{p_0} \frac{1}{(1 + \alpha t)},$$

wobei $\varrho_0 = 0{,}0012928$ für $p_0 = 760$ mm und für $t_0 = 0^0$ ist.

Da die Dichtigkeit gleich der Masse der Volumeinheit ist so ist das Gewicht der letzteren

$$P_l = \varrho_0 \frac{(p - e)}{p_0} \frac{1}{(1 + \alpha t)} g,$$

wenn mit g die Schwerkraft bezeichnet wird.

Für Wasserdampf ist

$$\varrho_0' = 0{,}623\, \varrho_0,$$

folglich ist nach der vorstehenden Gleichung

$$P_w = \varrho_0 \frac{0{,}623\, e}{p_0} \frac{1}{(1 + \alpha t)} g.$$

Hieraus ergibt sich das Gewicht der Volumeinheit feuchter Luft

$$P = P_l + P_w$$

oder

$$P = \varrho_0 \frac{(p - \beta e)}{p_0 (1 + \alpha t)} g, \tag{2}$$

worin $\beta = 0{,}377$ gesetzt ist.

Das Luftteilchen liege in einer Luftsäule, deren Querschnitt gleich der Flächeneinheit ist (Fig. 178), und von der wir ein Element von der Höhe dH im Abstand H von der Meeresfläche betrachten. Der Luftdruck an der Grundfläche sei gleich p, an der Oberfläche gleich $p - dp$. Da das Volumen gleich dH ist, so ist die Druckänderung mit der Höhe

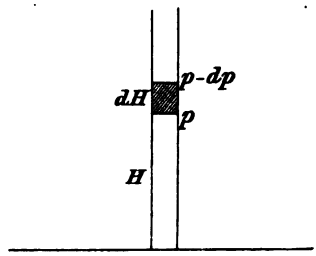


Fig. 178.

$$-dp = +PdH$$

oder

$$-dp = \frac{\varrho_0 g (p - \beta e)}{p_0 (1 + \alpha t)} dH. \tag{3}$$

Der Druck p_0 ist gleich dem Gewicht einer Quecksilbersäule von 760 mm Höhe und der Temperatur 0^0 in der Meeresfläche und der geographischen Breite 45^0. Die Schwerkraft in einem solchen Punkte sei wieder mit g^0_{45} bezeichnet, und da die Dichtigkeit des Quecksilbers von 0^0 gleich 13,59545 ist, so wird

$$p_0 = 0{,}76 \cdot 13{,}59545\, g^0_{45} = 10{,}332542\, g^0_{45}$$

und

$$\frac{p_0}{\varrho_0} = 7992{,}376\, g^0_{45} = A g^0_{45} \tag{4}$$

sein, wobei

$$A = 7992{,}376$$

gesetzt ist.

Durch Einsetzen des Wertes (4) in (3) erhalten wir

$$-dp = \frac{g(p - \beta e)}{g^0_{45} A (1 + \alpha t)} dH$$

oder

$$-\frac{A}{p} dp = \frac{g\left(1 - \beta \frac{e}{p}\right)}{g^0_{45} (1 + \alpha t)} dH$$

und die Integration gibt

$$(5) \qquad -A \log \text{nat}\, p = \int \frac{g\left(1 - \beta \frac{e}{p}\right)}{g_{45}^0 (1 + \alpha t)}\, dH.$$

Sind die Werte p_1 und p_2 des Luftdrucks in zwei derselben Lotlinie angehörigen Punkten mit den Meereshöhen H_1 und H_2 gemessen, so liefert die Gl. (5)

$$(6) \qquad A \log \text{nat} \frac{p_1}{p_2} = \int_{H_1}^{H_2} \frac{g}{g_{45}^0} \frac{\left(1 - \beta \frac{e}{p}\right)}{(1 + \alpha t)}.$$

In dem Integral sind die Größen t, $\frac{e}{p}$ und g mit der Höhe veränderlich, also Funktionen von H.

Ein allgemeines Gesetz, durch das die Lufttemperatur als Funktion der Höhe ausgedrückt wird, ist noch nicht gefunden worden. Es bleibt deshalb nur übrig, für t das arithmetische Mittel der in den beiden Beobachtungspunkten gemessenen Lufttemperaturen t_1 und t_2 einzuführen. Wir setzen demnach

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2}.$$

Für die Abnahme des Wasserdampfdrucks mit der Höhe sind empirische Gesetze aufgestellt worden, die wir in (6) einführen könnten. Da jedoch die Größe e in der Gl. (6) keinen großen Einfluß hat, so genügt auch hier die Einführung des arithmetischen Mittels

$$e = \frac{e_1 + e_2}{2}$$

der beiden gemessenen Werte des Dampfdrucks, das wir durch das arithmetische Mittel

$$p = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

dividieren.

Ferner ist nach S. 241 und 242

$$g = g_{45}^0 \left(1 - \frac{2H}{R}\right)(1 - \gamma \cos 2\varphi),$$

worin $\gamma = 0{,}002644$ ist.

Setzen wir alles in Gl. (6) ein, so ergibt sich

$$A \log \text{nat} \frac{p_1}{p_2} = (1 - \alpha t)\left(1 - \beta \frac{e}{p}\right)(1 - \gamma \cos 2\varphi) \int_{H_1}^{H_2} \left(1 - \frac{2H}{R}\right) dH.$$

Da

$$\int \left(1 - \frac{2H}{R}\right) dH = H - \frac{H^2}{R}$$

ist, so ist das bestimmte Integral

$$\int_{H_1}^{H_2} \left(1 - \frac{2H}{R}\right) dH = H_2 - H_1 - \frac{H_2^2 - H_1^2}{R} = (H_2 - H_1)\left(1 - \frac{H_2 + H_1}{R}\right).$$

Wir führen noch die einfacheren Bezeichnungen

$$h = H_2 - H_1 \quad \text{und} \quad H_m = \frac{H_2 + H_1}{2}$$

ein und erhalten

$$A \log \text{nat} \frac{p_1}{p_2} = (1 - \alpha t)\left(1 - \beta \frac{e}{p}\right)(1 - \gamma \cos 2\varphi)\left(1 - \frac{2H_m}{R}\right) h.$$

Statt des natürlichen Logarithmus führen wir den mit $\frac{1}{0{,}43429}$ multiplizierten künstlichen Logarithmus ein, wodurch der Zahlenkoeffizient $\frac{A}{0{,}43429}$ den Wert 18403,1 erhält. Drücken wir ferner H_m in km aus und setzen $\frac{2000}{R} = 0{,}000314 = \delta$, so wird

$$(7)\quad h = 18403{,}1 \log \frac{p_1}{p_2}(1 + \alpha t)\left(1 + \beta \frac{e}{p}\right)(1 + \gamma \cos 2\varphi)(1 + \delta H_{km}).$$

Die Zahlenwerte der Koeffizienten sind

$$\alpha = 0{,}003665.$$
$$\beta = 0{,}377$$
$$\gamma = 0{,}002644$$
$$\delta = 0{,}000314.$$

Die Anwendung der vorstehenden allgemeinen barometrischen Höhenformel kann durch Hilfstafeln erleichtert werden. Für logarithmische Rechnung kann z. B. eine Tafel angelegt werden, die für das Argument t den Wert $\log (1 + \alpha t)$ gibt. Entsprechende Hilfstafeln können für die übrigen Klammerausdrücke berechnet werden.[1])

1) *Jordan*, Handb. d. Vermessungskunde Bd. II. 6. Aufl. Stuttgart 1904. S. 644.

Für die Berechnung ohne Logarithmen kann die Gl. (7) in eine andere Form gebracht werden. Setzen wir

$$18403{,}1 \log \frac{760}{p_1} = \mathfrak{H}_1$$

und

$$18403{,}1 \log \frac{760}{p_2} = \mathfrak{H}_2,$$

so ist

$$18403{,}1 \log \frac{p_1}{p_2} = \mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1 = h_0$$

ein genäherter Wert des Höhenunterschiedes h. Unter Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung ist dann

$$(8) \qquad h = h_0 + h_0 \alpha t + h_0 \beta \frac{e}{p} + h_0 \gamma \cos 2\varphi + h_0 \delta H_{km}.$$

Auf Grund der Gl. (8) können fünf Hilfstafeln berechnet werden, aus denen man die Werte von $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, αt, $\beta \frac{e}{p}$, $\gamma \cos 2\varphi$ und δH_{km} mit den darin enthaltenen Veränderlichen als Argumenten entnehmen kann.[1])

Auch ohne Hilfstafeln ist die Benutzung der Gl. (7) nicht unbequem, wenn man mit Additions- und Subtraktionslogarithmen rechnet. In einem Beispiel S. 261 ist dies näher erläutert.

§ 106. Die Messung der Lufttemperatur und des Wasserdampfdrucks.

Zur Bestimmung der Lufttemperatur kann jedes im Freien aufgehängte und gegen Wärmestrahlung geschützte Thermometer benutzt werden. Am schnellsten nimmt ein *Schleuderthermometer* die Temperatur der Luft an, das an einer Schnur im Kreise herumgeschleudert wird.

Der Wasserdampfdruck e kann am bequemsten nach der Methode von *August (Psychrometermethode)* ermittelt werden. Nachdem die Lufttemperatur t mit einem Schleuderthermometer gemessen ist, wird die Kugel desselben mit einem feuchten Läppchen umwickelt und das Schleudern fortgesetzt. Dabei wird ein Teil des Wassers verdunsten und die hierzu erforder-

1) *Rühlmann*, Die barometrischen Höhenmessungen. Leipzig 1870. S. 120.

liche Wärme zunächst der Kugel entziehen. Würde aus der umgebenden Luft keine Wärme zuströmen, so würde das Thermometer bis zu der Temperatur sinken, für die der vorhandene Wasserdampfdruck zugleich der Sättigungsdruck ist. Aus den *Régnault*schen Tafeln könnte man mit der gefundenen Temperatur den Sättigungsdruck entnehmen. Infolge der aus der umgebenden Luft zuströmenden Wärme bleibt das Thermometer schon bei einer höheren Temperatur t' stehen; indessen kann man auch aus der Differenz $t - t'$ einen Schluß auf den Wasserdampfdruck e ziehen. Es ist aus Versuchen gefunden worden, daß man

$$e = S - \frac{1}{2}(t - t')\frac{p}{755} \tag{1}$$

annehmen kann. Hierin ist S der Sättigungsdruck für die am feuchten Thermometer abgelesene Temperatur t'. Die nachstehende Tabelle gibt die Werte von S für die Temperatur t' an.

t' °	S mm	t' °	S mm	t' °	S mm	t' °	S mm
0	4,58	10	9,18	20	17,41	30	31,56
1	4,92	11	9,81	21	18,50	31	33,42
2	5,29	12	10,48	22	19,66	32	35,37
3	5,68	13	11,19	23	20,88	33	37,43
4	6,09	14	11,94	24	22,18	34	39,59
5	6,53	15	12,73	25	23,55	35	41,85
6	7,00	16	13,56	26	24,99	36	44,23
7	7,49	17	14,45	27	26,50	37	46,73
8	8,02	18	15,38	28	28,10	38	49,35
9	8,58	19	16,37	29	29,78	39	52,09

Beispiel: Bei einem Luftdruck $p = 763$ mm wurde gemessen $t = +15{,}2^0$ und $t' = +11{,}6^0$. Für den Wert von t' ist $S = 10{,}2$ mm, folglich wird

$$e = 10{,}2 - 1{,}8 = 8{,}4 \text{ mm}.$$

§ 107. Die vereinfachte barometrische Höhenformel.

Für ein nicht zu großes Gebiet kann man die beiden letzten Faktoren der Gl. (7) § 105 S. 255 als konstant ansehen. Aber auch der Einfluß der Luftfeuchtigkeit ist so gering, daß eine Vereinfachung des zweiten Faktors durch Einführung von Mittel-

werten zulässig ist, wodurch die Messung der Luftfeuchtigkeit überflüssig wird. Es zeigt sich nämlich, daß im allgemeinen die Luftfeuchtigkeit mit der Lufttemperatur wächst und daß näherungsweise

$$\beta \frac{e}{p} = a + bt$$

gesetzt werden kann. Hiermit können wir auch

$$(1 + \alpha t)(1 + a + bt) = 1 + a + (\alpha + b)t,$$

oder auch mit derselben Annäherung

$$(1 + \alpha t)(1 + a + bt) = (1 + a)(1 + \alpha + b)t$$

einführen.

Von den mehrfachen Bestimmungen der Koeffizienten a und b nehmen wir nach *Hann* (Lehrbuch der Meteorologie. Leipzig 1901)

$$a = 0{,}00154 \quad \text{und} \quad b = 0{,}00034$$

an, womit die Gl. (7) § 105 S. 255 übergeht in

$$h = 18403{,}1 \log \frac{p_1}{p_2} 1{,}00154 (1 + 0{,}00400\, t)(1 + \gamma \cos 2\varphi)(1 + \delta H_{km})$$

oder

$$(1) \quad h = 18431{,}4 \log \frac{p_1}{p_2} (1 + 0{,}004\, t)(1 + \gamma \cos 2\varphi)(1 + \delta H_{km}).$$

Indem wir die letzten beiden Faktoren als konstant annehmen, setzen wir

$$(2) \qquad 18431{,}4 (1 + \gamma \cos 2\varphi)(1 + \delta H_{km}) = A'$$

und erhalten die vereinfachte barometrische Höhenformel

$$(3) \qquad h = A' \log \frac{p_1}{p_2} (1 + 0{,}004\, t).$$

Diese Gleichung eignet sich sehr gut zur Aufstellung von Tabellen mit zwei Argumenten.

1. *Rechnungshöhen.* Indem wir unter Einführung eines beliebigen Normalwertes p_0 des Luftdrucks

$$(4) \qquad \begin{aligned} A' \log \frac{p_0}{p_1} (1 + 0{,}004\, t) &= \mathfrak{H}_1' \\ \text{und} \\ A' \log \frac{p_0}{p_2} (1 + 0{,}004\, t) &= \mathfrak{H}_2' \end{aligned}$$

setzen, wird

$$(5) \qquad h = \mathfrak{H}_2' - \mathfrak{H}_1'.$$

Die Werte der Rechnungshöhen $\mathfrak{H}'$ sind von *Jordan* in einer numerischen Tafel[1]), von *Vogler* in einer graphischen Tafel[2]) mit den Argumenten p und t zusammengestellt worden.

2. *Höhenstufen.* Der Gl. (3) gab *Babinet* im Jahre 1850 eine andere Form, indem er für $\log \frac{p_1}{p_2}$ eine Reihenentwicklung einführte, die für Höhenunterschiede bis zu 1000 m auf das Glied erster Ordnung beschränkt werden kann. Es ist

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1 + \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}}{1 - \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}},$$

und

$$\log (1 + x) = \mu \left(x - \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{3} x^3 + \cdots\right)$$

$$\log (1 - x) = -\mu \left(x + \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{3} x^3 + \cdots\right),$$

worin $\mu = 0{,}43429$ ist, folglich erhalten wir

$$\log \frac{p_1}{p_2} = 2\mu \left\{\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} + \frac{1}{3}\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\right)^3 + \cdots\right\}$$

und

$$(6) \quad h = A' 2\mu (1 + 0{,}004\, t) \left\{\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} + \frac{1}{3}\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\right)^3 + \cdots\right\}.$$

Benutzen wir zur Umformung des letzten Gliedes die Näherung

$$h_0 = A' 2\mu \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2},$$

so geht das letzte Glied über in

$$+ \frac{h_0^3}{12 A'^2 \mu^2} = \frac{1000^3}{12 A'^2 \mu^2} \left(\frac{h_0}{1000}\right)^3,$$

und für $A' = 18450$ erhält es den Wert

$$+ 1{,}3 \left(\frac{h_0}{1000}\right)^3.$$

Da dieses Glied somit bei einem Höhenunterschied von 1000 m erst + 1,3 m gibt, so kann es in Rücksicht auf die Vernachlässigungen der Gl. (3) gegenüber der allgemeinen barometrischen Höhenformel weggelassen werden.

---

1) *W. Jordan*, Barometrische Höhentafeln. 2. Aufl. Stuttgart 1886.
2) *Ch. A. Vogler*, Graphische Barometertafeln. Braunschweig 1880.

Für die Anwendung einer Hilfstafel schreiben wir Gl. (6) nun in der Form

$$h = \frac{A'\mu\,(1 + 0{,}004\,t)}{\frac{p_1 + p_2}{2}}\,(p_1 - p_2),$$

und setzen wir

$$\frac{A'\mu\,(1 + 0{,}004\,t)}{\frac{p_1 + p_2}{2}} = \Delta h, \tag{7}$$

so ist

$$h = (p_1 - p_2)\,\Delta h\,. \tag{8}$$

Der Koeffizient Δh, der von dem arithmetischen Mittel der gemessenen Luftdruckwerte und von der Temperatur abhängt, wird als *barometrische Höhenstufe* bezeichnet. Eine Tafel für die Werte von Δh, die für Deutschland ausreicht, ist nach *Hammer* in Fig. 179 entworfen.

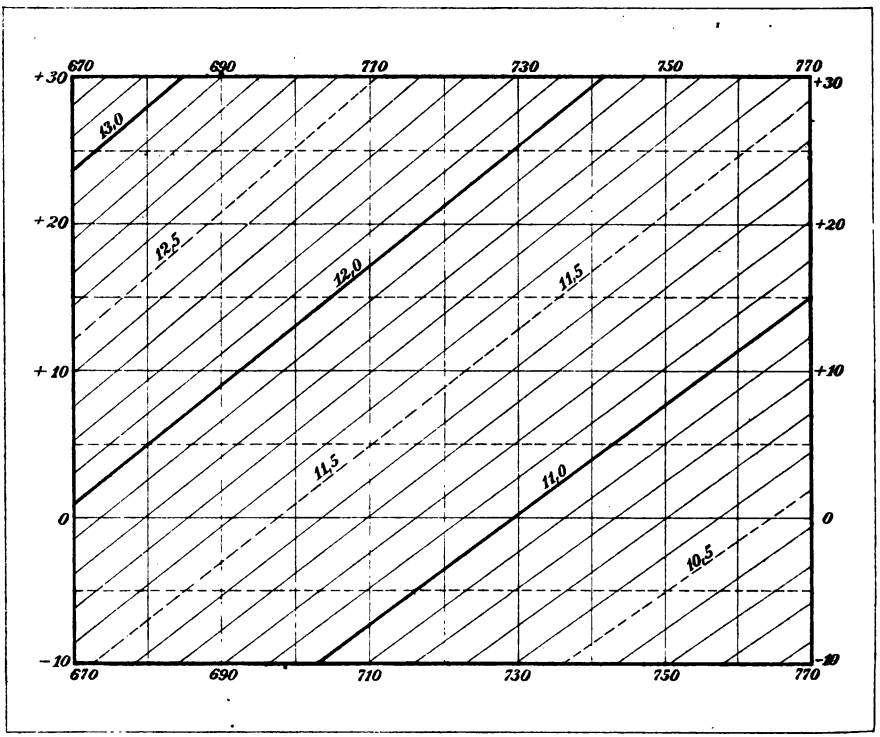


Fig. 179.

§ 108. Beispiele.

Professor *v. Bauernfeind* ließ im Jahre 1881 in drei Punkten des bayerischen Hochgebirges eine Reihe von Beobachtungen zur Erforschung der terrestrischen Refraktion ausführen. Aus den hiermit verbundenen Messungen des Luftdrucks, der Luftfeuchtigkeit und der Lufttemperatur soll der Höhenunterschied der beiden Punkte Höhensteig und Kampenwand berechnet werden. Wir benutzen hierzu Mittelwerte aus den Beobachtungen eines Tages.

Höhensteig: $p_1 = 719{,}2$ mm, $e_1 = 10{,}5$ mm, $t_1 = +17{,}74^0$, $\varphi_1 = 47^0\,52'\,00''$

Kampenwand: $p_2 = 632{,}9$ mm, $e_2 = 7{,}8$ mm, $t_2 = +10{,}31^0$, $\varphi_2 = 47^0\,45'\,18''$.

Die mittlere Höhe ist rund 1000 m.

Für die Berechnung nach Gl. (7) § 105 S. 255 ergibt sich somit

$$p = 676{,}0 \text{ mm}, \quad t = +14{,}02^0, \quad \varphi = 47^0\,48'\,39''$$
$$e = 9{,}2 \text{ mm}, \quad H_m = 1000$$
$$\log p_1 = 2{,}85685$$
$$\log p_2 = 2{,}80134$$
$$\log \frac{p_1}{p_2} = 0{,}05551.$$

Zur Bestimmung der Logarithmen der einzelnen Korrektionsfaktoren benutzen wir die Additions- und Subtraktionslogarithmen. Für den Faktor $1 + \alpha t$ erhalten wir zunächst

$$\log \alpha = 7{,}56407$$
$$\log t = 1{,}14675$$
$$\log \alpha t = 8{,}71082.$$

Mit $\log \alpha t$ als Argument entnehmen wir aus den Additions- und Subtraktionslogarithmen unmittelbar

$$\log (1 + \alpha t) = 0{,}02176.$$

Ebenso berechnen wir die Logarithmen der übrigen Korrektionsfaktoren.

Der Höhenunterschied h berechnet sich somit wie folgt:

$$\begin{aligned}
\log 18403{,}1 &= 4{,}26489\\
\log\left(\log \tfrac{p_1}{p_2}\right) &= 8{,}74437\\
\log(1+\alpha t) &= 0{,}02176\\
\log\left(1+\beta\tfrac{e}{p}\right) &= 0{,}00222\\
\log(1+\gamma\cos 2\varphi) &= 9{,}99989\\
\log(1+\delta H_{km}) &= 0{,}00014\\
\hline
\log h &= 3{,}03327\\
h &= 1079{,}6 \text{ m}.
\end{aligned}$$

Als zweites Beispiel benutzen wir die von *Rühlmann* und *Albrecht* am Valtenberg in Sachsen ausgeführten Beobachtungen. Nach *Rühlmann*, „Die barometrischen Höhenmessungen", ist gemessen

Neukirch: $p_1 = 737{,}25$ mm $t_1 = +19{,}7^0$
Valtenberg: $p_2 = 713{,}65$ mm $t_2 = +19{,}3^0$.

Die Mittelwerte sind

$$p = 725{,}45 \text{ mm} \qquad t = +19{,}5^0$$

und hiermit erhält man aus Fig. 179 die barometrische Höhenstufe

$$\Delta h = 11{,}86,$$

und nach Gl. (8) § 107 ist

$$h = 11{,}86\,(p_1 - p_2)$$

oder

$$h = 279{,}9 \text{ m}.$$

§ 109. Mängel der barometrischen Höhenmessung.

Die Voraussetzungen bei der Ableitung der barometrischen Höhenformel werden bei der Ausführung von Höhenmessungen nur selten erfüllt sein. Insbesondere werden bei Messungen auf der Erdoberfläche die beiden Beobachtungspunkte nie in derselben Lotlinie liegen. Wird die Höhenformel in diesen Fällen doch angewendet, so muß angenommen werden, daß die Flächen gleichen Luftdrucks parallel zur Meeresfläche liegen. Dies trifft aber weder für einen bestimmten Zeitpunkt noch für Mittelwerte zu, wie die täglichen und die mittleren Isobarenkarten zeigen.

Liegen in den beiden Punkten Beobachtungen vor, die sich über mehrere Jahre erstrecken, so kann die Korrektion für die Mittelwerte wegen der Neigung der Flächen gleichen Luftdrucks aus einer Karte der mittleren Isobaren entnommen werden. Unter Umständen können auch die aus den Beobachtungen der meteorologischen Stationen hervorgehenden täglichen Isobarenkarten Verwendung finden. Schon bei Entfernungen von 10—20 km kann die Korrektion 1 mm betragen.

Eine weitere, selten erfüllte Voraussetzung ist die, daß die Lufttemperatur sich von einem zum andern Punkt gleichmäßig ändert. Trifft dies nicht zu, so wird auch die mittlere Lufttemperatur nicht mit dem arithmetischen Mittel der Temperaturen in den beiden Beobachtungspunkten übereinstimmen. Hierzu kommt, daß die Angaben der Thermometer durch die Wärmestrahlung des Bodens beeinflußt werden, so daß im Winter und in der Nacht zu niedrige, im Sommer und am Tage zu hohe Temperaturen gefunden werden. Die Folge hiervon ist eine jährliche und eine tägliche Periode der aus Barometermessungen ermittelten Höhen, wie sie in der Tat durch *Plantamour*, *von Bauernfeind* u. a. gefunden wurden.

Eine genäherte Eliminierung dieses Temperaturfehlers ist möglich, wenn gleichzeitig mit den Beobachtungen der beiden Stationen noch Beobachtungen in andern, in der Nähe liegenden Punkten ausgeführt sind, deren Höhen bekannt sind. Mit Hilfe der barometrischen Höhenformel kann für je zwei dieser Punkte aus dem Höhenunterschied die mittlere Lufttemperatur bestimmt werden, aus der man sieht, welcher Korrektion das arithmetische Mittel der *gemessenen* Lufttemperaturen bedarf. Hiervon kann man dann für den neu zu berechnenden Höhenunterschied Gebrauch machen.

Der Einfluß mangelhafter Berücksichtigung der Luftfeuchtigkeit und der Schwerkraft wird gegenüber der Unsicherheit in der Einführung der Lufttemperatur verschwindend klein sein.

§ 110. Barometrische Höhenaufnahmen.

Das Quecksilberbarometer und das Siedethermometer werden für Höhenmessungen nur auf Reisen längerer Dauer in Frage kommen, und auch hier hauptsächlich zur Prüfung der Aneroide,

mit denen die Messungen ausgeführt werden. Während früher barometrische Höhenmessungen nur vereinzelt angewendet wurden, und zwar nur da, wo geometrische und trigonometrische Nivellements nicht ausführbar waren, hat diese Methode seit der Einführung der Aneroide eine große Bedeutung namentlich für die ersten Vorarbeiten zu Ingenieurbauten in bergigem Gelände erlangt. An der Hand von Lageplänen sind hier die Höhen einer großen Anzahl von Punkten zu bestimmen, aus denen in den Plänen die Höhenkurven konstruiert werden können.

Den Ausgangspunkt der Höhenmessungen bildet eine Station von bekannter Höhe. An die Stelle der gleichzeitigen Bestimmung des Luftdrucks auf der Station und den einzelnen Messungspunkten im Gelände tritt die Beobachtung eines *Stationsbarometers* in gleichen Zeitabständen, z. B. von 15 zu 15 Minuten, während zu den Ablesungen des *Feldbarometers* die Uhrzeiten vermerkt werden. Als Stationsbarometer kann ein Quecksilberbarometer oder ein Aneroid benutzt werden, während als Feldbarometer nur ein Aneroid geeignet ist. Vor Beginn der Messungen wird durch Vergleichung die relative Standkorrektion des Feldbarometers gegen das Stationsbarometer ermittelt. Auf die Messung der Luftfeuchtigkeit wird bei solchen Aufnahmen ganz verzichtet werden können, während die Lufttemperatur wenigstens von Zeit zu Zeit zu bestimmen ist.

In dem folgenden Beispiel ist ein Teil einer Höhenaufnahme behandelt, die mit zwei Aneroiden ausgeführt wurde. Wir geben zunächst die Ablesungen auf der Station und im Felde und die Temperaturmessungen wieder.

Stationsbarometer (Aneroid I)			Feldbarometer (Aneroid II)			
Zeit	Ablesung	Temp.	Punkt	Zeit	Ablesung	Temp.
$9^h\,45^m$	758,30 mm	+ 18,2°	1	$9^h\,55^m$	756,30 mm	+ 16,8°
10 00	758,20	+ 18,2	2	10 02	755,80	+ 16,5
10 15	758,20	+ 18,3	3	10 09	753,95	+ 16,5
10 30	758,15	+ 18,3	4	10 24	750,25	+ 16,2
10 45	758,10	+ 18,3	5	10 38	749,40	+ 16,0
11 00	758,00	+ 18,4	6	10 53	748,50	+ 16,1
11 15	758,05	+ 18,3	7	11 22	745,75	+ 16,0
11 30	758,00	+ 18,4	8	11 48	744,60	+ 16,0
11 45	757,90	+ 18,4				
12 00	757,90	+ 18,4				

Lufttemperatur	
Zeit	Thermometer
$9^h\,50^m$	$+15{,}3^0$
10 28	+15,6
10 45	+15,7
11 20	+15,9
11 50	+16,1

Die Meereshöhe der Station ist gleich 13,5 m.
Die Gleichungen der Aneroide sind

Aneroid I: $p = A + 0{,}05t - 0{,}021\ (760 - A)$.

Aneroid II: $p = A + 1{,}42 - 0{,}02t + 0{,}042\ (760 - A)$.

Hierbei ist die Standkorrektion des Aneroids II durch Vergleichung mit I ermittelt worden.

Nachdem alle Ablesungen korrigiert sind, werden die Barometerstände auf der Station und die Lufttemperaturen für die Zeiten der Feldbeobachtungen interpoliert und die Werte der *Höhenstufen* aus der Tafel Fig. 179 S. 260 bestimmt. Hiermit erfolgt dann die Berechnung der Höhenunterschiede und der Höhen der einzelnen Punkte.

Station	Feld	Temp.	Mittel	Höhenstufe	Differenz	Höhenuntersch.	Höhen	Punkt
p_1	p_2	t	$\frac{p_1+p_2}{2}$	Δh	$p_1 - p_2$	h	H	
759,13 mm	757,54 mm	$+15{,}3^0$	758,3 mm	11,18	1,59 mm	+ 17,8 m	31,3 m	1
759,10	757,07	+15,4	758,4	11,19	2,03	+ 22,7	36,2	2
759,10	755,29	+15,5	757,2	11,21	3,81	+ 42,7	56,2	3
759,08	751,76	+15,6	755,4	11,24	7,32	+ 82,3	95,8	4
759,02	750,95	+15,7	755,0	11,25	8,07	+ 90,8	104,3	5
758,95	750,08	+15,7	754,5	11,26	8,87	+ 99,9	113,4	6
758,92	747,45	+15,9	753,2	11,29	11,47	+129,5	143,0	7
758,80	746,35	+16,1	752,6	11,30	12,45	+140,7	154,2	8

Eine erhebliche Beschleunigung der Aufnahme kann erzielt werden, wenn die *Staffelmethode* angewendet wird. Hierbei werden beide Aneroide als Feldbarometer für die Höhenaufnahme benutzt, und die Berücksichtigung der zeitlichen Luftdruckänderung erfolgt durch gleichzeitige Ablesung in verabredeten Wechselpunkten. Zur Erläuterung des Verfahrens diene fol-

gendes schematische Beispiel, in dem die Aneroidablesungen als bereits korrigiert angenommen werden sollen.

Um 7^h geben Aneroid I und II im Punkte A 752 mm an,
„ 8^h An. II in A: 753 mm, An. I in B: 746 mm,
„ 9^h An. II in B: 744 mm, An. I in C: 735 mm,
„ 10^h An. II in C: 734 mm, An. I in D: 721 mm
usw.

Unter der Annahme, daß der Luftdruck sich in allen Punkten gleichmäßig geändert hat, finden wir für den Punkt A

um 7^h den Luftdruck 752 mm
„ 8^h „ „ 753 mm
„ 9^h „ „ 751 mm
„ 10^h „ „ 749 mm
usw.

Diese Zahlen ersetzen die Ablesungen eines Stationsbarometers. Werden für die Ablesungen in den aufzunehmenden Geländepunkten ebenfalls die Uhrzeiten notiert, so kann die Berechnung der Höhenunterschiede wie auf S. 265 erfolgen.

Dieses Verfahren wird namentlich beim Aufnehmen langgestreckter Geländestreifen vorteilhaft sein.

§ 111. Höhenaufnahmen mit nur einem Barometer.

Steht nur *ein* Aneroid zur Verfügung, so bleibt zur Bestimmung der Luftdruckänderung nur übrig, von Zeit zu Zeit zum Ausgangspunkt zurückzukehren.

Besonders einfach gestaltet sich diese Methode, wenn es sich lediglich um Einschaltung von Punkten zwischen zwei gegebene Höhenmarken handelt. In diesem Falle bedarf es nur einer Bestimmung der Temperaturkorrektion, während die Teilungs- und Standkorrektion bei der Berechnung der Höhenunterschiede eliminiert werden. Kompensierte Aneroide können folglich ohne weiteres angewendet werden.

Die Punkte P_o und P_n seien Höhenmarken mit bekannten Höhen H_o und H_n, während die Höhen $H_1, H_2 \cdots$ der Punkte $P_1, P_2 \cdots$ zu bestimmen sind. Die wegen Temperatur verbesserten Ablesungen des Aneroids mögen mit A, die Uhrzeiten mit Z

bezeichnet werden. Nach Gl. (3) § 104 S. 251 ist der Luftdruck

$$p = A + a + b\,(760 - A) = A\,(1 - b) + a', \quad \text{wo } a' = a + b \cdot 760 \text{ ist.} \tag{1}$$

Mit der Annahme einer gleichmäßigen Änderung des Luftdrucks und nahe gleichbleibender Temperatur können wir setzen

$$\begin{aligned} H_1 - H_o &= \alpha\,(p_1 - p_o) + \beta\,(Z_1 - Z_o) \\ H_2 - H_o &= \alpha\,(p_2 - p_o) + \beta\,(Z_2 - Z_o) \\ &\vdots \\ H_n - H_o &= \alpha\,(p_n - p_o) + \beta\,(Z_n - Z_o). \end{aligned} \tag{2}$$

Erfolgt zum Schluß eine zweite Ablesung A_o' zur Zeit Z_o' im Punkte P_o, so ist entsprechend den Gl. (2)

$$0 = \alpha\,(p_o' - p_o) + \beta\,(Z_o' - Z_o). \tag{3}$$

Da aber

$$p_o' - p_o = (A_o' - A_o)\,(1 - b)$$

ist, so ist auch

$$0 = \alpha\,(A_o' - A_o)\,(1 - b) + \beta\,(Z_o' - Z_o)$$

oder

$$\beta = -\alpha\,(1 - b)\,\frac{A_o' - A_o}{Z_o' - Z_o}. \tag{4}$$

Aus der letzten Gleichung des Systems (2) ergibt sich ferner

$$H_n - H_o = \alpha\,(1 - b)\,(A_n - A_o) - \alpha\,(1 - b)\,(A_o' - A_o)\,\frac{Z_n - Z_o}{Z_o' - Z_o}$$

und hieraus findet sich

$$\alpha\,(1 - b) = \frac{(H_n - H_o)\,(Z_o' - Z_o)}{(A_n - A_o)\,(Z_o' - Z_o) - (A_o' - A_o)\,(Z_n - Z_o)}. \tag{5}$$

Nachdem aus dieser Gleichung die Größe $\alpha\,(1 - b)$ berechnet ist, ergibt sich aus der Gl. (4) der Wert von β, und es können dann nach den Gl. (2) die einzelnen Höhenunterschiede berechnet werden.

Außer den schon im Text genannten Schriften ist noch hervorzuheben *Schreiber*, Handbuch der barometrischen Höhenmessungen (Weimar 1877).

III. Abschnitt.

Gleichzeitige Horizontal- und Höhenaufnahmen.

14. Kapitel.

Die Tachymetrie.

§ 112. Distanzmesser nach Reichenbach und Porro.

Während bisher die Horizontalaufnahmen und die Höhenaufnahmen getrennt behandelt wurden, wenden wir uns nun denjenigen Messungsmethoden zu, die eine gleichzeitige Bestimmung der horizontalen Lage und der Höhe von Geländepunkten ermöglichen. Die *Tachymetrie* löst diese Aufgabe durch Messung der Polarkoordinaten von Geländepunkten in bezug auf beliebig angenommene Koordinatennullpunkte oder *Stationen*, indem von hier aus Horizontalwinkel, Zenitdistanzen und Entfernungen bestimmt werden. Diese Methode erlangt jedoch erst dadurch praktischen Wert, daß die Entfernungsmessung nicht unmittelbar, sondern auf indirektem Wege mit Hilfe eines *Distanzmessers* ausgeführt wird. Wir beschränken uns darauf, für die tachymetrische Aufnahme dasjenige Prinzip der Entfernungsmessung zu behandeln, das seiner Einfachheit wegen am meisten angewendet wird.

Reichenbachs Distanzmesser besteht aus zwei parallelen Fäden, die in der Gesichtsfeldblendenebene eines astronomischen Fernrohrs in gleichen Abständen von dem Horizontalfaden des Fadenkreuzes befestigt sind. In Fig. 180 sind bei D die Schnittpunkte der drei Horizontalfäden mit dem Vertikalfaden dargestellt. Wird der Okularauszug mit Hilfe seines Triebes bewegt, so beschreiben diese drei Punkte gerade Linien, die im

allgemeinen der optischen Achse des Objektivs nicht genau parallel sind. Verfolgen wir diese drei Geraden durch das Ob-

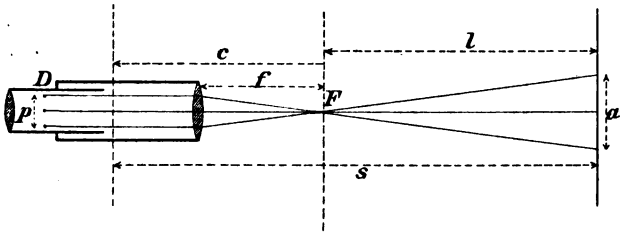


Fig. 180.

jektiv hindurch, so bildet die mittlere nach der Brechung die Visierachse des Fernrohrs (vgl. S. 61), und alle drei Geraden schneiden sich in einem Punkte F der vorderen Brennebene des Objektivs.

Wir setzen zunächst den Fall voraus, daß die Visierachse des Fernrohrs horizontal liegt, und es möge im Abstand l von der vorderen Brennebene des Objektivs eine Nivellierlatte lotrecht aufgestellt sein, an der mit den beiden *Distanzfäden* abgelesen werde. Ist die Differenz der beiden Ablesungen, der *Lattenabschnitt*, gleich a, der Fadenabstand gleich p und die Brennweite des Objektivs gleich f, so ist

$$l = \frac{f}{p} a, \tag{1}$$

oder wenn

$$\frac{f}{p} = k \tag{2}$$

gesetzt wird,

$$l = ak. \tag{3}$$

Ist die Konstante k, die sog. *große Konstante*, bekannt, so kann aus dem Lattenabschnitt a sofort die Entfernung berechnet werden.

Bei der praktischen Ausführung der Entfernungsmessung wird die Entfernung s des Lattenstandpunktes von der Stehachse des Instruments, zu dem das Fernrohr gehört, gesucht, es ist also zu l noch die Größe c, die *kleine Konstante*, hinzuzufügen, so daß wir haben

$$s = c + ak. \tag{4}$$

Durch passende Wahl des Fadenabstandes p wird der Mechaniker der Konstanten k einen runden Wert, z. B. 100 oder 200, geben, so daß dann die Grundgleichung (4) des *Reichenbach*schen Distanzmessers bequem zu benutzen ist.

Das Vorstehende gilt für ein Fernrohr mit einfachem oder mit *Ramsden*schem Okular. Bei einem Fernrohr mit *Huyghens*schem Okular liegen die drei Fadenschnittpunkte D zwischen den beiden Okularlinsen entsprechend dem Fadenkreuzschnittpunkt K in Fig. 41 (S. 62). Die ganze vorstehende Betrachtung gilt jedoch auch hier, wenn wir an die Stelle der drei Schnittpunkte D ihre durch die Kollektivlinse des Okulars entworfenen Bilder setzen, entsprechend K' in Fig. 41.

Eine kleine Vereinfachung der Gl. (4) wird durch die Konstruktion des *Porro*schen Distanzmessers erzielt, bei dem der Schnittpunkt F der beiden äußeren Strahlen in die Stehachse des Instruments verlegt wird, so daß die kleine Konstante c gleich Null wird. Dieser Vorteil wird durch Einführung einer Kollektivlinse erreicht, die in dem Objektivrohr befestigt ist. Fig. 181 veranschaulicht den Einfluß dieser Kollektivlinse auf den Gang der vorher verfolgten Strahlen. Letztere schneiden sich nach der Brechung durch die Kollektivlinse in deren vorderer Brennebene unter einem Winkel, der für alle Stellungen der Okularröhre konstant ist. Durch das Objektiv erleiden die Strahlen eine nochmalige Brechung, durch die ihre Divergenz derartig vermindert wird, daß der Schnittpunkt der aus dem Fernrohr heraustretenden Strahlen in den Punkt O fällt. Der Abstand der Kollektivlinse vom Objektiv kann nun derartig gewählt werden, daß der Schnittpunkt O, der *anallaktische Punkt*, in die Stehachse des Instruments fällt. Da der Winkel zwischen den austretenden Strahlen konstant ist, so ist auch das Verhältnis zwischen dem Lattenabschnitt a und der Entfernung s kon-

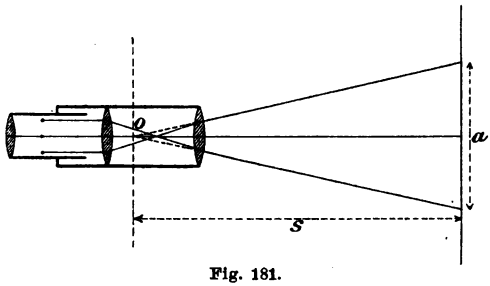


Fig. 181.

stant, und wir erhalten als Gleichung des *Porro*schen Distanzmessers

$$s = ak. \tag{5}$$

Ein Nachteil des *Porro*schen Distanzmessers besteht, abgesehen von der Verteuerung des Fernrohrs durch die Kollektivlinse, darin, daß durch die letztere zugleich eine wesentliche Verringerung der Objektivbrennweite verursacht wird, womit auch die Vergrößerung des Fernrohrs in demselben Maße abnimmt. *Porros* Distanzmesser ist deshalb nur dann anzuwenden, wenn das Instrument ausschließlich für die Zwecke der Tachymetrie dienen soll.

Die Erfindung des *Reichenbach*schen Distanzmessers ist nach *Hammer* auf *James Watt*, den Erfinder der Dampfmaschine, zurückzuführen, der sich dieser Methode der Entfernungsmessung im Jahre 1770 bei Vorarbeiten für einen Kanalbau bediente. Fast gleichzeitig wurde sie von dem Engländer *Green* angewendet. Indessen fehlte bei diesen ersten Versuchen noch die richtige Vorstellung von der Wirkungsweise einer solchen optischen Vorrichtung. Man rechnete die Entfernungen vom Objektiv aus nach der nicht streng richtigen Gleichung (vgl. Fig. 180 S. 269)

$$f + l = ak$$

und bestimmte die Korrektionen, die für die einzelnen Entfernungen erforderlich wurden. Erst der Münchener Mechaniker *Reichenbach* erkannte 1809 die Lage des anallaktischen Punktes in der vorderen Brennebene des Objektivs und gelangte zu der wichtigen Grundgleichung (4).

Die aus dem Jahre 1849 herrührende Erfindung des piemontesischen Majors *Porro* hat wegen der oben angegebenen Übelstände verhältnismäßig wenig Verbreitung gefunden. Die Berücksichtigung der kleinen Konstanten, die in der Regel rund 0,5 m beträgt, verursacht wenig Mühe, außerdem gibt es viele Fälle, in denen sie ohne Schaden vernachlässigt werden kann.

§ 113. Die Bestimmung der Konstanten.

Nur die kleine Konstante c des *Reichenbach*schen Distanzmessers kann durch direkte Messung genügend genau ermittelt

werden. Die große Konstante k wird am besten indirekt durch Messung einer Entfernung s mit dem Distanzmesser und mit Meßlatten oder Meßband bestimmt. Wird für diese Entfernung der Lattenabschnitt a gefunden, und ist der Wert von c vorher ermittelt worden, so ist

$$k = \frac{s - c}{a}.$$

Beispiel: Durch genaue Messung mit Latten wurde die Länge einer Strecke gleich 57,23 m gefunden. Mit einem Distanzmesser wurde für diese Entfernung der Lattenabschnitt a sechsmal bestimmt und es ergaben sich die folgenden Werte

	0,5630 m
	0,5615
	0,5625
	0,5615
	0,5620
	0,5625
Mittel:	0,5622 m.

Die kleine Konstante fand sich nach direkter Messung zu $c = 0{,}46$ m, folglich ist

$$k = \frac{57{,}23 - 0{,}46}{0{,}5622} = 100{,}98.$$

Auch die kleine Konstante kann gemeinsam mit der großen auf indirektem Wege bestimmt werden, indem man den Lattenabschnitt für eine kleine und eine große Entfernung mißt. Diese Methode der Konstantenbestimmung wird beim *Porro*schen Distanzmesser angewendet werden müssen, um festzustellen, ob die Kollektivlinse an der richtigen Stelle steht, die kleine Konstante c also wirklich gleich Null ist.

So wurden z. B. für die beiden Entfernungen $s_1 = 125{,}695$ m und $s_2 = 11{,}790$ m als Mittel aus mehreren Messungen mit einem Distanzmesser die Lattenabschnitte $a_1 = 1{,}2674$ m und $a_2 = 0{,}1185$ m gefunden. Nach Gl. (4) § 112 S. 269 haben wir dann

$$125{,}695 = c + 1{,}2674\,k$$
$$11{,}790 = c + 0{,}1185\,k,$$

und hieraus ergibt sich

$$k = 99{,}14 \qquad c = 0{,}04.$$

Da der Wert $c = 0{,}04$ bei der praktischen Anwendung des Distanzmessers vernachlässigt werden kann, so kann für das untersuchte Instrument die Gleichung

$$s = 99{,}14\, a$$

benutzt werden.

Es wird dem Mechaniker selten gelingen, der Konstanten k den beabsichtigten runden Wert, in den vorstehenden Beispielen 100, genau zu geben. Um die hierdurch entstehende Unbequemlichkeit bei der Berechnung der Entfernungen zu vermeiden, hat man früher mehrfach Justiervorrichtungen angebracht, mit denen der Fadenabstand ein wenig verändert und auf den richtigen Wert gebracht werden konnte. Diese Vorrichtungen haben sich jedoch schlecht bewährt, da die Justierschrauben sich beim Transport lockerten und die Konstante fortwährend veränderten.

Bei Distanzmessern mit *Huyghens*schem Okular kann übrigens durch geringe Verschiebung der Gesichtsfeldblende gegen die Kollektivlinse der Abstand der durch die letztere entworfenen Fadenbilder, auf den es hier lediglich ankommt, auf die richtige Größe gebracht werden. Das Augenglas muß dann ebenfalls verstellbar sein, um die Fäden für die günstige Sehweite des Auges einzustellen. Allerdings erfolgt diese Justierung auf Kosten der Achromasie des Okulars.

Bei *Porros* Distanzmesser ist die Veränderung der Konstanten k durch Verschiebung der Kollektivlinse möglich, wie Fig. 181 S. 270 zeigt. Durch mehrfache Versuche wird man auch hier den runden Wert der Konstanten k erreichen. Hierbei bleibt die kleine Konstante c nicht mehr gleich Null, jedoch wird der sich ergebende kleine Wert von c keine Rolle spielen.

Die Unbequemlichkeit der Rechnung mit einer nicht genau abgestimmten Konstanten kann durch Anwendung geeigneter Rechenhilfsmittel vermieden werden, auf die später eingegangen werden soll.

§ 114. Geneigte Visuren.

Die Grundgleichungen (4) und (5) § 112 S. 269/271 der Distanzmesser gelten nur für den Fall, daß die Visierachse senkrecht

auf die Latte gerichtet ist. Bei einer um den Winkel α gegen die Horizontale geneigten Visierachse bleiben diese Gleichungen bestehen, wenn die Latte nicht lotrecht, sondern ebenfalls um den Winkel α gegen die Lotrichtung geneigt gehalten wird. In der Tat wird dieses Mittel häufig angewendet. Da es bei steileren Visuren jedoch unbequem ist, die Latte in der richtigen Neigung zu halten, so zieht man auch hier die lotrechte Stellung vor und berücksichtigt den hierdurch entstehenden Fehler durch Rechnung.

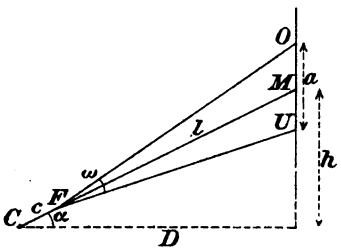


Fig. 182.

In Fig. 182 sei C der Schnittpunkt der Visierachse und der Stehachse des Instruments, F der vordere Brennpunkt des Objektivs bzw. der anallaktische Punkt, und FO und FU seien die den Distanzfäden entsprechenden Visuren. Aus den Ablesungen O und U bilden wir den Lattenabschnitt $a = O - U$. Sehen wir den Höhenwinkel α der Visierachse als bekannt an, setzen $FM = l$ und bezeichnen den Winkel zwischen den äußeren Visuren mit ω, so ist in dem Dreieck OFM

$$l = OF \cdot \frac{\cos\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right)}{\cos\alpha},$$

und in dem Dreieck OUF

$$OF = a \cdot \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega},$$

folglich wird

$$l = a \cdot \frac{\cos\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\omega}{2}\right)}{\cos\alpha\sin\omega}.$$

Es ist aber

$$\cos\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\omega}{2}\right) = \cos^2\alpha\cos^2\frac{\omega}{2} - \sin^2\alpha\sin^2\frac{\omega}{2}$$

$$= \cos^2\alpha - \sin^2\frac{\omega}{2},$$

mithin ist

$$l = a \cdot \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\frac{\omega}{2}}{\cos\alpha\sin\omega}.$$

Führen wir die Substitution

$$\sin\omega = \frac{2\tan\frac{\omega}{2}}{1+\tan^2\frac{\omega}{2}}$$

ein, so wird

$$l = a\,\frac{1+\tan^2\frac{\omega}{2}}{2\cos\alpha\tan^2\frac{\omega}{2}}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\frac{\omega}{2}\right).$$

Dies geht nach einer einfachen Reduktion über in

$$l = a\,\frac{\cos\alpha}{2\tan\frac{\omega}{2}} - a\,\frac{\tan\frac{\omega}{2}\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}.$$

Da aber nach dem Früheren die große Konstante

$$k = \frac{1}{2\tan\frac{\omega}{2}}$$

ist, so erhalten wir

$$l = ak\cos\alpha - \frac{a}{4k}\sin\alpha\tan\alpha. \tag{1}$$

Für $\alpha = 45^0$, $k = 100$ und $l = 300$ m erreicht das zweite Glied den Wert von 0,5 cm, es kann also stets vernachlässigt werden, und somit ergibt sich die Endgleichung

$$l = ak\cos\alpha. \tag{2}$$

Für die Entfernung $CM = s$ finden wir

$$s = c + ak\cos\alpha. \tag{3}$$

Hieraus können wir sofort den horizontalen Abstand D des Punktes C von der Latte und den Höhenunterschied h der Punkte C und M angeben. Es ist

$$D = c\cos\alpha + ak\cos^2\alpha, \tag{4}$$

$$h = c\sin\alpha + ak\sin\alpha\cos\alpha, \tag{5}$$

oder auch

$$h = c\sin\alpha + \frac{1}{2}ak\sin 2\alpha. \tag{6}$$

Statt der Gleichungen (5) oder (6) kann auch

(7) $$h = D \operatorname{tang} \alpha$$

benutzt werden.

Für die praktische Anwendung sind die Gl. (4) und (6) nicht bequem, weshalb man eine weitere Näherung einführt.

Durch eine einfache Umformung erhalten wir aus (4) und (6)

(8) $$D = (c + ak)\cos^2\alpha + 2c\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

(9) $$h = (c + ak)\frac{1}{2}\sin 2\alpha + 2c\sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Für $c = 0{,}50$ m und $\alpha = 45^0$ nehmen die beiden letzten Glieder der vorstehenden Gleichungen den Wert 0,10 m an. Die Genauigkeit der optischen Distanzmessung rechtfertigt es nicht, Glieder, die im extremen Falle den vorstehenden Wert erreichen, zu berücksichtigen, weshalb für die praktische Anwendung die Näherungswerte

(10) $$D = (c + ak)\cos^2\alpha,$$

(11) $$h = (c + ak)\frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

bzw.

(12) $$h = D \operatorname{tang} \alpha$$

hinreichen.

§ 115. Reduktionshilfsmittel.

Die unmittelbare Berechnung von D und h nach den vorstehenden Gleichungen würde bei einer größeren Anzahl von Messungen zu mühevoll sein. Es sind deshalb Rechenhilfsmittel in Form von Zahlentafeln, graphischen Tafeln oder auch mechanischen Vorrichtungen eingeführt worden, die die Berechnung vereinfachen.

1. *Zahlentafeln:* Die von *Jordan* herausgegebenen „Hilfstafeln für Tachymetrie“ (3. Aufl., Stuttgart 1904) enthalten die Werte $\frac{1}{2}A\sin 2\alpha$ und $A\cos^2\alpha$ für ganze Werte von A zwischen 10 und 250. Hierbei geht α für kleine Werte von A bis 30^0, für mittlere Werte von A bis 20^0 und für große Werte von

A bis 10^0. Ohne Interpolation kann D bis auf ganze Einheiten, h bis auf eine Dezimalstelle entnommen werden.

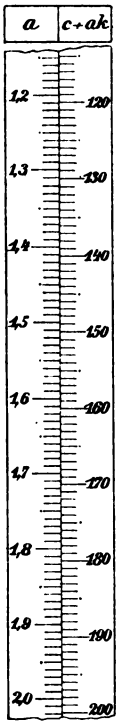


Fig. 183.

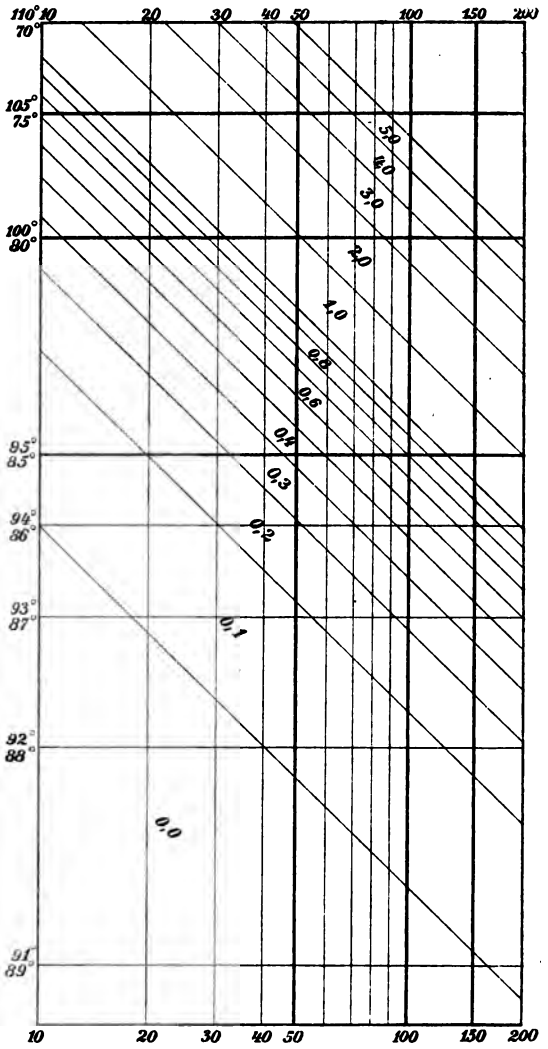


Fig. 184.

Ein anderes Tafelwerk: *Jadanza*, Tavole tacheometriche sessagesimali (Torino 1900) eignet sich zur strengeren Berechnung von D und h. Hier sind für $\alpha = 0^0$ bis $\alpha = 30^0$ von

Minute zu Minute fortschreitend die Werte von $A\cos^2\alpha$ und $\frac{1}{2}A\sin 2\alpha$ für $A = 1$ bis $A = 9$ auf fünf Dezimalstellen gegeben, so daß man hieraus D und h für jeden Wert von A zusammenstellen kann. Allerdings ist hierbei häufig eine Addition von vier Zahlen erforderlich.

Der Wert von

$$A = c + ak,$$

der bei der Anwendung der vorstehenden Tafeln, wie überhaupt aller Rechenhilfsmittel, als gegeben vorausgesetzt wird, kann bei unrundem k mit Hilfe einer Skala ermittelt werden. Fig. 183 zeigt einen Teil einer solchen Skala für die Konstanten $k = 98{,}87$ und $c = 0{,}48$, aus der für jedes a der Wert $c + ak$ entnommen werden kann, z. B. $a = 1{,}263$ gibt $c + ak = 125{,}3$.

2. *Graphische Tafeln* für D und h sind in großer Anzahl entworfen worden. In Fig. 184 ist aus *Wenner*, Graphische Tafeln für Tachymetrie, Darmstadt 1905, eine logarithmisch-graphische Tafel unter Weglassung aller Zwischenlinien wiedergegeben, die zur Berechnung von D dient. Die Argumente der Tafel sind die Zenitdistanz z der Visur und die Größe $A = c + ak$, und die Tafelwerte ergeben

$$R = A - A\cos^2\alpha \quad \text{oder} \quad R = A - A\sin^2 z,$$

so daß

$$D = A - R$$

ist.

Zur Bestimmung des Höhenunterschiedes h ist in Fig. 185 für die Gl. (12) § 114 S. 276

$$h = D \operatorname{tang} \alpha$$

eine *Schichten-* oder *Isoplethentafel* nach *Vogler* entworfen worden, die h mit den Argumenten D und α gibt. Die Kurven sind gleichseitige Hyperbeln, von denen die mit vollen Linien ausgezogenen die horizontalen und vertikalen Geraden in gleiche Abschnitte einteilen. Hierdurch wird die Konstruktion solcher Tafeln sehr erleichtert.

3. *Mechanische Hilfsmittel.* Von den vielen Vorrichtungen sei hier nur der *tachymetrische Rechenschieber* erwähnt, der von *Werner* in Zürich in die heute gebräuchliche Form gebracht ist.

Fig. 186 stellt einen solchen Schieber von *Günther* und *Tegetmeyer* in Braunschweig dar; er hat vier Skalen, eine obere und untere auf dem Lineal und eine obere und untere auf dem Schieber.

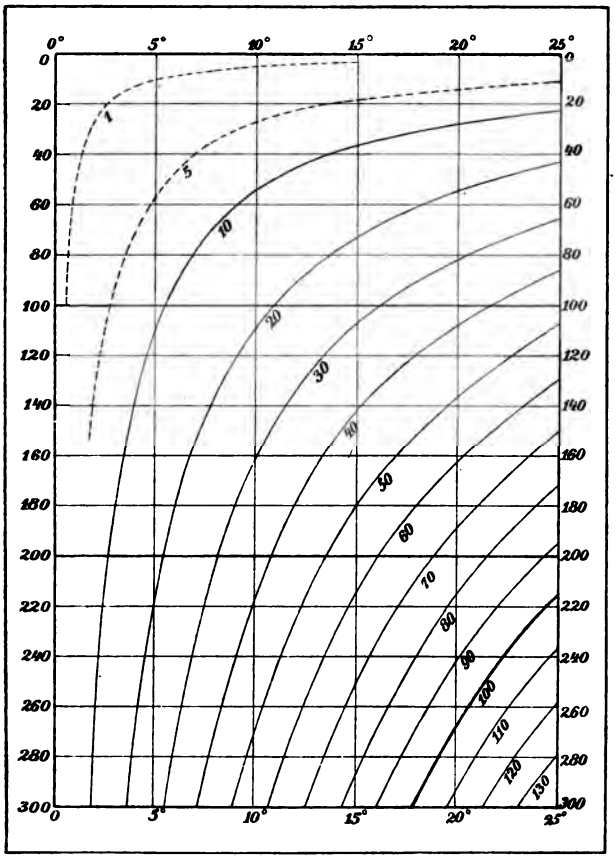


Fig. 185.

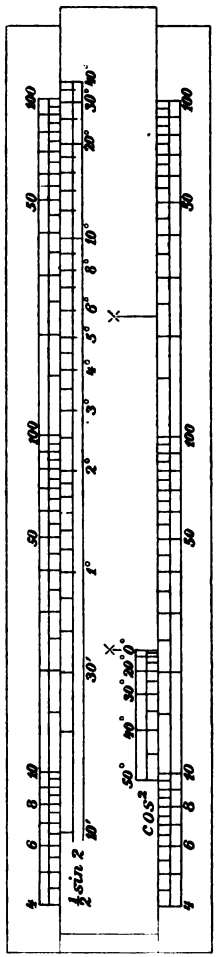


Fig. 186.

Die beiden Linealteilungen sind gleichartige logarithmische Skalen, auf der unteren Teilungskante des Schiebers sind in derselben Einheit die Logarithmen von $\cos^2 \alpha$ für die Werte von α zwischen 0^0 und 50^0 aufgetragen, während die obere Schieberkante die Werte von $\log \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ für α zwischen 0^0 $10'$

und 40° trägt. Die beiden Schieberskalen sind derartig gegenübergestellt, daß der Strich 0° der unteren Teilung mit dem Strich 0° 34,4′ der oberen Teilung zusammenfällt; für diese Winkel ist die Mantisse von $\log \cos^2 \alpha$ bzw. $\log \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ gleich Null.

Beim Gebrauch wird der Nullstrich des Schiebers, der mit einem liegenden Kreuz versehen ist, auf den Wert $A = c + ak$ der unteren Linealteilung eingestellt, in Fig. 186 z. B. auf 23,0 bzw. 230. Wird der Höhenwinkel α nacheinander an den beiden Schieberteilungen aufgesucht, so kann man hierzu an den Linealteilungen die Werte von $(c + ak) \cos^2 \alpha$ und $\frac{1}{2}(c + ak) \sin 2\alpha$ ablesen.

Eine Skala mit den Werten von $\log \operatorname{tang} \alpha$, die der Rechenschieber außerdem noch enthält, ist in Fig. 186 weggelassen.

Die Anwendung des tachymetrischen Rechenschiebers ist sehr bequem, jedoch macht die Berücksichtigung der Kommastellung namentlich bei der Berechnung von h ein wenig Mühe und gibt zu Fehlern Anlaß.

§ 116. Distanzmesser mit selbsttätiger Reduktion.

Schon in der Mitte des vorigen Jahrhunderts bemühte man sich, mit dem Fadendistanzmesser Vorrichtungen zu verbinden, mit denen man im Felde bei der Aufnahme die Reduktion ausführen konnte, so daß man sofort horizontale Entfernungen und Höhenunterschiede erhielt. Diesen Zweck verfolgen z. B. die von *Wagner* und *Kreuter* eingeführten Reduktionsvorrichtungen. Solche Instrumente haben jedoch kaum einen Vorzug vor dem einfachen Fadendistanzmesser, zumal der Reduktionsmechanismus die Handhabung des Instruments im Gelände erschwert.

Eine wirkliche Vereinfachung der Entfernungs- und Höhenbestimmung bezwecken diejenigen Instrumente, die eine selbsttätige Reduktion des Lattenabschnitts vollziehen, so daß an der Latte bereits die horizontale Entfernung D und der Höhenunterschied h abgelesen werden können. Hierzu ist eine selbsttätig eintretende Veränderung des Fadenabstandes im Fernrohr erforderlich. Eine Reihe von Erfindungen in Frankreich und Italien versuchte diese Aufgabe durch mechanische Verschiebung

eines der beiden Distanzfäden zu lösen, jedoch sind die Versuche an der Schwierigkeit der exakten Ausführung gescheitert.

Hammer in Stuttgart hat 1901 einen neuen Weg eingeschlagen, auf dem er durch optische Hilfsmittel eine automatische Reduktion des Lattenabschnitts erreichte. Das Prinzip der von *Hammer* angegebenen und von *Fennel* in Cassel ausgeführten Konstruktion besteht darin, daß an die Stelle der Distanzfäden zwei auf einem Glasplättchen eingeätzte nicht parallele Kurven treten. Das Glasplättchen ist mit dem Fernrohrträger fest verbunden, und durch ein seitliches Fenster im Fernrohr wird ein Ausschnitt aus beiden Kurven vermittelst eines besonderen Linsensystems in die Bildebene des Fernrohrs geführt, um hier die Distanzfäden zu ersetzen. Der Abstand dieser beiden Distanzfäden ist bei jeder Neigung des Fernrohrs ein anderer.

Zur Erläuterung der inneren Einrichtung des Fernrohrs und der Reduktionsvorrichtung dienen Fig. 187 und Fig. 188, von denen die erstere den schematischen Horizontalschnitt, die letztere die Ansicht des Instruments bietet. Beide Abbildungen geben jedoch nur die wichtigsten Teile wieder. Äußerlich ist an dem Fernrohr zu bemerken, daß statt der Okularröhre eine Objektiv-

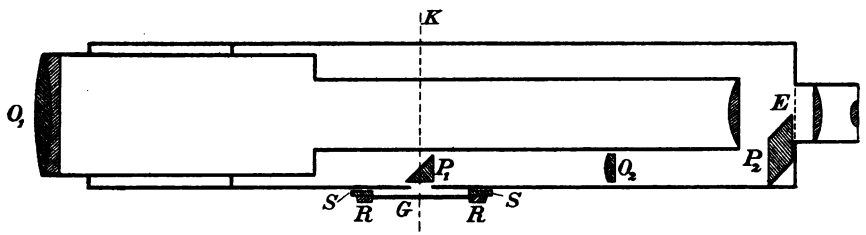


Fig. 187.

röhre durch einen Trieb beweglich ist. Die auf dem Fernrohr befestigte Röhrenlibelle dient zur Justierung des Instruments. Um die Kippachse K des Fernrohrs dreht sich eine Scheibe S, von der ein durch Justierschraube und Federbolzen gehaltener Zapfen Z ausgeht. Die Scheibe S nimmt somit an den Kippbewegungen des Fernrohrs nicht teil. Der Rahmen R kann auf der Scheibe S um die Achse A gedreht und durch die Schrauben B in beliebiger Stellung geklemmt werden; die Drehung erfolgt

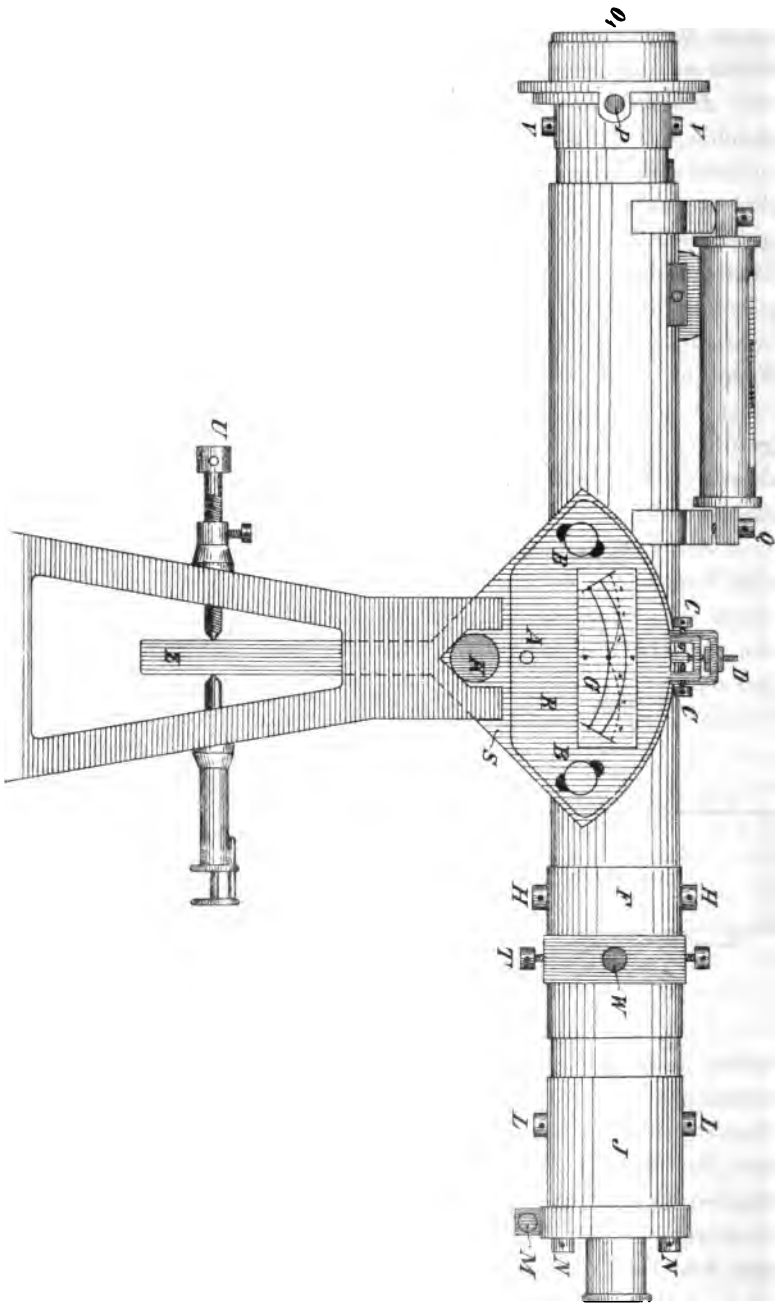


Fig. 188.

durch die Schrauben C. Um auch eine geringe Hebung und Senkung des Rahmens ausführen zu können, ist zwischen Rahmen und Scheibe ein Schlitten angebracht, der die Achse A trägt und durch die Schraube D bewegt werden kann. In den Rahmen R ist eine Glasscheibe G eingesetzt, die, wie Fig. 188 zeigt, ein aus feinen Linien bestehendes Diagramm trägt. Die unterste Kurve des letzteren ist ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt in der Kippachse liegt. Aus Fig. 187 ist ersichtlich, daß die Scheibe S und das Fernrohr hinter der Mitte des Diagramms durch Fenster unterbrochen sind. Im Innern des Fernrohrs sehen wir ein mit der Hypotenusenfläche reflektierendes Prisma P_1 angebracht, ferner ein kleines Objektiv O_2 und ein mit zwei reflektierenden Flächen ausgestattetes Prisma P_2. Die lotrechte Kante des letzteren halbiert das Gesichtsfeld und vertritt die Rolle des Vertikalfadens des Fadenkreuzes. Die von dem Diagramm ausgehenden Lichtstrahlen treffen auf das Objektiv O_2 und vereinigen sich nach der Brechung und nach zweimaliger Reflexion zu einem Bilde des Diagramms in der Ebene E. Durch Bewegung des Objektivs O_1 kann auch das Bild des eingestellten Objekts in diese Ebene gebracht werden, so daß das letztere rechts, das des Diagramms links im Gesichtsfelde erscheint. Bei horizontaler Lage des Fernrohrs ergibt sich somit im Gesichtsfelde der Anblick der Fig. 189, wobei das Fernrohr auf eine lotrecht stehende Latte gerichtet ist. Die Bedeutung des Diagramms ist die folgende: Der an der Prismenkante gemessene Lattenabschnitt l_1 zwischen den beiden ausgezogenen Diagrammkurven gibt mit der Konstanten $k_1 = 100$ multipliziert die horizontale Entfernung D; in der Zeichnung ist $l_1 = 0{,}247$, also $D = 24{,}7$.

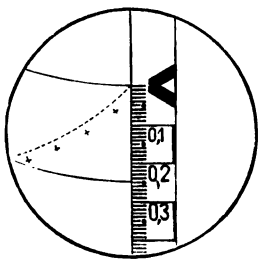


Fig. 189.

Dasselbe ist bei geneigtem Fernrohr der Fall (Fig. 190), indem der Lattenabschnitt dadurch selbsttätig verkleinert wird, daß bei der Neigung des Fernrohrs ein

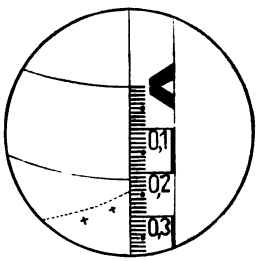


Fig. 190.

anderer Teil des Diagramms an die Prismenkante gelangt. Zugleich ist der Lattenabschnitt l_2 zwischen der Kreislinie und der gestrichelten Linie multipliziert mit der Konstanten $k_2 = 20$ gleich dem Höhenunterschied zwischen dem Fernrohr und der Lattenablesung an der Kreiskurve. In Fig. 190 ist $l_1 = 0{,}215$, $l_2 = +\,0{,}241$, folglich $D = 21{,}5$ m, $h = +\,4{,}82$ m.

§ 117. Die Berechnung des Diagramms.

Um die Theorie der *Hammer-Fennel*schen Reduktionsvorrichtung vollständig zu geben, entwickeln wir noch die Formeln, die zur Berechnung des Diagramms erforderlich sind. Da das Objektiv nach Fig. 187 mit einer Kollektivlinse verbunden ist, so bildet das ganze System einen *Porro*schen Distanzmesser. Es sei in Fig. 191 O der anallaktische Punkt des Fernrohrs, M der Nullpunkt der Latte und l_1 der Lattenabschnitt, aus dem die Entfernung D berechnet werden soll. Unter Einführung der beiden Winkel α und β_1 und der Strecke $OM = s$ finden wir

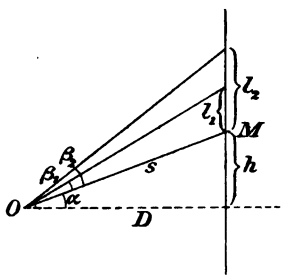


Fig. 191.

$$s = l_1 \frac{\cos(\alpha + \beta_1)}{\sin \beta_1}$$

und

$$D = s \cos \alpha = l_1 \frac{\cos(\alpha + \beta_1)}{\sin \beta_1} \cos \alpha .$$

Nun wird die Forderung gestellt, daß der Lattenabschnitt bei beliebiger Fernrohrneigung der Bedingung

$$D = k_1 l_1$$

entspricht, wo k_1 eine Konstante ist. Für den Winkel β_1 ergibt sich folglich die Gleichung

$$k_1 = \frac{\cos(\alpha + \beta_1)}{\sin \beta_1} \cos \alpha$$

oder

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tang} \beta_1 = \frac{\cos^2 \alpha}{k_1 + \sin \alpha \cos \alpha} .$$

Bezeichnen wir den Abstand der Distanzlinien des Dia-

gramms bei einer Neigung α des Fernrohrs in der Bildebene E, Fig. 187, mit p_1 und die äquivalente Brennweite des Objektivs und des Kollektivs mit f, so ist nach § 112 S. 269

$$\operatorname{tang} \frac{\beta_1}{2} = \frac{p_1}{2f}.$$

Hieraus ergibt sich

$$p_1 = 2f \operatorname{tang} \frac{\beta_1}{2}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) kann der Abstand p_1 für jeden Höhenwinkel α berechnet werden.

Ist ferner l_2 der Lattenabschnitt, aus dem der Höhenunterschied h berechnet werden soll, so ist entsprechend

$$h = s \sin \alpha = l_2 \frac{\cos(\alpha + \beta_2)}{\sin \beta_2} \sin \alpha.$$

Da aber gefordert wird, daß

$$h = k_2 l_2$$

ist, so ergibt sich

$$k_2 = \frac{\cos(\alpha + \beta_2)}{\sin \beta_2} \sin \alpha$$

und hieraus

$$\operatorname{tang} \beta_2 = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{k_2 + \sin^2 \alpha}. \tag{3}$$

Zur Berechnung des Fadenabstandes hat man

$$p_2 = 2f \operatorname{tang} \frac{\beta_2}{2}. \tag{4}$$

Für Tiefenwinkel sind die entsprechenden Formeln leicht aufzustellen. Nach Fig. 192 haben wir

$$s = l \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \beta}.$$

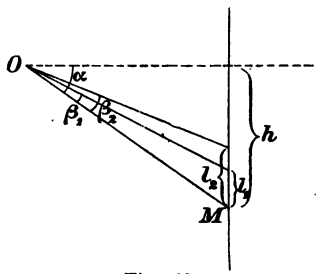


Fig. 192.

Führen wir hiermit die obige Entwicklung durch, so erhalten wir für die Entfernungsmessung

$$\operatorname{tang} \beta_1 = \frac{\cos^2 \alpha}{k_1 - \sin \alpha \cos \alpha} \tag{5}$$

und für die Höhenmessung

$$\operatorname{tang} \beta_2 = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{k_2 - \sin^2 \alpha}, \tag{6}$$

während die Gl. (2) und (4) unverändert bleiben.

Die Abstände p_1 und p_2 müssen die Diagrammlinien in der Ebene E der Fig. 187 haben. Die Linse O_2 bildet das Diagramm in der Ebene E in unveränderter Größe ab, es kann somit nach den obigen Formeln das Diagramm selbst berechnet werden. Die äquivalente Brennweite des Objektivs und des Kollektivs ist gleich 334,78 mm. Hieraus ergibt sich für

$\alpha = 0$	$p_1 = 3{,}348$ mm	$p_2 = 0$
$\alpha = +30^0$	$p_1 = 2{,}500$ mm	$p_2 = 7{,}158$ mm
$\alpha = -30^0$	$p_1 = 2{,}522$ mm	$p_2 = 7{,}340$ mm.

Wenn noch für einige Zwischenwerte von α die Größen p_1 und p_2 berechnet werden, so kann das Diagramm leicht konstruiert werden. Die unterste Kurve des letzteren ist ein Kreisbogen, dessen Radius r gleich 30 mm gemacht wurde. Für jeden Höhen- bzw. Tiefenwinkel α wurden auf dem Radius die Längen $r + p_1$ und $r + p_2$ abgetragen (Fig. 193), wodurch man die Entfernungskurve und die Höhenkurve erhielt.

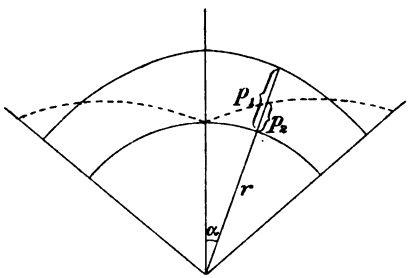


Fig. 193.

Bei der Ausführung des Diagramms wurde dasselbe in 20facher Vergrößerung entworfen und auf photographischem Wege in der richtigen Größe auf Glas übertragen.

§ 118. Die Justierung der Hammer-Fennelschen Reduktionsvorrichtung.

Zur Festlegung der Bildebene ist bei E Fig. 187 ein Horizontalfaden ausgespannt, der zugleich bei der Justierung von Nutzen ist. Wir bezeichnen im Diagramm den Schnittpunkt der beiden gestrichelten Höhenkurven mit dem Grundkreise als *Nullpunkt*, den durch ihn gehenden Radius als *Mittelradius* des Diagramms. Letzterer ist auf dem Glasplättchen durch zwei Sterne kenntlich gemacht.

Die Ermittlung der horizontalen Entfernungen und der

Höhenunterschiede erfolgt nur dann frei von Instrumentalfehlern, wenn folgende Bedingungen streng erfüllt sind:

1. Die kleine Konstante c des Distanzmessers ist für mittlere Entfernungen gleich Null. Sie kann nicht für alle Entfernungen verschwinden, da der anallaktische Punkt sich mit dem Objektiv des Fernrohrs bewegt.

2. Die beiden Multiplikationskonstanten haben die Werte $k_1 = 100$ und $k_2 = 20$.

3. Der Horizontalfaden liegt in der Bildebene.

4. Die Prismenkante in der Bildebene kreuzt die Kippachse rechtwinklig.

5. Der Kollimationsfehler ist gleich Null.

6. Die Libellenachse ist parallel der Visierachse.

7. Der Mittelpunkt des Diagrammgrundkreises liegt in der Kippachse.

8. Das Bild des Grundkreises berührt den Horizontalfaden bei jeder Fernrohrneigung.

9. Das Bild des Mittelradius fällt bei wagrechter Visur mit der Prismenkante zusammen.

Nicht justierbar ist die Stellung des Prismas P_1, dessen eine Kathetenfläche der Diagrammebene parallel laufen soll, und dessen Kanten dem Mittelradius parallel sein sollen. Die Justiervorrichtungen haben seit der ersten Konstruktion des Instruments bereits mehrfache Abänderungen erfahren. Der Fig. 188 und den folgenden Ausführungen entspricht das Instrument der hiesigen geodätischen Sammlung.

Zu 1. Zur Veränderung der kleinen Konstanten c läßt sich das Fernrohrobjektiv, das durch die Schrauben V festgehalten wird, auf der Auszugsröhre ein wenig verschieben, wozu die Schraubenlöcher elliptisch erweitert sind. Die Justierung erfolgt durch Versuche, nachdem c nach S. 272 ermittelt ist.

Zu 2. Gleichzeitig wird der Wert der großen Konstanten k_1 ermittelt. Weicht dieser von 100 ab, so wird die Hülse F, die das kleine Objektiv O_2 trägt, verschoben und hierdurch das Diagrammbild verändert. In der endgültigen Lage wird die Hülse durch die Schrauben H festgelegt.

Zu 3. Die Bildebene wird durch die Justierung 2 in der Längsrichtung des Fernrohrs verschoben. Um den Horizontal-

faden wieder in die Bildebene zu bringen, wird die Hülse J verschoben und dann durch die Schrauben L befestigt.

Zu 4. Wird bei horizontaler Lage der Kippachse ein Ziel mit der Prismenkante eingestellt und das Fernrohr ein wenig gekippt, so zeigt es sich, ob die Prismenkante lotrecht steht. Durch Drehen der Schraube M und der ihr entsprechenden auf der anderen Seite des Fernrohrs kann die Prismenkante in die richtige Lage gebracht werden. Die Schrauben N dienen zur Befestigung des Prismas nach der Justierung.

Zu 5. Als Fadenkreuzschnittpunkt gilt der Schnittpunkt des horizontalen Fadens und der Prismenkante. Die Prüfung des Kollimationsfehlers erfolgt durch Umlegen des Fernrohrs nach S. 84, seine Beseitigung mit Hilfe der Schrauben P, durch die das Objektiv seitlich verschoben werden kann.

Zu 6. Die Justierung der Libelle geschieht wie beim Nivellierinstrument *Sicklers*cher Form nach § 84 vermittelst der Schraube Q.

Zu 7 und 8. Zur richtigen Einstellung des Rahmens R mit dem Diagramm ist bei horizontaler Visur mittels der bei T oben und unten befindlichen Schrauben das kleine Objektiv O_2 vorläufig so zu verschieben, daß der Faden den Grundkreis im Gesichtsfelde berührt. Tritt beim Auf- und Niederkippen des Fernrohrs der eine Endpunkt des Grundkreisbogens über, der andere unter den Faden, so ist eine Drehung des Rahmens R vermittelst der Schrauben C erforderlich, bis beide Punkte über oder unter dem Faden bleiben. Hierauf ist noch eine Hebung oder Senkung des Rahmens durch die Schraube D auszuführen und gleichzeitig der Faden mit den Schrauben T wieder auf den Grundkreis einzustellen. Bleibt nach mehreren Versuchen der Grundkreis stets im Fadenkreuzschnittpunkt, so wird der Rahmen R durch Anziehen der Schrauben B befestigt.

Zu 9. Durch Drehen der Schraube U, die dem Federbolzen entgegenwirkt, wird der Mittelradius lotrecht gestellt und durch Verschieben des kleinen Objektivs O_2 mittels der Schraube W in die Prismenkante gebracht. Auch eine Befestigung der Schraube U nach der Justierung ist, wie die Abbildung zeigt, vorgesehen.

§ 119. Der tachymetrische Theodolit.

Das in Fig. 194 abgebildete *Kreistachymeter* von *Hildebrand* in Freiberg i. Sa. unterscheidet sich von einem Repetitionstheodolit mit Höhenkreis nur durch die im Fernrohr befindlichen Distanzfäden und den auf die Kippachse aufgesetzten Kompaß. An dem Fernrohr ist auf der Unterseite eine Nivellierlibelle befestigt; die Alhidade des Höhenkreises ist mit dem Fernrohrträger fest verbunden und trägt zwei Klappnonien. Der Nonius 1 beider Kreise ist mit einem Hilfszeiger versehen, bestehend in einem Strich, der vom Noniusnullpunkt einen willkürlich unrunden Abstand hat und hinter dem letzten Strich des Nonius liegt. Wird wegen des rascheren Fortgangs der Messung nur am Nonius 1 abgelesen, so gibt die Ablesung am Hilfszeiger, die bis auf ein Zehntel der Limbuseinheit genau wird, einen guten Schutz gegen grobe Ablesungsfehler.

Fig. 194.

Die Justierung des Kreistachymeters beschränkt sich auf die Berichtigung der beiden Kreuzlibellen in bezug auf die Stehachse, die Beseitigung des Kollimations- und Kippachsenfehlers und des Indexfehlers am Höhenkreis. Alles dies ist bereits S. 71, 84 und 220 behandelt worden. Die Berichtigung des Instruments ist wichtig, da die Messungen meistens nur in einer Fernrohrlage ausgeführt werden.

Als Latte kann eine beliebige Nivellierlatte, z. B. mit der ersten Einteilung von Fig. 146 S. 195 benutzt werden.

Das *Tachymeter von Hammer-Fennel* (Fig. 195) ist ein Repetitionstheodolit, dessen Fernrohr mit der S. 281 erläuterten Reduktionsvorrichtung versehen ist. An die Stelle der Nonien des Horizontalkreises sind kleine Mikroskope gesetzt, deren

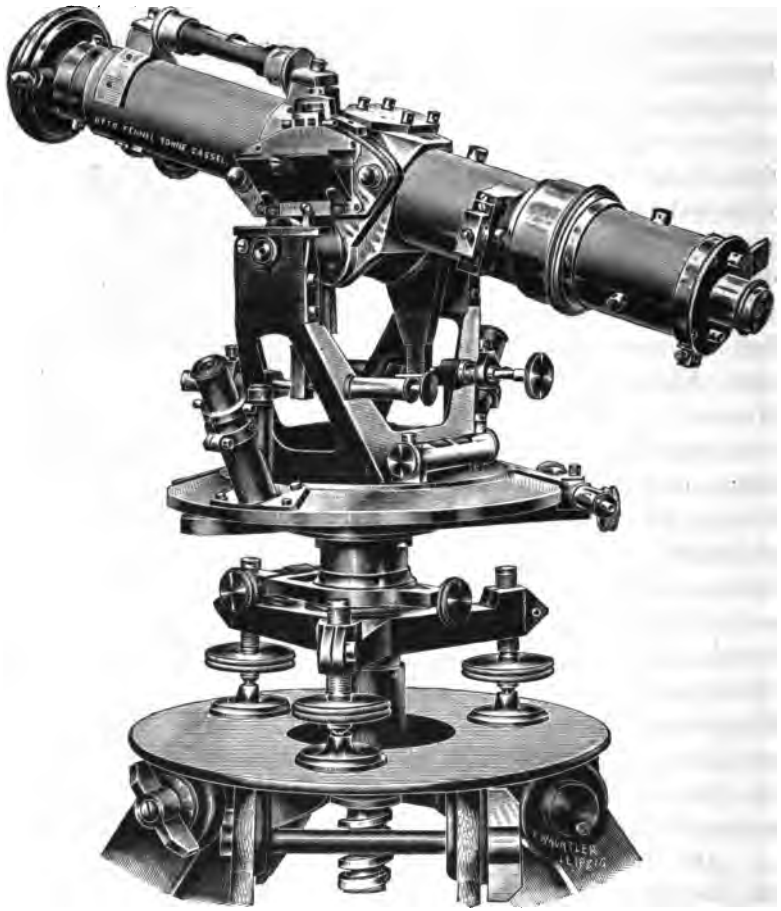


Fig. 195.

Bildebene einen Faden in der Richtung der Teilstriche trägt. Da der Kreis in $^1/_6$ Grade geteilt ist, so können die einzelnen Minuten sehr schnell abgelesen werden. An der Scheibe, die das Diagramm enthält, ist ein Reflektor sichtbar. Einige Einzelheiten weichen von Fig. 188 ab, da letztere einem neueren Instrument entspricht.

Da die Justierung des Fernrohrs bereits eingehend erläutert ist, so bleibt nur noch die Justierung des Libellenkreuzes in bezug auf die Stehachse und die Beseitigung des Kippachsenfehlers zu erwähnen.

Für die Benutzung des Instruments ist die gewöhnliche Nivellierlatte mit Felderteilung nicht bequem, da die Abschnitte l_1 und l_2 am Rande der Latte abgelesen werden müssen. Dem Instrument der hiesigen Sammlung ist eine Latte mit *Strichteilung* (Fig. 196) mitgegeben worden, deren Nullstrich um 1,4 m (Instrumenthöhe) nach oben verschoben ist. Statt eines einfachen Nullstriches ist eine *Nullmarke* angebracht, die auch bei größeren Entfernungen deutlich sichtbar ist. Nach einem Vorschlag von *Vogler* wurde die Latte mit einer zweiten Nullmarke in roter Farbe versehen, die um 0,033 m gegen die erstere verschoben ist. Zugleich wurde auch die dekadische Bezifferung der Dezimeterstriche in derselben Farbe hinzugefügt.

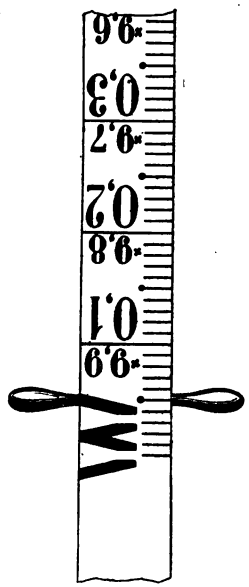


Fig. 196.

§ 120. Tachymetrische Aufnahmen.

Die Grundaufgabe der Tachymetrie ist die Bestimmung der Polarkoordinaten und Höhen von Geländepunkten. Die Aufnahme von einem einzelnen Standpunkt oder einer *Station* aus beschränkt sich auf Entfernungen bis zu 300—400 m. Es ist deshalb eine weitere Hauptaufgabe, die gegenseitige Lage der einzelnen Stationen zu ermitteln. Liegt ein Netz von Dreieckspunkten und Höhenmarken vor, so bezweckt das *Stationieren* die Einschaltung der Stationspunkte nach Lage und Höhe in die gegebenen Punkte. Sind Anschlußpunkte nicht vorhanden, so wird ein geschlossener Polygon- oder Bussolenzug die Grundlage der Aufnahme bilden, bei langgestreckten Geländestreifen auch ein offener Polygon- oder Bussolenzug.

Für die Einschaltung der Stationspunkte in ein Dreiecksnetz wird von den § 56—63 besprochenen Methoden das Rück-

wärtseinschneiden fast allein in Frage kommen, weil man die Bestimmung des Stationspunktes gern mit der Geländeaufnahme verbindet. Da die Winkelmessung nur in *einer* Fernrohrlage erfolgt, so ist durch Hinzunahme der Richtung nach einem vierten Dreieckspunkte eine Meßprobe zu schaffen. Die Bestimmung der Instrumenthöhe wird durch trigonometrische Höhenmessung ausgeführt, indem die Zenitdistanz nach einem Dreieckspunkte von bekannter Höhe gemessen wird.

Die Hauptrolle spielen beim Stationieren Polygon- oder Bussolenzüge mit gleichzeitiger Höhenübertragung. Gegenüber den früher behandelten Polygonzügen können Vereinfachungen eintreten, indem man die Winkel nur in einer Fernrohrlage mißt und die Streckenmessung mit Hilfe des Distanzmessers ausführt. Sind A und B zwei aufeinanderfolgende Polygonpunkte, so bezeichnet man in ihrer Verbindungslinie zwei Wechselpunkte 1 und 2 durch Pflöcke und mißt von A aus die Entfernungen $A-1$ und $A-2$, von B aus die Entfernungen $B-2$ und $B-1$. Hierdurch erhält man die Strecke $A-B$ und den Unterschied der Instrumenthöhen in A und B zweimal.

Bussolenzüge mit Springständen (vgl. S. 108) gestatten eine weit größere Bewegungsfreiheit als Polygonzüge, da jeder neue Stand unabhängig von den Messungen des vorhergehenden gewählt werden kann. Auch hier kann man ohne Mühe die Genauigkeit der Stationierung durch Benutzung doppelter Wechselpunkte erhöhen. Mit der Vollkreisbussole wird man für Wechselpunkte und Geländepunkte die Kompaßrichtungswinkel unmittelbar ablesen; bei Anwendung eines Theodolits mit Orientierkompaß ist bei Beginn und Schluß der Messungen einer Station am Horizontalkreis bei einspielender Magnetnadel abzulesen. Für Bussolenzüge mit Anschluß an zwei Festpunkte darf auch die Bestimmung der *Mißweisung der Visur* (§ 48, S. 108) auf den beiden Endpunkten nicht versäumt werden, wenn die Koordinaten der Punkte berechnet werden sollen.

Die Detailmessung bezweckt die Aufnahme der Horizontalprojektion der Geländegegenstände und die Höhenaufnahme des Geländes. Hiernach richtet sich die Auswahl der nach Polarkoordinaten zu bestimmenden Punkte. Für die erstere Aufgabe kommen die Knickpunkte aller im Gelände sichtbaren Linien,

wie der Grenzen, Wege, Gehöfte usw., in Frage. Diese Punkte werden auch bereits der Höhenaufnahme dienen, sie müssen jedoch für die letztere durch eine Reihe sorgfältig ausgewählter Geländepunkte ergänzt werden. Hierzu wird man die Geländeoberfläche mit einem Netz von ebenen Dreiecken und windschiefen Vierecken überziehen, deren Flächen sich dem Gelände möglichst anschmiegen. Die Anzahl der aufzunehmenden Punkte wird sich nach dem Gelände und nach dem Maßstabe der zu zeichnenden Karte richten. Während in nahezu ebenem Gelände die Punkte in Abständen von mehreren 100 m liegen können, wird im Hügelland eine Beschränkung auf 20—50 m nötig sein. Die Punkte werden durch kleine Pflöcke bezeichnet und mit fortlaufenden Nummern versehen. In der Regel erfolgt die Auswahl der Punkte nur für die Umgebung einer Station, soweit sie von letzterer aus aufgenommen werden können. Hand in Hand geht hiermit der Entwurf einer Skizze, in die alle aufzunehmenden Linien, die Geländedreiecke nnd -Vierecke, die Stationen, die Punktnummern usw. eingetragen werden. Zugleich werden auch die Höhenkurven nach Schätzung skizziert, um bei der Zeichnung der Karte einen besseren Anhalt zu geben.

Neben den eigentlichen Stationen sind in schwierigem Gelände häufig noch Hilfsstationen erforderlich, die an den nächsten Polygon- oder Bussolenpunkt angeschlossen werden. Mitunter wird man auch die Verbindungslinie zweier tachymetrisch bestimmter Punkte als Abszissenachse zur Messung rechtwinkliger Koordinaten für solche Geländepunkte benutzen, deren Höhenlage nicht erforderlich ist.

Das Feldbuch zur Eintragung der Messungszahlen und der berechneten Entfernungen und Höhen soll an der Hand zweier Beispiele erläutert werden.

§ 121. Beispiele.

1. *Geländeaufnahme mit dem Kreistachymeter und Orientierkompaß.* Zur Stationierung wurde ein Bussolenzug mit Springständen und doppelten Wechselpunkten gemessen. Die folgende Tabelle gibt einen Teil des Feldbuches auf dem Bussolenpunkt V wieder. Die Punkte w_9 und w_{10} sind die beiden vorhergehenden Wechselpunkte. Nach der Aufstellung des Instruments wurde

die Magnetnadel zum Einspielen gebracht und hierauf am Nonius 1 und Hilfszeiger des Horizontalkreises abgelesen; die Ablesungen wurden mit der Bezeichnung *Nord* eingetragen. Der Abstand des Hilfszeigers vom Noniusnullpunkt beträgt an beiden Kreisen 15° 32′. Für die Wechselpunkte und Geländepunkte wurde der Mittelfaden zunächst auf 1,400 (der Instrumenthöhe ungefähr entsprechend) eingestellt und hierzu die Zenitdistanz abgelesen. Zur zweimaligen Bestimmung des Lattenabschnitts $O—U$ erfolgte hierauf die Einstellung des unteren Fadens auf den nächsten Dezimeterstrich (1,000 bei w_9,) und Ablesung des oberen (1,691), sowie die Einstellung des oberen Fadens (1,700) und Ablesung des unteren (1,009); die Differenz gab den Lattenabschnitt 0,691. Den Schluß bildete die Ablesung des Horizontalkreises.

Punkt	Ziellatte M	Ziellatte O_1 / O_2	Ziellatte U_1 / U_2	O_1-U_1 / O_2-U_2	Zenitdistanz	Richtung	Entf. D	Höhenuntersch. h	Steigt Höhe
Standpunkt V (Instrumenthöhe 1,36 m).									
Nord					° ′	° ′ 184 32 200 03			
w_9	1,400	1,691 1,700	1,000 1,009	0,691 0,691	94 26,5 109 56	175 26 190 55	69,2	5,37	53,23
w_{10}	1,400	1,749 1,800	1,000 1,051	0,749 0,749	94 23 109 57	163 48 179 22	75,0	(× 4,25) 5,75	× 9 62 52,84
6	1,400	1,762 1,800	0,900 0,940	0,862 0,860	106 13,5 121 43	268 51 284 22	79,0	(× 76,77) 23,23	× 82,52 35,36
17	1,400	1,849 2,000	0,800 0,951	1,049 1,049	99 39,5 115 13	321 14 336 44	102,4	(× 82,57) 17,43	5,80 41,16
13	1,400	1,870 1,900	1,000 1,030	0,870 0,870	97 54,5 113 25	331 40 347 15	85,8	(× 88,06) 11,94	5,49 46,65
12	1,400	1,761 1,800	1,000 1,040	0,761 0,760	96 33 111 07	350 45 6 14	75,6	(× 1,32) 8,68	3,26 49,91
11	1,400	1,681 1,700	1,100 1,119	0,581 0,581	99 02 114 31	336 19 351 53	57,1	(× 0,93) 9,07	× 9,61 49,52
7	1,400	1,659 1,700	1,200 1,241	0,459 0,459	98 06,5 113 40	355 47 11 17	45,4	(× 3,53) 6,47	2,60 52,12
15	1,400	1,706 1,700	1,100 1,094	0,606 0,606	108 24 123 59	293 39 309 12	54,9	(× 81,73) 18,27	× 88,20 40,32

Für das benutzte Kreistachymeter ist

$$c = 0{,}42 \qquad k = 100{,}08\,.$$

Hiermit sind in den letzten drei Spalten des Formulars die horizontalen Entfernungen, die Höhenunterschiede und die Höhen berechnet worden. Da der Zug beiderseitig an Höhenmarken angeschlossen war, so fand zunächst eine Ausgleichung der Höhen der Wechselpunkte statt, und hierauf wurden die Höhen der Geländepunkte berechnet. Es fanden sich nach der Ausgleichung für w_9 und w_{10} die Höhen 53,23 und 52,84, und letztere wurde für die Berechnung der Geländepunkte benutzt.

2. *Geländeaufnahme mit Hammer-Fennels Tachymeter.* Für das Feldbuch kann das folgende Schema Verwendung finden, in dem jedem Punkt zwei Zeilen bestimmt sind. Die zweite und dritte Spalte enthalten in der ersten Zeile die Lattenablesungen am Distanz- und Höhenfaden, während der feste Faden auf die schwarze Nullmarke eingestellt ist. Darunter stehen die Ablesungen an denselben Fäden in der dekadischen (roten) Bezifferung der Latte, für die der feste Faden auf die rote Nullmarke eingestellt ist. Die Summen der entsprechenden Ablesungen, die in Spalte 4 zusammengestellt sind, sollen × 9,967 geben, man erhält somit eine einwandsfreie Probe für die Richtigkeit der Ablesungen. Die nächste Spalte enthält die Ablesungen am Horizontalkreise. Bevor l_1 und l_2 mit 100 bzw. 20 multipliziert werden, wird man die Summen auf × 9,967 abstimmen, wodurch man zugleich das arithmetische Mittel der beiden entsprechenden Ablesungen bildet.

Punkt	Lattenabschnitte l_1	l_2	Probe	Kreis	Entf. D	Höhenunterschied h	Höhe
Standpunkt IV. Fernrohrhöhe 73,86.							
22	0,255 × 9,712	— 0,365 × 9,604	9,967 9,969	234 46 54 47	25,5	— 7,28	66,58
26	0,457 × 9,510	— 0,541 × 9,426	9,967 9,967	257 42 77 42	45,7	— 10,82	63,04
18	0,550 × 9,414	— 1,109 × 8,859	9,964 9,968	307 18 127 19	55,2	— 22,18	51,68
17	0,673 × 9,294	— 0,981 × 8,987	9,967 9,968	288 46 108 46	67,3	— 19,62	54,24

§ 122. Kompaß-Meßbandzüge.

In schwer zugänglichem Gelände wird die tachymetrische Aufnahme häufig dadurch erschwert, daß die Latte vom Instrument aus nicht genügend sichtbar ist. Da es in solchen Fällen hauptsächlich auf die Konstruktion der Horizontalkurven ankommen wird, auch eine geringere Genauigkeit genügt, so empfiehlt *Jordan* hier das Verfahren der *Kompaß-Meßbandzüge.* An Instrumenten wird hierzu außer einem Stahlmeßband von 20 m Länge mit zwei Meßbandstäben ein Stockkompaß und ein Gefällmesser gebraucht.

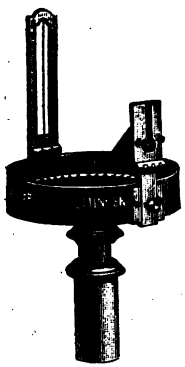


Fig. 197.

Bequem ist die in Fig. 197 abgebildete Bussole von *Schmalkalder,* in der auf der Magnetnadel eine eingeteilte Kreisscheibe aus Aluminium befestigt ist. An der Innenseite des Okulardiopters ist ein Prisma angebracht, mit dem die Kreisteilung abgelesen werden kann. Um die letztere in günstiger Sehweite erscheinen zu lassen, ist die untere Fläche des Prismas als Kugelfläche abgeschliffen. Als Zeiger für die Kreisablesung dient der Faden des Objektivdiopters.

Für die Höhenmessung kann man sich des von *Sartorius* in Göttingen konstruierten Gefällmessers Fig. 198 bedienen,

Fig. 198.

der als Visiervorrichtung ein einfaches Diopter trägt. Der Höhenkreisbogen ist mit dem Instrument fest verbunden, seine

Alhidade d durch einen geänderten Knopf e drehbar. Eine kleine Röhrenlibelle, die an den Bewegungen der Alhidade teilnimmt, spielt ein, sobald die letztere Null angibt und die Visierachse horizontal steht. Durch eine Öffnung k der Röhre wird mit Hilfe eines schräggestellten Spiegels die Libelle dem vor dem Okular befindlichen Auge sichtbar. Beim Einstellen eines Zieles kann somit auch die Libelle zum Einspielen gebracht werden, worauf die Ablesung den Höhenwinkel gibt. Zur Messung der Neigung des Meßbandes wird das Instrument auf den hinteren Meßbandstab gesetzt und nach einer auf dem vorderen Stab in gleicher Höhe angebrachten Zielscheibe visiert. Hierauf wird der Gefällmesser mit der Bussole vertauscht und der Richtungswinkel gemessen.

Durch einen Kompaß-Meßbandzug verbindet man zwei Stationspunkte, deren Lage schon bekannt ist. Die Einfachheit des Verfahrens besteht darin, daß alle Seiten des Zuges, schief gemessen, gleich 20 m sind. Zur Berechnung der horizontalen Entfernungen und der Höhenunterschiede hat man demnach, wenn α den Neigungswinkel des Meßbandes bezeichnet,

$$D = 20 \cos \alpha \quad \text{und} \quad h = 20 \sin \alpha .$$

Man benutzt hierbei eine Tafel der Werte der trigonometrischen Funktionen, wie sie jede Logarithmentafel enthält. Sehr bequem ist auch: *O. Seiffert*, Vierstellige polygonometrische Tafeln, Braunschweig 1907.

§ 123. Das Entwerfen der Karte.

Von Berechnungsarbeiten ist nur die Ermittlung der horizontalen Entfernungen und der Höhen auszuführen, die in den Tabellen S. 294/295 bereits enthalten ist. Im übrigen geschieht die weitere Bearbeitung der Messung in der Regel auf graphischem Wege.

Die Kartierung beginnt mit dem Auftragen der gegebenen Dreieckspunkte. Für die durch Rückwärtseinschneiden bestimmten Stationspunkte hat man besondere Vollkreis-Transporteure mit drei Alhidadenlinealen konstruiert, zwischen deren Kanten die gemessenen Winkel eingestellt werden können. Wird das Instrument auf dem Papier verschoben, bis die drei Kanten durch

die entsprechenden Festpunkte gehen, so bezeichnet der Mittelpunkt des Kreises die Lage des Stationspunktes. Ist noch ein dritter Winkel als Probe gemessen, so wird dieser nach der Bestimmung des Punktes eingestellt und mit der Karte verglichen.

Man kann auch die vier gemessenen Strahlen auf Pauspapier auftragen und letzteres auf der Karte verschieben, bis die vier Linien durch die vier Punkte hindurchgehen. Dieses Verfahren ermöglicht mithin eine Ausgleichung der Messungen.

Auch die Polygon- und Bussolenzüge werden unter Benutzung eines Transporteurs auf Pauspapier aufgetragen und hierauf zwischen die beiden gegebenen Endpunkte eingeschaltet. Man bestimmt zunächst den mittelsten Punkt des Zuges derartig, daß die beiden Endpunkte um gleiche und möglichst geringe Beträge von ihrer Sollage abweichen. Hierauf werden die mittleren Punkte der beiden Halbzüge bestimmt usw.

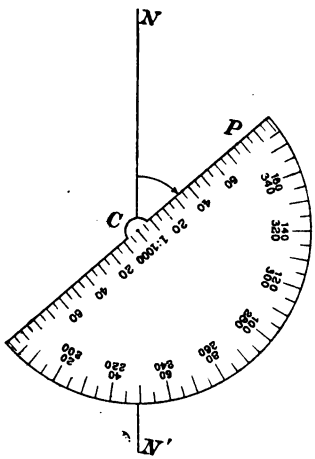


Fig. 199.

Nachdem alle Stationspunkte kartiert sind, ist für jeden die Nullrichtung einzutragen, d. i. diejenige Richtung der Visur, für die am Horizontalkreise Null abgelesen wurde. Diese Linie dient als Ausgangsrichtung für die Eintragung der Strahlen einer Station. Hierzu wird ein *Strahlenzieher* von der Form des in Fig. 199 abgebildeten benutzt, dessen Teilung linksläufig beziffert ist und der zugleich das Abtragen der Entfernungen zuläßt. Ist C eine Station, CN deren Nullrichtung, so wird der Strahlenzieher mit seinem Zentrum auf C gelegt, mit einer Nadel befestigt und der abzusetzende Winkel auf die Verlängerung CN' der Nullrichtung eingestellt. An der Längenteilung kann dann in der gemessenen Entfernung sofort der gesuchte Punkt gefunden und durch einen Nadelstich bezeichnet werden. In Fig. 199 ist der Punkt P durch den Winkel $49^0\ 20'$ und die Entfernung 78,3 bestimmt.

Als Beispiel ist in Fig. 200 die Kartierung der S. 294

aufgenommenen Punkte dargestellt. Die Station V und die beiden Wechselpunkte w_9 und w_{10} sind durch Auftragen des Bussolenzuges gefunden worden, und aus den Kreisablesungen

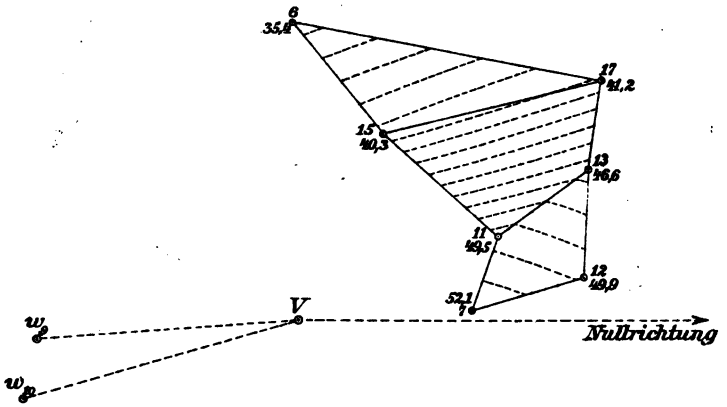


Fig. 200.

für die letzteren beiden Punkte ergab sich die Nullrichtung. Hiermit sind die sieben Punkte des Feldbuches kartiert und nach der Feldskizze zu Dreiecken und Vierecken verbunden. Endlich wurden nach S. 209 die Höhenkurven konstruiert.

In Fig. 201 ist eine größere tachymetrische Theodolit-Aufnahme wiedergegeben, deren Grundlage ein Polygonzug bildete. Da auf die Auswahl der Dreiecke und Vierecke große Sorgfalt verwendet wurde, so bedurfte es nur geringer Abrundungen, um die Höhenkurven in die vorliegende Gestalt zu bringen.

§ 124. Meßtischtachymetrie.

Für tachymetrische Aufnahmen mit dem Meßtisch ist die Kippregel mit einer der früher geschilderten Vorrichtungen zur Messung von horizontalen Entfernungen und von Höhenunterschieden zu versehen. Da diese unmittelbar auf dem Felde gebraucht werden, so ist hier eine selbsttätige Reduktion des Lattenabschnittes sehr erwünscht, und es ist deshalb anzunehmen, daß die Konstruktion von *Hammer* sich hier einbürgern wird. Bisher wurde fast nur der einfache *Reichenbach*sche Distanzmesser angewendet, bei dem die gewöhnliche Kippregel lediglich

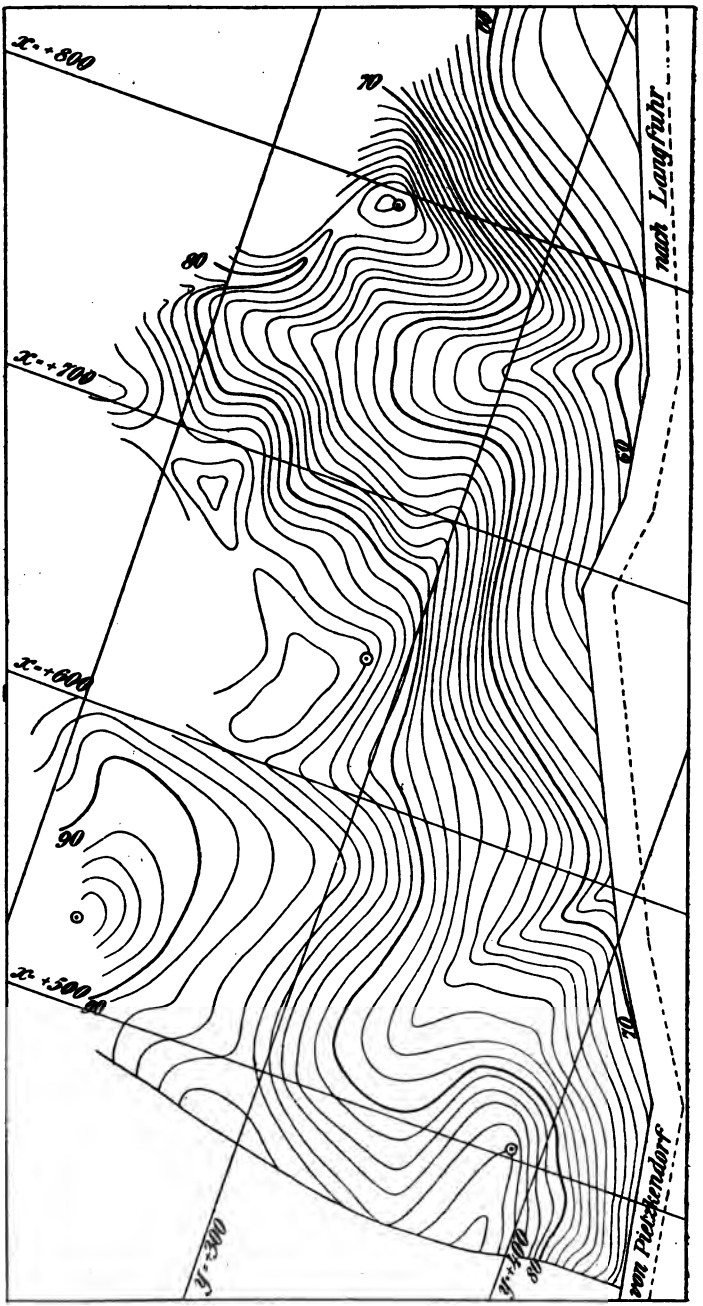

x = +800
x = +700
x = +600
x = +500
y = 300
y = 400
70
80
90
60
nach Langfuhr
von Pietzkendorf

Fig. 201.

mit einem Höhenkreis und mit Distanzfäden zu versehen ist. Fig. 202 zeigt eine tachymetrische Kippregel, die nach *Voglers* Angaben von dem Mechaniker *Rosenberg* in Berlin konstruiert wurde. Die Alhidade des Höhenkreises ist mit einer besonderen Libelle versehen, so daß die Messung der Zenitdistanzen von der nicht zu vermeidenden geringen Neigung der Meßtischplatte

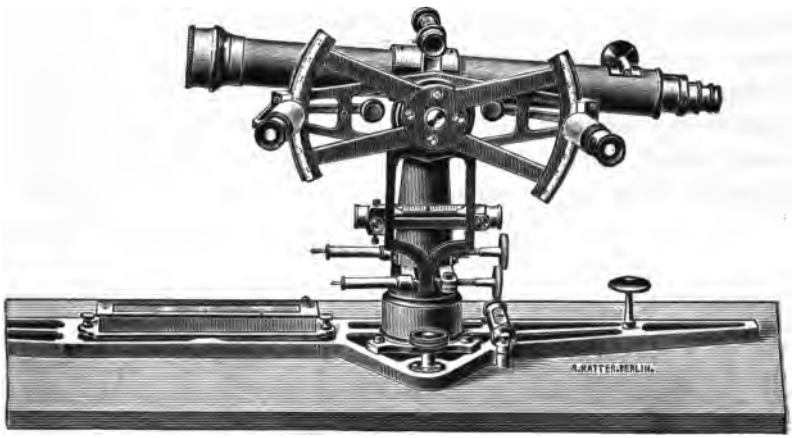


Fig. 202.

unabhängig ist. Von besonderem Wert ist das geringe Gewicht dieser Kippregel, das durch die hohle oder durchbrochene Form der einzelnen Teile erzielt wird. Eine Kippschraube zum Lotrechtstellen der Visierebene vor jeder Fernrohreinstellung ist im Vordergrunde sichtbar.

Zur Justierung der Querlibelle ist eine Reiterlibelle für die Kippachse vorhanden. Der Orientierkompaß, der schon bei der geometrischen Meßtischaufnahme gute Dienste leistete, ist hier noch weniger zu entbehren.

Das Stationieren für die tachymetrische Meßtischaufnahme bezweckt die Orientierung des Meßtisches auf einem beliebigen Geländepunkt und die Bestimmung des letzteren auf dem Meßtischblatt. Diese Aufgabe wird am bequemsten durch die Methoden der trigonometrischen Punkteinschaltung, namentlich des Rückwärtseinschneidens, gelöst, die allerdings übersichtliches Gelände voraussetzen. Das Stationieren mit Hilfe eines Polygon-

zuges muß vor der Geländeaufnahme erfolgen, da eine Verteilung der Abschlußfehler erforderlich ist.

Für tachymetrische Aufnahmen gelangt auch der *Bussolenzug mit Springständen* zur Anwendung, für den die Topographie die Bezeichnung *Lattenüberschlag* eingeführt hat. Beginnt der Zug auf einem Festpunkt A (Fig. 203), der auf dem Meßtischblatt in a kartiert ist, so wird der Tisch hier zentriert und orientiert und bei einspielender Magnetnadel längs der Linealkante eine Orientierungslinie gezogen. Hierauf wird ein beliebig gewählter Wechselpunkt W_1 nach Richtung, Entfernung und Höhe bestimmt und eingetragen. Wird nun der Meßtisch nach einem neuen Stationspunkt S_1 gebracht und mit dem Kompaß orientiert, so kann sofort die Richtung $w_1 W_1$ angegeben werden, auf der der Stationspunkt s_1 liegen muß. Durch Messung der Entfernung $S_1 W_1$ und Abtragen derselben von w_1 aus ergibt sich s_1. Mit einem neuen Wechselpunkt W_2 wird das Verfahren fortgesetzt, bis man zum Endpunkt B des Zuges gelangt, dessen Neubestimmung mit der schon gegebenen Lage des Punktes übereinstimmen soll. Die Verteilung des Abschlußfehlers erfolgt wieder auf graphischem Wege.

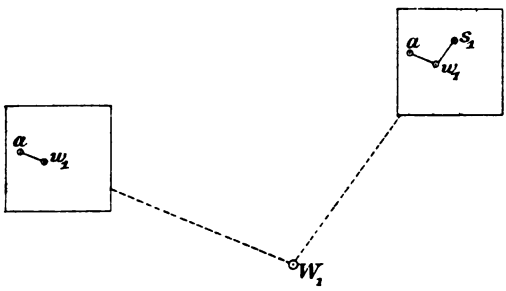


Fig. 203.

Die Geländepunkte werden bei der Einzelaufnahme unmittelbar im Felde auf dem Meßtischblatt konstruiert, jedoch ist es auch hierbei durchaus nötig, alle Ablesungen für die nochmalige häusliche Prüfung der Entfernungen und Höhen in einem Feldbuch niederzuschreiben. Auf Grund der ermittelten Höhen erfolgt im Felde auch zugleich die Konstruktion der Höhenkurven. Hierin besteht ein wesentlicher Vorzug der Meßtischaufnahme vor der Theodolitaufnahme; denn während bei der letzteren die Kurven lediglich nach den aufgenommenen Punkten und an der Hand der im Felde gezeichneten Skizzen

entworfen werden, entstehen bei der ersteren die Kurven im Anblick des Geländes unter fortwährender Vergleichung mit der Wirklichkeit. Man ist infolgedessen in der Lage, die Richtigkeit der Geländewiedergabe Schritt für Schritt zu prüfen und durch Ergänzungsmessungen die Zeichnung sofort zu korrigieren. Die ganze Karte wird auf dem Felde hergestellt, die häusliche Arbeit beschränkt sich anf das Ausziehen mit Tusche, das meistens am Abend jedes Arbeitstages erledigt wird, um dem Verwischen der Bleilinien vorzubeugen.

Ein Hauptnachteil der Meßtischaufnahme gegenüber der Theodolittachymetrie ist die Vermehrung der kostspieligen Feldarbeit, die hier auch noch in hohem Maße von der Witterung abhängig ist. Auch ist das starre Festhalten an dem einmal gewählten Maßstabe sehr lästig, wenn die Geländeeinzelheiten eine Änderung des Kartenmaßstabes wünschenswert erscheinen lassen. Dazu kommt die Schwerfälligkeit der Stationierung in nicht übersichtlichem Gelände, in dem die trigonometrische Punkteinschaltung nicht anwendbar ist.

15. Kapitel.

Die Topographie.

§ 125. Topographisch-tachymetrische Aufnahmen.

Die topographischen Aufnahmen bezwecken die Herstellung von Karten kleineren Maßstabes 1 : 10000 bis 1 : 25000, die die Situation und die Höhen gleichzeitig zur Darstellung bringen und für militärische Zwecke, für die erste Projektierung von Ingenieurarbeiten und auch für den Touristenverkehr bestimmt sind. Diesen Anforderungen entsprechend sollen die topographischen Karten ein getreues Bild des Geländes geben und namentlich alle diejenigen Gegenstände enthalten, die zum Wiedererkennen des Geländes, also zur Orientierung nach der Karte, geeignet sind.

Die Aufnahme topographischer Karten erfolgt der Hauptsache nach durch eine Skizzierung des Geländes nach dem Augenschein, die jedoch durch Punktbestimmungen nach den Methoden

der Tachymetrie unterstützt wird. Es ist also die topographische Karte nur noch zum Teil ein Produkt wirklicher Messung, während sie in erster Linie durch unmittelbares Zeichnen nach der Natur entsteht. Die Aufzeichnung erfolgt auf tachymetrischen Stationen, von denen aus auch eine Reihe von Punkten, sog. *Lattenpunkten*, durch Messung bestimmt wird, die die Grundlage der Karte bilden. Um das Aufnahmegebiet der einzelnen Stationen zu vergrößern, wendet man Distanzlatten von 5 m Länge mit Dezimeterteilung an, mit denen Entfernungen bis 500 m noch gemessen werden können. Es kann hierbei sowohl die Theodolittachymetrie als auch die Meßtischtachymetrie angewendet werden, jedoch geht aus dem Vorstehenden schon hervor, daß in den meisten Fällen die letztere mehr geeignet sein wird.

Wir betrachten deshalb zunächst die topographische Aufnahme mit dem Meßtisch. In der Regel wird man eine Triangulation mit Hilfe des Theodolits der Aufnahme zugrunde legen, so daß eine Reihe von Dreieckspunkten zur Verfügung steht, die nach ihren Koordinaten in das Meßtischblatt eingetragen werden. Obwohl die Anzahl der erforderlichen Stationspunkte wesentlich geringer als bei einer tachymetrischen Aufnahme ist, so werden die gegebenen Dreieckspunkte doch nicht genügen und weitere Punkte durch graphisches Einschneiden, nötigenfalls auch durch Polygon- oder Bussolenzüge bestimmt werden müssen.

Einzelne Lattenüberschläge dürfen nur zur Bestimmung von Hilfs- oder Nebenstationen ausgeführt werden.

Für die Horizontalaufnahme des Geländes kommen die Eisenbahnen, Kunststraßen, Wege, Wasserläufe, die Grenzen der Bodenkulturarten, der Wälder, die Gehöfte und Ortschaften usw. in Betracht. Politische und Eigentumsgrenzen, mit Ausnahme der Landesgrenzen, werden für die Zwecke der topographischen Karten meistens entbehrlich sein. In den Wäldern sind außer den Gestellen die Gräben und Waldwiesen, sowie alle sonstigen Objekte aufzunehmen, die zur Orientierung dienen können. Da bei dem kleinen Maßstabe topographischer Karten nicht alles dargestellt werden kann, so ist der Topograph gezwungen, zur Vermeidung von Undeutlichkeiten eine Auswahl nach dem Grade der Wichtigkeit zu treffen. Namentlich in Ortschaften ist es

notwendig, kleine Bauwerke wegzulassen und sich auf das zu beschränken, was ohne Überbürdung der Karte richtig dargestellt werden kann.

Die Höhenaufnahme bezweckt auch hier die Wiedergabe des Geländes durch Höhenkurven.

Die Arbeit auf einer Station beginnt mit einer Rekognoszierung der Umgebung derselben, bei der der Topograph zugleich eine Skizze aller aufzunehmenden Objekte und der Höhenverhältnisse des Geländes entwirft. Auch werden hierbei alle diejenigen Punkte ausgesucht, die tachymetrisch nach Richtung, Entfernung und Höhe aufgenommen werden sollen. Die Auswahl dieser Lattenpunkte für die Horizontalaufnahme wird auf die wichtigsten Knickpunkte und Kreuzungspunkte der einzelnen Linien führen; bei Häusern und Gehöften werden einzelne Haus- oder Zaunecken, als Lattenpunkte aufgenommen, genügenden Anhalt für die Zeichnung gewähren.

Für die Höhenaufnahme haben die Lattenpunkte eine wesentlich andere Bedeutung als bei der rein tachymetrischen Aufnahme. Während sie dort die Eckpunkte von ebenen Dreiecken und windschiefen Vierecken bilden, dienen sie hier zur Festlegung der *Geripplinien*, d. h. derjenigen Linien, die den Rücken eines Kammes oder die Sohle eines Tales bezeichnen. Sind diese Linien ihrer Lage nach und einzelne ihrer Punkte der Höhe nach bekannt, so ist es leicht, mit ihrer Hilfe die Höhenkurven zu konstruieren. In Fig. 204 sind die Kammlinien und

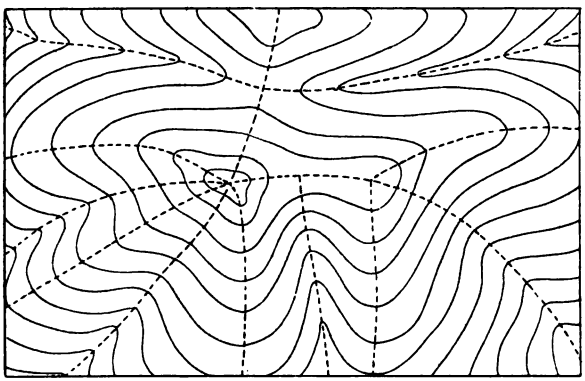


Fig. 204.

die Tallinien durch gerissene Linien kenntlich gemacht. Als Lattenpunkte sind die Endpunkte, die Kreuzungspunkte und die Gefällwechsel aufzunehmen.

Nachdem die Erkundung des Geländes beendet ist und die Lattenpunkte dem Lattenträger bezeichnet sind, erfolgt die Aufnahme derselben mit Hilfe der tachymetrischen Kippregel nach § 124, wobei auch die Höhen der einzelnen Punkte zu berechnen und einzutragen sind. Die Geripplinien sind hierdurch gegeben, und es können auf ihnen die Schnittpunkte mit den einzelnen Höhenkurven interpoliert werden. Gleichzeitig mit der Aufnahme der Lattenpunkte wird eine Reihe von Richtungen nach besonders gut hervortretenden Objekten gezogen, die teils zum Vorwärts- bzw. Seitwärtsabschneiden neuer Stationspunkte dienen können, teils aber auch lediglich die nachfolgende Zeichnung des Geländes erleichtern sollen. Die für den ersteren Zweck bestimmten Strahlen werden nach S. 174 durch Anschnitte am Rande des Meßtischblattes festgelegt.

Hiermit sind die eigentlichen Messungen erledigt, und es folgt nun der schwierigste Teil der Aufnahme, die Zeichnung des Geländes nach der Natur. Von den eingetragenen Lattenpunkten und Richtungslinien wird mittels Pauspapier eine Kopie hergestellt und diese auf einem kleinen Zeichenbrettchen befestigt. Hiermit geht der Topograph von Punkt zu Punkt und entwirft zunächst die Situation, alsdann die Höhenkurven. Da der Abstand der Lattenpunkte in der Zeichnung bei übersichtlichem Gelände nie mehr als 10 mm betragen, häufig aber bis auf 2 mm heruntergehen wird, so sind für die Zeichnung Anhaltspunkte genug vorhanden. Für die Situation kommen noch die nach einzelnen Objekten gezogenen Richtungslinien zu Hilfe; auch wird das Abschreiten von Entfernungen in schwierigen Fällen das Zeichnen erleichtern.

Ist so die Zeichnung schrittweise unter steter Prüfung des Vollendeten fertiggestellt, so kehrt der Topograph zum Meßtisch zurück und überträgt die Aufnahme auf das Meßtischblatt. Die Kopie wird in der Regel noch für andere Stationen Verwendung finden, wodurch die Wahrung der Einheitlichkeit der Zeichnung erleichtert wird.

Die Theodolittachymetrie kann die Meßtischaufnahme bei

topographischen Arbeiten nur schwer ersetzen. Da die Lage und Höhe der Lattenpunkte bei der ersteren erst nachträglich ermittelt wird, so liefert die Aufzeichnung des Geländes lediglich Skizzen, aus denen zu Hause die Karte entworfen wird. Es bleibt hierbei nichts übrig, als die Lattenpunkte derartig dicht aufzunehmen, daß die Karte der Hauptsache nach aus diesen Punkten konstruiert werden kann und die Zeichnungen nur als Ergänzungen anzusehen sind. Es wird somit eine solche topographische Aufnahme sich wenig von einer rein tachymetrischen Aufnahme unterscheiden.

§ 126. Topographische Karten.

Soweit die Übersichtlichkeit und Deutlichkeit es zuläßt, wird auch in topographischen Karten die Situation maßstäblich gezeichnet; Abweichungen von dieser Regel werden jedoch bei denjenigen wichtigen Objekten eintreten müssen, die bei maßstäblicher Zeichnung nicht genügend hervortreten. So werden namentlich Wege und Eisenbahnen durch besondere Signaturen deutlich hervorzuheben sein. Die verschiedenen Bodenkulturarten, mit Ausnahme des Ackerlandes, werden in farbigen Karten durch ein passend gewähltes Kolorit, in schwarz gezeichneten Karten durch charakteristische Zeichen angedeutet.

Fig. 205 gibt einen Ausschnitt aus einem Meßtischblatt der Preußischen Landesaufnahme im Maßstab 1:25000 wieder. Die Signaturen der Eisenbahn, der Chausseen und der übrigen Wege treten deutlich hervor; es ist jedoch zu erwähnen, daß infolge der großen Breite dieser Signaturen die neben ihnen liegenden Objekte nicht maßstäblich dargestellt werden können. Auch die Signaturen der Laub- und Nadelwälder, der Wiesen, Gärten usw. sind so treffend gewählt, daß sie einer Erläuterung nicht bedürfen. Die in kräftigen Linien ausgezogenen Höhenkurven schreiten von 20 zu 20 m fort, während die runden Zehner der Höhen durch feine Linien bezeichnet sind. Feine Linien, die in Abständen von 1 cm kleine Unterbrechungen zeigen, geben Höhenunterschiede von 5 m an, und letztere werden je nach Bedarf durch gerissene Linien in zwei oder vier Teile geteilt. An Wegekreuzungen und auf einzelnen Kuppen sind die Höhen, auf Dezimeter abgerundet, angegeben.

Fig. 205.

So wichtig und unentbehrlich die Höhendarstellung des Geländes durch Höhenkurven für technische Zwecke ist, so genügt sie für topographische Karten doch nicht immer, da sie die Geländeformen nicht in jedem Falle auf den ersten Blick erkennen läßt. Von den vielen Methoden, die Höhen und Tiefen durch Anwendung besonderer Hilfsmittel plastisch erscheinen zu lassen, hat die des Majors *Lehmann* (1799) am meisten Verbreitung gefunden, bei der die Schattenwirkung einer lotrechten Beleuchtung durch Schraffen wiedergegeben wird. Die Schattierung ist um so dunkler darzustellen, je steiler das Gelände ist; da jedoch Neigungen von mehr als 45° für militärische Zwecke, die *Lehmann* am nächsten lagen, keine Bedeutung mehr haben, so werden nur Böschungswinkel bis zu dieser Größe unterschieden. Die erste Skala der Fig. 206 zeigt die Strichstärken

der *Lehmann*schen Manier bei verschiedenen Neigungen des Geländes. Die Striche werden in die Richtung des stärksten Gefälles, also senkrecht zu den Höhenkurven gesetzt.

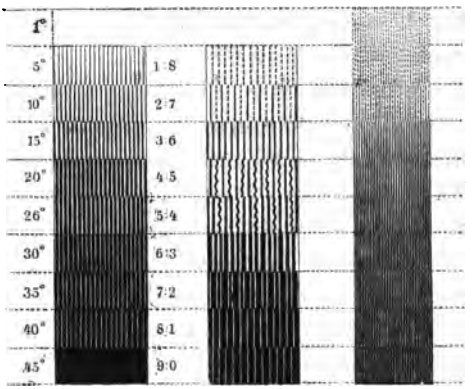


Fig. 206.

Wenn *Lehmann* hiermit eine ausgezeichnete plastische Wirkung erzielte, so versuchten andere, diese Methode derartig zu vervollkommnen, daß man direkt die Neigungswinkel des Geländes ablesen konnte. Diesem Wunsche ist die ebenfalls in

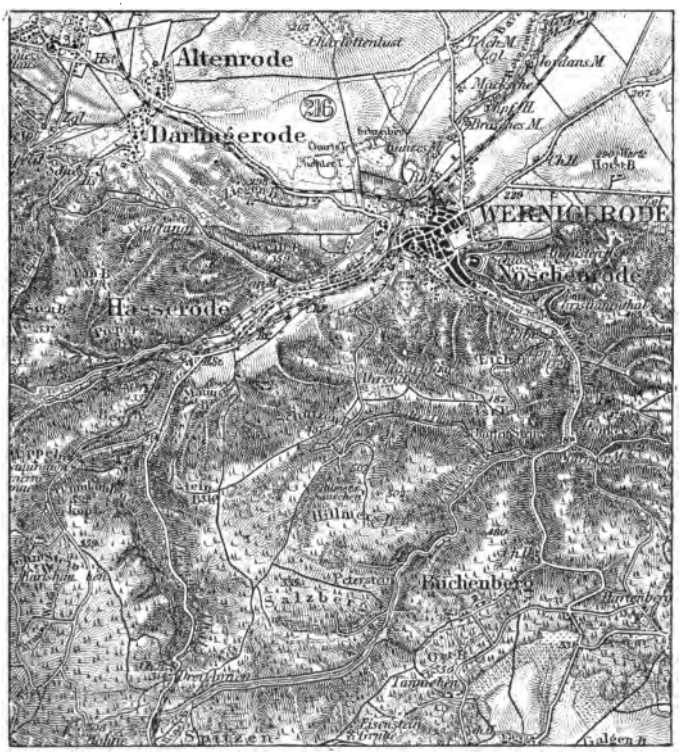


Fig 207.

Fig 206 dargestellte *Müfflings*sche Skala entsprungen, die jedoch noch höhere Ansprüche an die Fertigkeit des Zeichners stellt. Für die von der Preußischen Landesaufnahme im Maßstabe 1:100000 herausgegebene *Karte des Deutschen Reiches* ist die dritte Skala in Fig. 206 angenommen worden, bei der wenigstens Neigungen von 5° und 10°, der militärischen Wichtigkeit entsprechend, besonders hervorgehoben sind. Von der plastischen Wirkung der Bergstrichzeichnung gibt der Ausschnitt aus der Karte des Deutschen Reiches in Fig. 207 ein Bild.

Anstatt der mühsamen und schwierigen Bergstrichzeichnung wird in neuerer Zeit häufig die Methode der *Schummerung* angewendet, bei der die verschiedenen Neigungen des Geländes durch dunkleres oder helleres Kolorit (Sepia) mit allmählichem Übergang dargestellt werden. Wenn auch die von *Lehmann* angestrebte Präzision der Wiedergabe hierbei verloren geht, so wird doch ein anschauliches und leicht ausführbares Bild erzielt. Gegenüber der Bergstrichzeichnung ist noch der Vorzug zu erwähnen, daß die Linien der Situation wesentlich weniger verdeckt werden.

§ 127. Flüchtige Aufnahmen auf Reisen.

Reiseaufnahmen bezwecken in der Regel die Herstellung bzw. Vervollständigung *geographischer Karten*, deren Maßstäbe im Verhältnis zu denen topographischer Karten klein sind, so daß auch die topographischen Aufnahmemethoden für die Reise noch weiterer Vereinfachung fähig sind.

Zur Ausführung einer Triangulation wird sich auf Reisen selten Gelegenheit finden, Bussolenzüge werden hier stets die Grundlage der Aufnahme bilden. An die Stelle der direkten oder indirekten Entfernungsmessung tritt im günstigsten Falle das Abschreiten, in der Regel jedoch die Messung der Marschzeiten, wobei die Geschwindigkeiten so gut als möglich geschätzt werden, um alle Marschzeiten auf gleiche Geschwindigkeit reduzieren zu können. Zur Umwandlung des Zeitmaßes in Längenmaß dienen Nachmessungen einzelner Strecken mit Hilfe eines Meßrades von bekanntem Umfang, dessen Umdrehungen selbsttätig registriert werden, oder auch mit Hilfe eines Meßbandes.

Zur Bestimmung der Wegrichtung bedient man sich eines kleinen Taschenkompasses, an dem die Richtungen bis auf 5° genau abgelesen (gepeilt) werden können. Genauere Peilungen erreicht man mit einem Diopterkompaß, etwa der Bussole von *Schmalkalder* (Fig. 197, S. 296), die auf einem Stock benutzt wird. Die Höhenaufnahme erfolgt lediglich durch Aneroidablesungen in Verbindung mit Temperatur- und Feuchtigkeitsmessungen.

Eine derartige Aufnahme des Reiseweges bezeichnet man als ein *Itinerar*.

Hand in Hand hiermit geht die Aufnahme des Geländes zu beiden Seiten des Reiseweges. Nach allen wichtigen Objekten werden mit Hilfe des Kompasses die Richtungswinkel gemessen und die Entfernungen geschätzt, um auch durch einmaliges Peilen diese Objekte festzulegen. Vorteilhafter ist es, wenn sich die Peilungen auf andern Punkten des Weges wiederholen lassen, da die Entfernungen aus den Schnitten genauer als durch Schätzung ermittelt werden können.

Im übrigen erfolgt die Aufnahme der Situation und Höhen durch Skizzen, deren Gerippe das Itinerar und die Kompaßpeilungen bilden. Daß auf die Eintragung der Namen besonderes Gewicht zu legen ist, bedarf kaum der Erwähnung.

Für Detailaufnahmen kleinerer Gebiete werden je nach dem vorliegenden Zweck auch die geometrischen und tachymetrischen Messungsmethoden, sowie Nivellements und trigonometrische Höhenmessungen in Frage kommen. Jedoch können diese Messungen nur ausnahmsweise zur Anwendung gelangen, in der Regel werden auch für solche Aufnahmen Kompaßpeilung, Schrittmaß und Skizzierung genügen. Als wichtiges Hilfsmittel ist noch die Photogrammetrie zu nennen, die im nächsten Kapitel eingehend behandelt wird.

Von der speziellen topographischen Literatur nennen wir nur *Bruno Schulze*, Das militärische Aufnehmen, Leipzig und Berlin 1903, worin die topographischen Arbeiten der Preußischen Landesaufnahme behandelt werden. Daselbst finden sich auch weitere Literaturangaben.

16. Kapitel.

Die Photogrammetrie.

§ 128. Grundaufgaben der Photogrammetrie.

Die Photogrammetrie beschäftigt sich, soweit sie für die Geodäsie in Frage kommt, mit der Herstellung topographischer Karten vermittelst photographischer Aufnahmen.

Im folgenden nehmen wir an, daß die photographischen Aufnahmen genau perspektivische Bilder liefern, so daß die Aufgabe der Photogrammetrie darin besteht, aus perspektivischen Geländebildern die Lage und Höhe der Geländepunkte zu ermitteln.

Wir setzen zunächst eine lotrechte Bildebene (Fig. 208) voraus und bezeichnen mit O das perspektivische Zentrum des Bildes. Ein von O auf die Bildebene gefälltes Lot trifft die letztere im *Hauptpunkte* H des Bildes und der Abstand $OH = d$ wird als *Bildweite* bezeichnet. Die durch den Hauptpunkt gelegte Horizontale ist die *Bildhorizontale.*

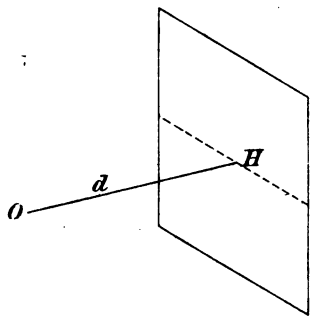


Fig. 208.

Der Hauptpunkt, die Bildhorizontale und die Bildweite sind die Konstanten des Bildes und müssen für die photogrammetrische Verwertung des letzteren als bekannt vorausgesetzt werden.

Für beliebige Bildpunkte lassen sich leicht Horizontal- und Höhenwinkel, deren Scheitel in O liegen, konstruieren. In Fig. 209 ist die Bildebene mit dem Zentrum im Aufriß und Grundriß dargestellt. Greifen wir für einen beliebigen Bildpunkt P die Abszisse x ab, so läßt sich sofort der Horizontalwinkel α, den die Richtungen OP und OH einschließen, zur Darstellung bringen. Wird an OP' die Ordinate y angetragen, so kann auch der Höhenwinkel β in wahrer Größe abgebildet werden.

Sollen die Winkel α und β im Gradmaß angegeben werden,

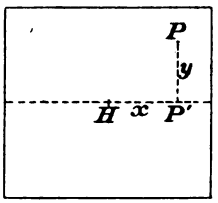
so müssen die Koordinaten x und y des Punktes P gemessen werden und es ergibt sich dann

(1) $$\text{tang } \alpha = \frac{x}{d}$$

und

(2) $$\text{tang } \beta = \frac{y}{d} \cos \alpha.$$

Ist die Bildebene geneigt, so muß zur Konstruktion oder Berechnung der beiden Winkel α und β auch noch der Neigungswinkel ω der Bildebene gegen die Lotrichtung bekannt sein, der gleich dem Neigungswinkel der Geraden OH ist. Projizieren wir in Fig. 210 H und P auf die Horizontalebene, wodurch sich H' und P' ergeben, so ist $\sphericalangle H'OP' = \alpha$ der gesuchte Horizontalwinkel. Für die Konstruktion stellen



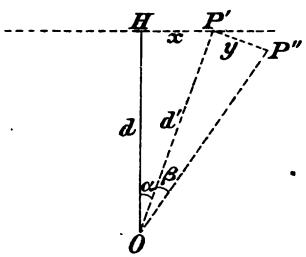


Fig. 209.

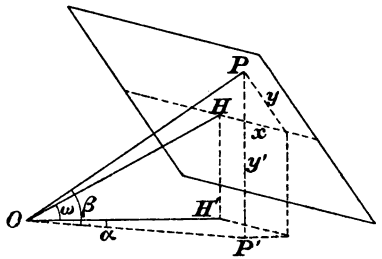


Fig. 210.

wir Fig. 210 wieder im Aufriß und Grundriß dar. Nach Fig. 211 liegt im Aufriß der Punkt P' in (P), und es ist $P(P) = y'$ der Abstand des Punktes P von der durch O gehenden Horizontalebene. Mit Hilfe von $O(P)$ und der Abszisse x läßt sich der Grundriß konstruieren und dieser gibt sofort den Winkel α. Ebenso läßt sich auch der Höhenwinkel β, wie Fig. 211 zeigt, leicht konstruieren.

Zur numerischen Berechnung von α und β bei geneigter Bildebene haben wir

$$O(P) = d \cos \omega - y \sin \omega$$
$$y' = d \sin \omega + y \cos \omega,$$

folglich ist

(3) $$\text{tang}\,\alpha = \frac{x}{d\cos\omega - y\sin\omega}$$

und

(4) $$\text{tang}\,\beta = \frac{(d\sin\omega + y\cos\omega)}{d\cos\omega - y\sin\omega}\cos\alpha.$$

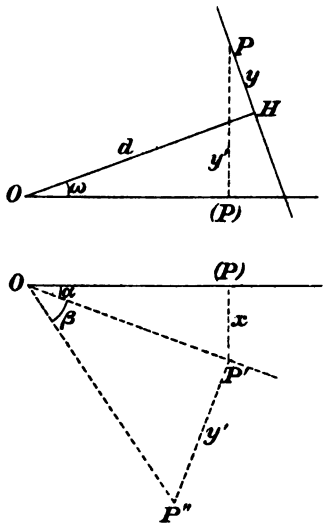


Fig. 211.

Um die Gl. (3) und (4) in eine für logarithmische Rechnung bequeme Form zu bringen, setzen wir

$$d = m\cos M \quad \text{und} \quad y = m\sin M,$$

so daß aus

(5) $$\text{tang}\,M = \frac{y}{d}$$

der Hilfswinkel M berechnet werden kann. Hiermit erhalten wir

(6) $$\text{tang}\,\alpha = \frac{x}{m\cos(M+\omega)} = \frac{x\cos M}{d\cos(M+\omega)}$$

und

(7) $$\text{tang}\,\beta = \text{tang}\,(M+\omega)\cos\alpha.$$

Man kann somit nach den vorstehenden Konstruktionen und Formeln aus perspektivischen Bildern, wenn deren Konstanten bekannt sind, Horizontal- und Höhenwinkel graphisch oder numerisch ermitteln.

Sind mehrere perspektivische Bilder mit verschiedenen Zentren O_1, O_2... gegeben, so müssen zur photogrammetrischen Verwendung der Bilder außer der gegenseitigen Lage der Punkte O_1, O_2... auch die Richtungen O_1H_1, O_2H_2... bekannt sein; man sagt in diesem Falle, daß die Bilder *orientiert* sind.

Mit der Orientierung der Bilder sind auch die aus den letzteren ermittelten Horizontalwinkel orientiert; es können somit Geländepunkte, die auf mehreren Bildern gleichzeitig abgebildet sind, nach der Methode des Vorwärtsabschneidens entweder graphisch oder numerisch bestimmt werden. Ist auf diese Weise von den beiden Punkten O_1 und O_2 aus die Lage eines Geländepunktes P gefunden, so ergeben sich auch die Entfernungen $O_1P = s_1$ und $O_2P = s_2$ und aus diesen und den Höhenwinkeln β_1 und β_2 kann man die Höhenunterschiede

(8) $$h_1 = s_1 \operatorname{tang} \beta_1 \quad \text{und} \quad h_2 = s_2 \operatorname{tang} \beta_2$$

berechnen. Bezeichnen wir die Höhen von O_1, O_2 und P mit H_1, H_2 und H, so ist

(9) $$H = H_1 + h_1$$

und auch

(9*) $$H = H_2 + h_2,$$

worin eine Probe für die richtige Bestimmung des Punktes P gegeben ist.

Bei lotrechten Bildebenen kann man die trigonometrische Höhenberechnung auch umgehen, da nach Fig. 209, S. 313

(10) $$h_1 = s_1 \frac{y_1}{d_1'} \quad \text{und} \quad h_2 = s_2 \frac{y_2}{d_2'}$$

ist.

Die in der doppelten Höhenberechnung liegende Probe ist nicht immer zuverlässig; besser ist es, wenn aus einem dritten orientierten Bilde ein dritter geometrischer Ort für den Punkt P ermittelt wird.

§ 129. Das Photogrammeter.

Zur Aufnahme der Geländebilder kann jede mit einem guten Objektiv ausgestattete photographische Kamera benutzt werden, jedoch sind in diesem Falle noch besondere Hilfsinstrumente zur Bestimmung der Konstanten und zur Orientierung der Bilder erforderlich. Eine speziell für photogrammetrische Zwecke hergerichtete Kamera bezeichnet man nach *Laussedat* als *Photogrammeter*. Ein solches Instrument besteht für Geländeaufnahmen in der Regel aus einer kleinen Kamera, deren konstante Bildweite gleich der Brennweite des Objektivs ist, und die auf dem Stativ um eine Stehachse gedreht werden kann. Um höher oder tiefer liegende Objekte bei lotrechter Bildebene aufnehmen zu können, läßt sich das Objektiv in einem vertikalen Rahmen verschieben, wobei seine Stellung jedesmal an einer Skala abgelesen werden kann. Zur Orientierung der Aufnahmen ist auf dem Instrument in der Regel ein Kompaß befestigt.

Beim Gebrauch des Photogrammeters wird vor jeder Aufnahme die Ebene des die Platten aufnehmenden Rahmens lot-

recht gestellt. Hierzu bedient man sich eines Lotes oder eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete mit einer Röhrenlibelle versehen ist, und dessen andere Kathete an den Rahmen angelegt wird. Auf dieselbe Weise sind die Rahmenseiten lotrecht bzw. wagrecht zu stellen. Für die Verwertung der Bilder ist es bequem, wenn im Innern des Rahmens zwei Marken angebracht sind, deren Verbindungslinie der oberen und unteren Rahmenseite parallel ist, und die sich bei der Aufnahme auf der Platte abzeichnen.

Ist die Bildweite konstant, und bewegt sich das Objektiv in einer lotrechten Geraden, so genügt die einmalige Bestimmung der ersteren und die Ermittlung des Bildhauptpunktes in bezug auf die beiden Rahmenmarken bei beliebiger Höhe des Objektivs, die an der Skala abgelesen wird. Ist die Bildweite veränderlich, so ist die Konstantenbestimmung für jedes Bild besonders auszuführen. Wir behandeln den letzteren allgemeineren Fall.

Nachdem die Aufnahmen auf einer Station erledigt sind, werden mit der Bussole, oder mit einem an die Stelle der Kamera gesetzten Theodolit die Horizontalwinkel zwischen einzelnen Geländepunkten gemessen, die so verteilt sein müssen, daß jedes Bild wenigstens drei Geländepunkte enthält. Ferner sind auch die Höhenwinkel nach diesen Objekten zu ermitteln. Es ist hierbei jedoch zu beachten, daß entweder die Stehachse des Theodolits bei der Winkelmessung durch den vorderen Hauptpunkt des photographischen Objektivs gehen muß, oder bei zentrischer Aufstellung des Theodolits alle Winkel reduziert werden müssen.

Es seien auf einem Bilde die drei Objekte P_1, P_2, P_3 abgebildet, nach denen mit dem Theodolit oder der Bussole die drei Richtungen w_1, w_2, w_3 gemessen sind. Auf dem Bilde verbinden wir die beiden Marken, die uns die horizontale Richtung angeben, durch eine Gerade, projizieren die drei Bildpunkte auf dieselbe und ermitteln unter Annahme eines beliebigen Nullpunktes die drei Abszissen x_1^0, x_2^0 und x_3^0. Bezeichnen wir die auf den Hauptpunkt des Bildes bezogenen Abszissen desselben Punktes wie früher mit x_1, x_2 und x_3, so ist nach (1) § 128, S. 313

$$x_1 = d \operatorname{tang} \alpha_1$$
$$x_2 = d \operatorname{tang} \alpha_2 \tag{1}$$
$$x_3 = d \operatorname{tang} \alpha_3.$$

Hieraus ergibt sich

$$x_2 - x_1 = d(\operatorname{tang} \alpha_2 - \operatorname{tang} \alpha_1) = d \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\cos \alpha_2 \cos \alpha_1}$$

$$x_3 - x_2 = d(\operatorname{tang} \alpha_3 - \operatorname{tang} \alpha_2) = d \frac{\sin(\alpha_3 - \alpha_2)}{\cos \alpha_3 \cos \alpha_2}$$

oder

$$(2) \quad d = \frac{x_2 - x_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 = \frac{x_3 - x_2}{\sin(\alpha_3 - \alpha_2)} \cos \alpha_3 \cos \alpha_2.$$

Es ist aber

$$(3) \qquad x_2 - x_1 = x_2^0 - x_1^0, \quad x_3 - x_2 = x_3^0 - x_2^0$$

und

$$(3^*) \qquad \alpha_2 - \alpha_1 = w_2 - w_1, \quad \alpha_3 - \alpha_2 = w_3 - w_2;$$

wir setzen deshalb

$$(4) \quad \frac{x_2 - x_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{x_2^0 - x_1^0}{\sin(w_1 - w_1)} = m \text{ und } \frac{x_3 - x_2}{\sin(\alpha_3 - \alpha_2)} = \frac{x_3^0 - x_2^0}{\sin(w_3 - w_2)} = n$$

woraus m und n berechnet werden können, und erhalten aus Gl. (2)

$$(5) \qquad \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_3} = \frac{n}{m}.$$

Führen wir durch die Gleichung

$$(6) \qquad \frac{m}{n} = \operatorname{tang} \lambda$$

den Hilfswinkel λ ein, so wird nach (5)

$$\frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_3}{\cos \alpha_1 - \cos \alpha_3} = \frac{1 + \operatorname{tang} \lambda}{1 - \operatorname{tang} \lambda} = \operatorname{tang}(45^0 + \lambda),$$

oder

$$(7) \qquad \operatorname{cotang} \frac{\alpha_3 + \alpha_1}{2} = \operatorname{tang} \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2} \operatorname{tang}(45^0 + \lambda).$$

Da

$$(8) \qquad \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2} = \frac{w_3 - w_1}{2}$$

ist, so können aus

$$(9) \qquad \operatorname{cotang} \frac{\alpha_3 + \alpha_1}{2} = \operatorname{tang} \frac{w_3 - w_1}{2} \operatorname{tang}(45^0 + \lambda)$$

und aus (8) die Winkel α_3 und α_1 berechnet werden, womit nach (3*) auch α_2 bekannt ist.

Nach den Gleichungen (2) kann nun auch die Bildweite d ermittelt werden.

Berechnen wir nach (1) die drei Abszissen x_1, x_2, x_3, so ist die Lage der Ordinatenachse im Bilde bekannt.

Nun läßt sich auch die Lage des Hauptpunktes H leicht angeben. Wir berechnen mit Hilfe der gemessenen Höhenwinkel β_1, β_2 und β_3 nach Gl. (2) § 128, S. 313 die drei Ordinaten

$$y_1 = \frac{d \operatorname{tang} \beta_1}{\cos \alpha_1}$$

$$y_2 = \frac{d \operatorname{tang} \beta_2}{\cos \alpha_2}$$

$$y_3 = \frac{d \operatorname{tang} \beta_3}{\cos \alpha_3},$$

und indem wir diese auf dem Bilde von den Objekten aus in der Richtung der Ordinatenachse abtragen, sehen wir, um wieviel die durch die Marken bestimmte Horizontale parallel zu verschieben ist, um durch den Hauptpunkt zu gehen.

§ 130. Der Phototheodolit.

Das Bestreben, ein Instrument zu erhalten, mit dem sowohl die photogrammetrischen Aufnahmen, als auch die Orientierung derselben und die Bestimmung der Konstanten in möglichst vollkommener Weise ausgeführt werden können, führte zur Konstruktion des *Phototheodolits*. Von den verschiedenen Bauarten soll die von *Koppe* in Braunschweig herrührende und von der Werkstätte *Günther und Tegetmeyer* in Braunschweig ausgeführte näher behandelt werden, die die vielseitigste Verwendung zuläßt. Das in Fig. 212 abgebildete Instrument besteht aus einem Theodolit mit Höhenkreis und exzentrischem Fernrohr, oder einem Universalinstrument, und einer photographischen Kamera, die mit der Kippachse zentrisch verbunden werden kann. Das Universalinstrument zeigt keinerlei Abweichungen von der üblichen Einrichtung, so daß sein Gebrauch für geodätische und astronomische Zwecke in keiner Weise beeinträchtigt wird. Bei dem der hiesigen geodätischen Sammlung gehörigen Instrument sind die beiden Kreise, deren Durchmesser gleich 14 bzw. 12 cm ist, mit Nonien von 20″ Angabe versehen, während das Fernrohr

etwa 20fache Vergrößerung und eine Brennweite von rund 22 cm hat. Für tachymetrische Zwecke sind Distanzfäden vorhanden.

Die Kippachse wird durch einen konischen Ring K unterbrochen, der zur Aufnahme der Kamera bestimmt ist. Die

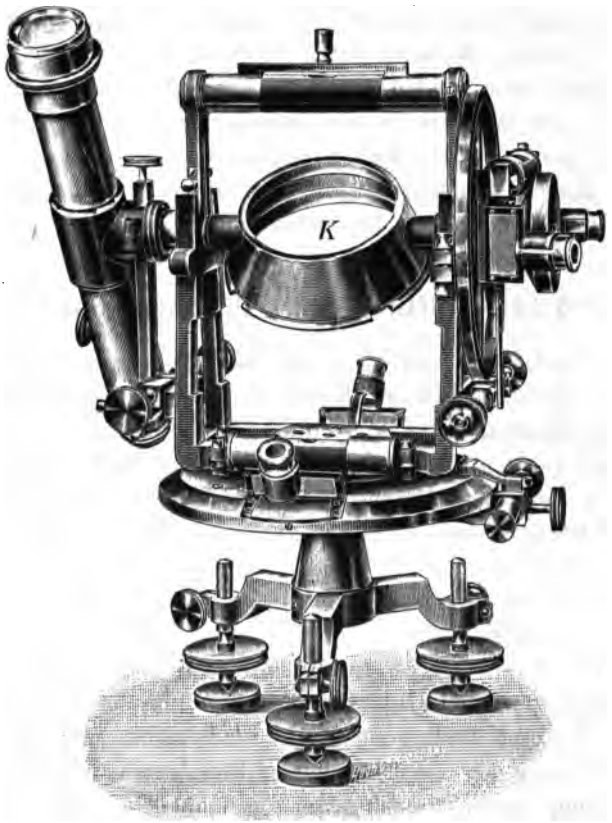


Fig. 212.

letztere die bis auf den Plattenrahmen vollständig aus Metall hergestellt ist und somit große Sicherheit für die Unveränderlichkeit der Bildweite bietet, wird mit ihrem mittleren Teil in den Ring eingesetzt und durch kleine, in die Ausschnitte des Ringes eingreifende Federn festgehalten. Eine Drehung der Kamera in dem Ringe wird durch einen Anschlag, der zugleich zur Justierung dient, verhindert. In Fig. 216, S. 325, die die

Kamera in einer anderen später zu erörternden Verbindung mit dem Theodolit zeigt, ist der Anschlag bei Q sichtbar. Der die Platte aufnehmende Rahmen wird bei den neueren Instrumenten durch einen Schieber verschlossen, dessen Federn die Platte gegen eine durch drei Schraubenköpfe unveränderlich hergestellte Auflagefläche drücken. Der Rahmen enthält in der Mitte der vier Seiten Marken, deren Verbindungslinien sich rechtwinklig schneiden, und die sich bei der Aufnahme auf der Platte abbilden. Das Objektiv ist ein Doppelanastigmat von *C. P. Goerz* in Schöneberg von 150 mm Brennweite.

Zu dem Instrument gehört eine Wechselkassette, die zwölf Platten im Format 10×10 cm aufnehmen kann.

§ 131. Justierung des Phototheodolits.

Die Justierung besteht in der Berichtigung des Theodolits und der photographischen Kamera. Man beginnt am besten mit der Beseitigung des Kollimationsfehlers und des Kippachsenfehlers, worüber in § 37, S. 84 das Nötige gesagt ist, und geht dann zur Berichtigung der Kamera über. Es sind von der letzteren bei lotrechter Stehachse die folgenden Bedingungen zu erfüllen:

1. Die Verbindungslinie der beiden seitlichen Rahmenmarken muß horizontal sein.

2. Bei wagrechter Fernrohrachse soll die optische Achse des photographischen Objektivs ebenfalls horizontal sein.

Ob die erste Bedingung erfüllt ist, erkennt man daran, daß bei Einstellung der einen seitlichen Rahmenmarke auf ein Ziel und Drehung des Instruments um die Alhidadenachse die andere Marke ebenfalls durch das Ziel gehen muß. Die Justierung erfolgt durch Drehung der am Kippachsenring befindlichen Schraube, gegen die sich der Anschlag der Kamera lehnt.

Vor der zweiten Justierung ist nach § 129, S. 316 die Bildweite und die Lage des Hauptpunktes zu bestimmen, der meistens nicht genau mit dem Schnittpunkt der beiden Markenverbindungslinien zusammenfallen wird. Den gefundenen Hauptpunkt bezeichnet man auf einer an die Stelle der Platte gesetzten Mattscheibe und stellt ihn auf ein Ziel ein. Hierauf

verschiebt man den Horizontalfaden des Fernrohrfadenkreuzes, bis er ebenfalls das Ziel trifft.

Wenn nun noch der Indexfehler des Höhenkreises durch Justierung der mit seiner Alhidade verbundenen Libelle beseitigt wird, so ist die Justierung des Instruments erledigt.

Bleibende Fehler. Eine Verschiebung des Bildhauptpunktes ist durch Verschiebung des Objektivs möglich, so daß der Hauptpunkt mit dem Schnittpunkt der Markenverbindungslinien zur Deckung gebracht werden kann. Es bietet jedoch die Berücksichtigung der abweichenden Lage des Hauptpunktes keine Schwierigkeit, so daß von dieser Justierung abgesehen werden kann.

Die Parallelstellung der Visierachse mit der Achse der Kamera ist am Instrument nicht vorgesehen; infolgedessen kann ein Kollimationsfehler der letzteren Achse vorhanden sein, der unter Umständen zu berücksichtigen ist, da die Orientierung der Bilder durch die Ablesungen am Horizontalkreise unrichtig wird. Der Fehler kann indessen, wie bei der Horizontalwinkelmessung, durch Aufnahme in beiden Fernrohrlagen eliminiert werden; auch kann aus solchen Aufnahmen die Größe dieses Kollimationsfehlers berechnet werden.

§ 132. Orientierung der Aufnahmen.

Zur Verwertung photogrammetrischer Aufnahmen ist es erforderlich, daß die gegenseitige Lage der Stationspunkte und die Richtung der optischen Achse der Kamera bekannt ist. Im einfachsten Falle werden nur zwei Stationen in den Endpunkten einer Grundlinie von bekannter Länge benutzt. Die Orientierung ist dann ohne weiteres gegeben, wenn bei der Aufnahme auf einer Station die andere mit abgebildet wird. Werden auf derselben Station noch weitere Aufnahmen gemacht, so sind auch diese orientiert, wenn sie mit der ersteren oder miteinander mindestens ein Geländeobjekt gemeinsam abgebildet enthalten. Diese Methode der indirekten Orientierung wird für Photogrammeter, die nicht mit Hilfsmitteln für Winkelmessung versehen sind, in Frage kommen. Ist mit dem Instrument eine Bussole verbunden, so wird diese bei jeder Aufnahme und bei

der Einstellung der optischen Achse auf den andern Endpunkt der Grundlinie abgelesen. Für letzteren Zweck wird in die Bildebene eine Mattscheibe eingesetzt, auf der der Hauptpunkt bezeichnet ist.

Beim Phototheodolit tritt an die Stelle der Bussolenablesung die Ablesung des Horizontalkreises. Ist der Kollimationsfehler der Kamera bekannt, so sind die Ablesungen zu korrigieren, damit sie die wirklichen Richtungen der optischen Achse angeben.

Größeren Aufnahmen wird in der Regel eine Triangulation zugrunde gelegt, durch die die einzelnen Stationspunkte bestimmt werden. Zur Orientierung der Aufnahmen auf direktem oder indirektem Wege dienen dann die von der Station aus sichtbaren Dreieckspunkte.

Die Einschaltung neuer Stationspunkte in ein gegebenes Dreiecksnetz kann mit Hilfe der photogrammetrischen Aufnahmen selbst erfolgen, aus denen die erforderlichen Horizontal- und Höhenwinkel entnommen werden. Namentlich die Methode des Rückwärtseinschneidens und die *Hansen*sche Aufgabe werden vielfach Anwendung finden.

Flüchtige Aufnahmen, z. B. auf Reisen, werden mitunter Gelegenheit zur Anwendung des *Lambert*schen Problems der acht bzw. sechs Punkte bieten, dessen Lösung in § 63 S. 141 bereits angeführt wurde. Werden auf vier beliebigen Stationen, deren gegenseitige Lage nicht bekannt ist, Aufnahmen gemacht, die mindestens vier Geländeobjekte gemeinsam enthalten, so lassen sich für jede Station die Richtungen nach diesen vier Objekten ermitteln und hiernach die acht Punkte bestimmen. Die Aufgabe vereinfacht sich, wenn die Aufnahmen mit Hilfe der Bussole orientiert werden; es genügen dann drei Stationen mit drei gemeinsamen Geländeobjekten.

§ 133. Die Ausmessung der Bilder.

Die Ermittlung der Koordinaten x und y erfolgt auf den Negativen, nachdem die Verbindungslinien der Marken mit einer feinen Nadel eingeritzt sind. Bequemer ist die Benutzung von Diapositiven, da letztere die der Wirklichkeit entsprechenden Beleuchtungswirkungen zeigen; Kopien auf Papier erleiden

durch das Fixieren stets Verzerrungen, die sie für genaue Messungen unbrauchbar machen. Man benutzt jedoch solche Kopien, um die auf verschiedenen Bildern liegenden zusammengehörigen Punkte auszusuchen und zu beziffern. Diese letztere Arbeit ist mit Schwierigkeiten verknüpft, die erst nach einiger Übung überwunden werden; *Laussedat* u. a. schlagen die Benutzung von Stereoskopbildern vor, die auf den einzelnen Stationen neben den eigentlichen Aufnahmen mit Hilfe einer kleinen stereoskopischen Kamera gewonnen werden.

Eine neue von *Koppe* eingeführte Methode zur Ausmessung der Bilder liefert unmittelbar die Horizontalwinkel α und die Höhenwinkel β, die bei der gewöhnlichen Ausmessung erst nach § 128 S. 312 berechnet werden müssen. Die Methode beruht darauf, daß alle von einem Punkte der Brennebene des Objektivs ausgehenden Strahlen nach der Brechung parallel laufen. Befindet sich in O (Fig. 213) das Objektiv der Kamera, und in der Bildebene der letzteren, die mit der Brennebene zusammenfällt, das Negativ einer Aufnahme, so tritt der einem Bildpunkte P entsprechende Strahlenzylinder in derselben Richtung aus der Kamera aus, in der er bei der Aufnahme eingetreten ist. Hat die Kamera dieselbe Neigung wie bei der Aufnahme, so können mit Hilfe eines vor dem Objektiv in C aufgestellten Theodolits mit Höhenkreis sowohl die Horizontalwinkel zwischen den Bildpunkten, als auch die Höhenwinkel nach denselben direkt gemessen werden.

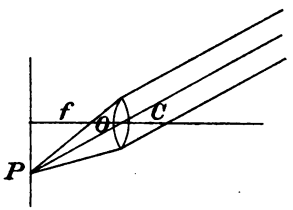


Fig. 213.

Ist die Bildweite nicht gleich der Brennweite (Fig. 214), so werden die einzelnen von P auf das Objektiv fallenden Strahlen nach der Brechung nicht parallel sein, und ein in C stehender Theodolit kann nicht in die Richtung des Hauptstrahls OP eingestellt werden. Letzteres ist nur dann möglich, wenn der Punkt C mit dem vorderen Hauptpunkt des photographischen Objektivs zusammenfällt.

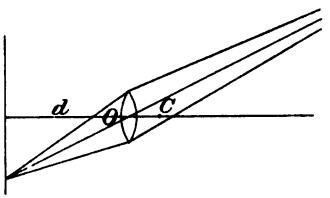


Fig. 214.

Nach diesen Gesichtspunkten hat *Koppe* eine besondere Ausmeßvorrichtung konstruiert, die in Fig. 215 im Grundriß und Aufriß abgebildet ist. Als Meßinstrument wird der Phototheodolit selbst benutzt, nachdem die Kippachse herausgehoben und durch eine andere ersetzt ist, die ein kleines zentrisch an einem Bügel angebrachtes Fernrohr trägt und an der auch der Höhenkreis bequem befestigt werden kann. Das Stativ T, das die Kamera trägt, wird an den Dreifuß des Instruments angeschraubt, wodurch eine sehr sichere Verbindung aller Teile erzielt wird. Eine Gabel des Stativs T nimmt in zwei Lagern die Kippachse der Kamera auf, die durch den vorderen Hauptpunkt ihres Objektivs geht; ferner wird die Kamera durch einen verstellbaren Träger t unterstützt, der überdies noch mit einer Feinbewegungsschraube h versehen ist, so daß der optischen Achse eine beliebige Neigung gegeben werden kann. Fig. 216 stellt die Ausmeßvorrichtung in ihrer wirklichen Ausführung dar.

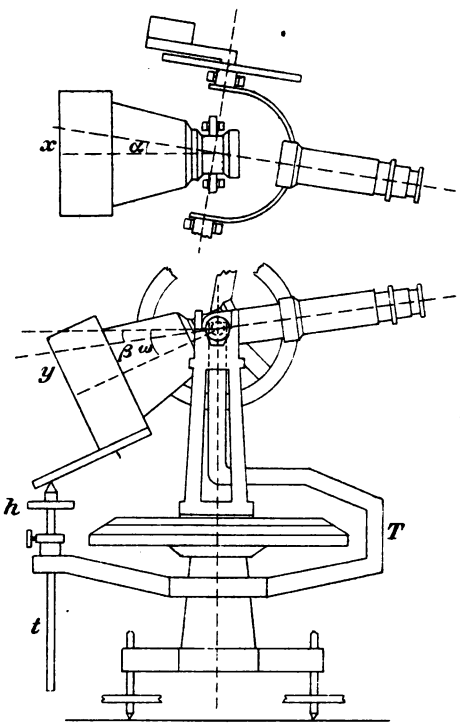


Fig. 215.

Um die Kamera in die richtige Lage zu bringen, wird das Beobachtungsfernrohr mit Hilfe des Höhenkreises auf den Höhenwinkel ω der Aufnahme eingestellt und hierauf die Kamera derartig geneigt, daß ihre optische Achse mit der Visierachse des Fernrohrs zusammenfällt. Hiermit ist die Ausmessung vorbereitet und es können nun mit Hilfe des Theodolits die horizontalen Richtungen und die Höhenwinkel nach den einzelnen

Bildpunkten gemessen werden. Die Genauigkeit, mit der diese Winkelmessung ausgeführt werden kann, bleibt bei scharfen

Fig. 216.

Bildern nicht wesentlich hinter der nach wirklichen Objekten zurück; da die Platte in der Kamera dieselbe Lage wie bei der Aufnahme hat, so sind auch die Abbildungsfehler des Objektivs ohne Einfluß.

§ 134. Stereoskopische Bilder.

Besondere Einfachheit erlangt das Verfahren der Photogrammetrie, wenn bei der Aufnahme die lichtempfindlichen Platten in einer Ebene liegen. Wir betrachten auch hier zunächst den einfachen Fall einer gemeinsamen lotrechten Bildebene mit den beiden in gleicher Höhe liegenden Zentren O_1 und O_2 (Fig. 217). Sind p_1 und p_2 die Bildpunkte des Punktes P, deren Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 in bezug auf die Hauptpunkte H_1 und H_2 aus den Bildern entnommen sind, so ist

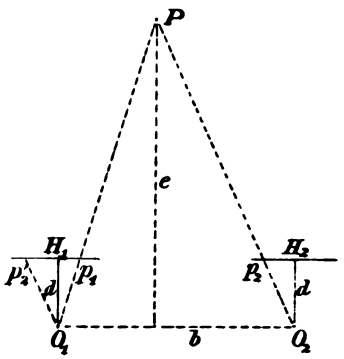


Fig. 217.

$$(1) \qquad e = \frac{bd}{x_1 - x_2}$$

oder wenn $x_1 - x_2 = a$ gesetzt wird

$$(2) \qquad e = \frac{bd}{a}.$$

Es läßt sich somit aus der Abszissendifferenz a, die man als *parallaktische Verschiebung* bezeichnet, der senkrechte Abstand des Punktes P von der Bildebene leicht berechnen.

Dies bedeutet zunächst keinen wesentlichen Vorteil gegenüber dem gewöhnlichen Verfahren. Die beiden vorstehenden Aufnahmen haben jedoch die Eigenschaften stereoskopischer Bilder, deren Augenpunkte O_1 und O_2 sind, und lassen in einem Stereoskop das abgebildete Gelände plastisch erscheinen. Da hierbei der Abstand b auf den Augenabstand c reduziert wird, so erscheinen sämtliche Geländegegenstände im Verhältnis $\frac{c}{b}$ verkleinert, d. h. der Anblick im Stereoskop ist derselbe, den ein im Maßstabe $\frac{c}{b}$ hergestelltes Geländemodell den unbewaffneten Augen bieten würde. Das Gelände wird plastisch gesehen, infolgedessen fällt das Aufsuchen zusammengehöriger Punkte überhaupt weg. Bezeichnet man auf dem einen Bilde eine Reihe von Geländepunkten etwa durch kleine Kreise, so ist es

nicht schwer, im Stereoskop auch das andere Bild an denselben Geländepunkten mit Kreisen zu versehen, selbst wenn diese Punkte sich gar nicht besonders abheben. Wird für die Kreise die parallaktische Verschiebung a ermittelt, und werden auf einem der beiden Bilder, etwa auf dem linken, die Koordinaten x und y gemessen, so ist die Lage des betreffenden Geländepunktes vollständig bekannt.

Bequemer als die Bezeichnung zusammengehöriger Punkte auf den Bildern unter Zuhilfenahme des Stereoskops ist die Anwendung zweier beweglicher Marken, die nacheinander auf beliebige Punkte eingestellt werden können. Eine hierzu geeignete Vorrichtung ist das in Fig. 218 abgebildete *Stereomikrometer*

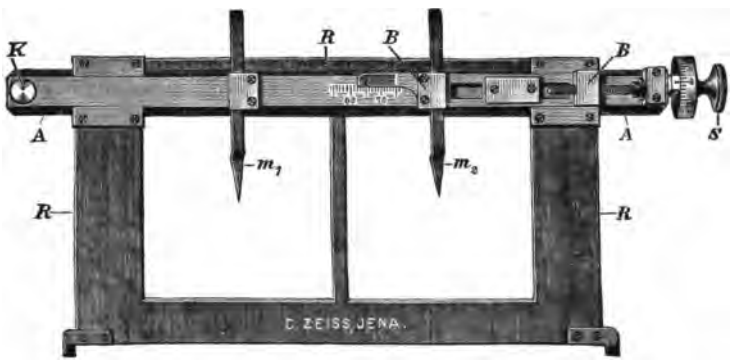


Fig. 218.

von *Carl Zeiß* in Jena. Der Rahmen R, der auf die Bilder gelegt wird, trägt einen Schieber A, der mittels des Knopfes K seitlich bewegt werden kann. Auf dem Schieber sind zwei Zeiger m_1 und m_2 befestigt, von denen der letztere mit der Schraube S in einem Schlitten B bewegt werden kann, so daß der Abstand der beiden Zeiger sich verändern läßt. Die Zeiger können überdies in vertikaler Richtung verschoben werden.

Im Stereoskop erscheinen die beiden Zeiger als eine im Raume schwebende Marke, die sich beim Drehen der Schraube S nähert oder entfernt. Hiermit ist die Möglichkeit gegeben, die sich im Raume bewegende Marke auf jeden Punkt des

plastisch erscheinenden Geländebildes einzustellen. An der Schraube S kann dann sofort die parallaktische Verschiebung a abgelesen werden, während am Schieber A und am Zeiger m_1 Skalen zur Ablesung von x und y angebracht werden könnten. Die Messungen erfolgen nur dann fehlerfrei, wenn die beiden Zeiger unmittelbar auf der Bildebene liegen; zur Vermeidung des toten Ganges ist die Schraube S bei allen Einstellungen nur in einem Sinne zu drehen.

Zur Messung der parallaktischen Verschiebung wird die wandernde Marke zuerst auf Unendlich eingestellt, indem sie mit der ebenfalls in unendlicher Entfernung erscheinenden Bildvertikalen zur Deckung gebracht wird. Die hierzu gehörige Ablesung an der Schraube S bildet die Nullablesung für die Parallaxenmessung. Da mit der Vertikalverschiebung der beiden Zeiger auch eine geringe seitliche Bewegung verbunden ist, so ist vor jeder neuen Einstellung die Nullablesung neu zu bestimmen.

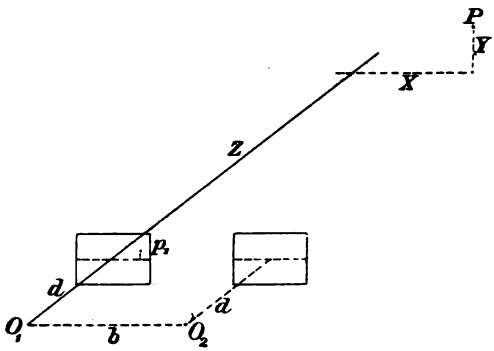


Fig. 219.

Die gemessenen Größen können zur Konstruktion der Geländepunkte benutzt werden; sie ermöglichen aber auch eine einfache Koordinatenberechnung. Führen wir nach Fig. 219 ein rechtwinkliges Koordinatensystem X, Y, Z ein, dessen Nullpunkt in O_1 liegt, dessen Z-Achse mit O_1H_1 zusammenfällt, und dessen X- und Y-Achse den entsprechenden Achsen der Bilder parallel sind, so ist nach Fig. 219 und Fig. 217:

$$Z = e$$

$$Y = y\frac{Z}{d} \tag{3}$$

$$X = x\frac{Z}{d}$$

oder mit Hilfe von (2):

$$X = x\,\frac{b}{a}$$

$$Y = y\,\frac{b}{a} \tag{4}$$

$$Z = d\,\frac{b}{a}\,.$$

Y ist mit der Höhe des Geländepunktes über dem Punkte O_1 gleichbedeutend.

Ist die Bildebene um den Winkel ω gegen die Lotrichtung geneigt, so erhalten die Y- und die Z-Achse des vorstehenden Koordinatensystems dieselbe Neigung und die Werte von Y und Z bedürfen einer Reduktion, um wieder horizontale Koordinaten und Höhen anzugeben. Bezeichnen wir die letzteren mit X', Y' und Z', so ist:

$$X' = X$$

$$Y' = Y\cos\omega + Z\sin\omega \tag{5}$$

$$Z' = Z\cos\omega - Y\sin\omega\,.$$

Aufnahmen in verschiedener Höhe. Liegen die Bildzentren O_1 und O_2 bei der Aufnahme in verschiedener Höhe, so lassen sich die beiden Bilder nur dann im Stereoskop zu einem plastischen Bilde vereinigen, wenn die Verbindungslinie der beiden Hauptpunkte parallel der Augenverbindungslinie liegt (Fig. 220). Im Stereoskop würde demnach das verkleinerte und aufrecht stehend gedachte Modell der Landschaft scheinbar mit nach rechts geneigtem Kopfe angeblickt werden. Die parallaktische Verschiebung a zweier Bildpunkte p_1 und p_2 wird dann ebenfalls in der Richtung H_1H_2 gemessen werden; es interessiert uns jedoch nur die Projektion a' derselben auf die Horizontale, die wir durch Reduktion von a, besser aber noch durch direkte

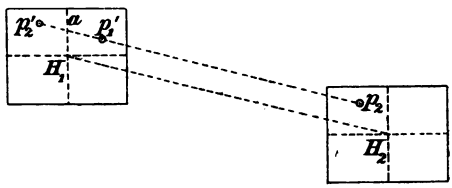


Fig. 220.

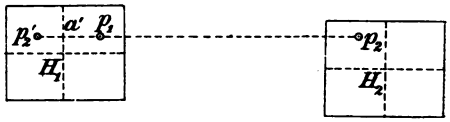


Fig. 221.

Messung auf folgende Weise bestimmen. Denken wir uns durch p_1 und p_2 Parallelen zur Bildvertikalen gelegt, so ist die parallaktische Verschiebung dieser beiden Geraden gleich a'. Diese Größe erhalten wir auch, wenn wir das rechte Bild aufwärts verschieben, bis die Verbindungslinie $p_1 p_2$ der Bildhorizontalen parallel ist (Fig. 221), worauf die parallaktische Verschiebung der beiden Bildpunkte gleich a' ist. Die Verschiebung des rechten Bildes ist für jeden auszumessenden Punkt zu wiederholen, wobei natürlich die plastische Erscheinung des Gesamtbildes verloren geht.

Wenn nach einer photographischen Aufnahme die optische Achse um einen sehr kleinen Horizontalwinkel gedreht und die Aufnahme wiederholt wird, so werden die beiden Bilder so geringe Abweichungen zeigen, daß diese nur am Rande wahrnehmbar sind. Dagegen werden die beiden Bildvertikalen um einen merklichen Betrag gegeneinander verschoben sein. Ist der Drehungswinkel gleich δ, die Bildweite gleich d, so ist die Verschiebung der Bildvertikalen

$$\Delta = d\delta.$$

Dies ist bei stereophotogrammetrischen Aufnahmen zu berücksichtigen, wenn bei der Aufnahme die beiden optischen Achsen nicht genau parallel sind. Die Bilder können dann immer für das Stereomikrometer verwendet werden, jedoch ist zur Ausmessung die Größe Δ zu ermitteln. Ist der Winkel δ nicht aus den Orientierungsmessungen bekannt, so läßt sich Δ indirekt bestimmen, wenn das Bild einen Dreieckspunkt enthält, dessen Lage in bezug auf die Aufnahmepunkte gegeben ist, so daß sein Abstand e (Fig. 217) als bekannt angesehen werden kann. Wird für diesen Punkt die parallaktische Verschiebung a zunächst ohne Rücksicht auf die Konvergenz der optischen Achsen gemessen, so ergibt sich nach (2) § 134, S. 326

$$e' = \frac{bd}{a}$$

und es ist

$$e = \frac{bd}{a + \Delta},$$

also

$$e - e' = -\frac{bd}{a^2}\Delta$$

oder

$$\Delta = \frac{e' - e}{b\,d}\,a^2,$$

woraus Δ berechnet werden kann. Wird nun zu jeder parallaktischen Verschiebung a die konstante Verbesserung Δ hinzugefügt, so ist die Konvergenz der optischen Achsen unschädlich gemacht.

§ 135. Der Stereokomparator.

Das Stereomikrometer ist weniger für praktische Anwendung als für die Demonstration des stereophotogrammetrischen Verfahrens berechnet. Von der optischen Werkstätte *Carl Zeiß* in

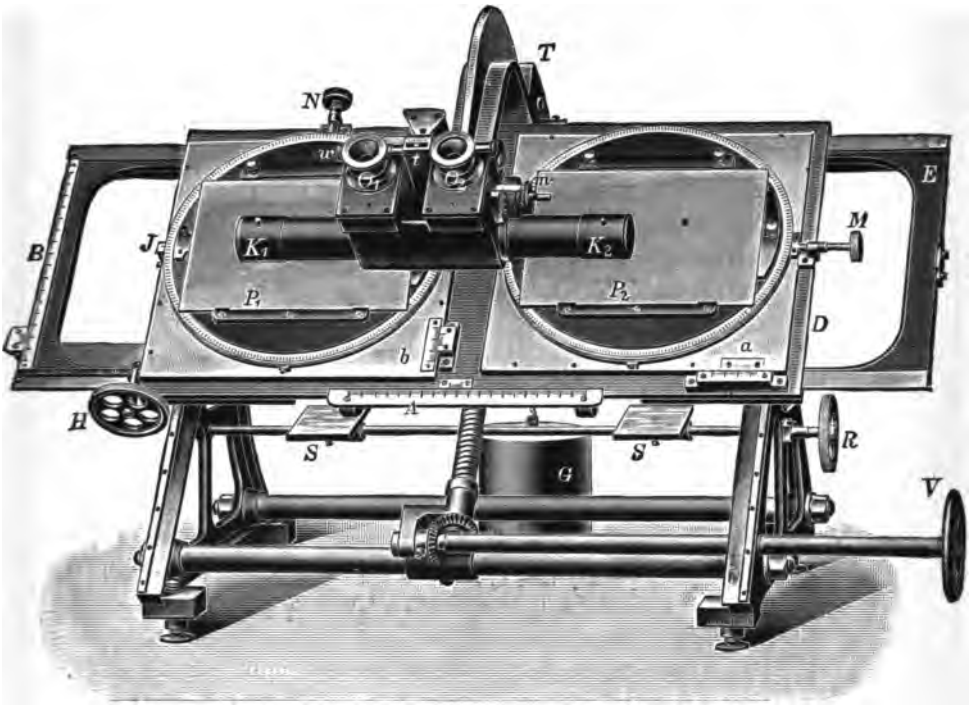


Fig. 222.

Jena ist zur Ausmessung stereoskopischer Bilder ein *Stereokomparator* konstruiert worden, der die Aufgabe in vollkommenster Weise löst. Fig. 222 zeigt dieses Instrument in seiner ersten Ausführung vom Jahre 1900, die jedoch später nur geringe Ab-

änderungen erfahren hat. An die Stelle des gewöhnlichen Stereoskops ist ein binokulares Mikroskop mit erweitertem Objektivabstand getreten, dessen Okulare O_1 und O_2 mit den Objektiven durch ein Prismensystem verbunden sind. In der Bildebene befinden sich die beiden Marken, die linke fest, die rechte mittels der Mikrometerschraube m beweglich. Als Träger der stereoskopischen Bilder dient ein Rahmen E, der in vertikaler Richtung mittels des Triebes V verschoben werden kann, und dessen Gewicht durch das Gegengewicht G ausgeglichen wird. Auf dem Rahmen E gleitet ein horizontal durch den Trieb H zu bewegender Schlitten D. Die beiden Verschiebungen können an den Skalen B und A gemessen werden. Die Bilder P_1 und P_2 liegen auf zwei getrennten Rahmen, von denen der linke abweichend von Fig. 222 bei den neueren Instrumenten feststeht, während der rechte auf einem Kreuzschlitten vertikal und horizontal mit den Schrauben N und M bewegt werden kann. Zur Messung dieser Bewegungen dienen die Skalen b und a. Zu erwähnen bleibt noch, daß die Bilder nicht unmittelbar auf den Rahmen, sondern auf zwei Drehscheiben liegen, die allerdings für den vorliegenden Zweck keine Bedeutung haben.

Zwei Spiegel S, die durch Drehung des Rades R eingestellt werden, regeln die Beleuchtung der Platten.

Für die Ausmessung stellt man die wandernde Marke mit Hilfe der Schraube m auf ∞ ein, und legt die Platten so auf die Rahmen, daß die Bildhorizontalen wagrecht liegen und die Hauptpunkte mit den beiden Marken des Mikrometers zusammenfallen, also auch in unendlicher Entfernung erscheinen. Bei dieser Stellung der Bilder sind die Koordinaten x und y, sowie die parallaktische Verschiebung gleich Null, die dazu gehörigen Ablesungen an den drei Skalen A, B und a geben somit die Indexverbesserungen derselben an.

Der Vorgang bei der Ausmessung ist nun der folgende. Mit den beiden Schrauben H und V wird der zu bestimmende Punkt des linken Bildes auf die linke Mikrometermarke eingestellt, worauf man an den Skalen A und B unter Berücksichtigung ihrer Indexverbesserungen die Koordinaten x und y des Punktes abliest. Hierauf wird mit der Schraube N, die wir uns über dem rechten Bilde zu denken haben, das letztere ver-

tikal so weit verschoben, bis beide Bildpunkte in gleicher Höhe liegen, dann die wandernde Marke durch seitliches Verschieben des rechten Bildes mittels der Schraube *M* auf den Punkt eingestellt und an der Skala *a* die parallaktische Verschiebung abgelesen. Der Nonius bei *a* gibt $^1/_{50}$ mm an, so daß die Hundertstel-Millimeter noch geschätzt werden können.

Die Mikrometerschraube *m* wird somit zur Ausmessung der Bilder nicht benutzt; der geringe Spielraum der beweglichen Marke würde hierzu auch nicht genügen. Jedoch kann diese Schraube zur genauen Messung kleiner Entfernungsdifferenzen gebraucht werden.

Obgleich bei der Ausmessung die beiden Mikrometermarken unbeweglich bleiben und nur das rechte Bild bewegt wird, erscheint doch im Mikroskop die Marke wandernd und das Gelände stillstehend.

§ 136. Der stereoskopische Entfernungsmesser.

Das Mikroskop des Stereokomparators kann zur wirklichen Distanzmessung im Gelände benutzt werden, wenn die optischen Teile, die Objektive und Okulare, durch die zweier Fernrohre ersetzt werden. Wir erhalten dann ein Doppelfernrohr mit erweitertem Objektivabstand (Telestereoskop), in dessen Bildebene eine feste und eine bewegliche Marke angebracht sind. Die Mikrometerschraube der letzteren zeigt die Ablesung Null, sobald die wandernde Marke unendlich fern erscheint. Wird dieses Instrument auf ein Geländeobjekt gerichtet, und die wandernde Marke auf dieses Objekt eingestellt, so ergibt sich aus der parallaktischen Verschiebung, dem Objektivabstand und der Bildweite nach (2), § 134, S. 326 sofort die Entfernung des Objekts.

Bequemer ist eine zweite Konstruktion des *stereoskopischen Entfernungsmessers*, die ebenfalls von *Carl Zeiß* in Jena in den Handel gebracht worden ist. Dieser unterscheidet sich von dem soeben beschriebenen nur durch die Meßvorrichtung. Anstatt einer festen und einer beweglichen Marke ist eine ganze Reihe *fester* Markenpaare in der Bildebene angebracht, und diese gewähren den Anblick einer Reihe von Marken, die im Raum in verschiedenen Entfernungen vor dem Fernrohr liegen. Die

scheinbaren Entfernungen sind durch kleine, neben den Marken stehende Ziffern bezeichnet. Die Gesamtheit der Marken bildet eine Skala, die, auf ein Geländeobjekt gerichtet, das Ablesen der

Fig. 223.

Entfernung desselben unmittelbar gestattet In Fig. 223 ist ein kleinerer Entfernungsmesser mit einem Objektivabstand von 32 cm und vierfacher Fernrohrvergrößerung abgebildet, der Entfernungen von 20 m bis 500 m angibt.

§ 137. Direkte Verwertung stereophotogrammetrischer Bilder.

Als Abschluß der Besprechung der neuesten geodätischen Methoden behandeln wir einen im Jahre 1901 zuerst von dem Amerikaner *Deville* ausgeführten Versuch, der die unmittelbare Zeichnung topographischer Karten nach stereoskopischen Bildern bezweckt. Wir setzen hierbei wieder zwei Aufnahmen mit vertikaler Bildebene und zunächst auch mit gleicher Höhe der Aufnahmepunkte voraus. Der Apparat von *Deville*, der im Grundriß in Fig. 224 dargestellt ist, besteht im wesentlichen aus einem *Helmholtz*schen Spiegelstereoskop, bei dem die beiden in B_1 und B_2 lotrecht aufgestellten Bilder durch zwei Spiegel S_1 und S_2 den Augen

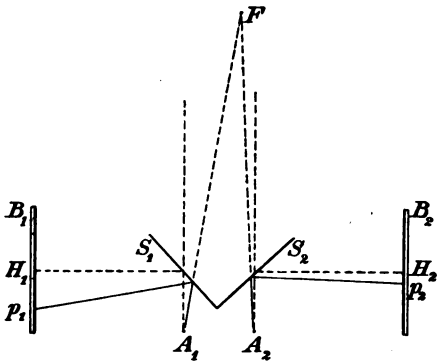


Fig. 224.

A_1 und A_2 zugeführt werden. Die Bilder stehen so, daß ihre Hauptpunkte in unendlicher Entfernung erscheinen. Die beiden Spiegel sind nur leicht versilbert und infolgedessen in gewissem Grade durchsichtig. Man sieht deshalb nicht nur das Gelände plastisch vor sich, sondern zugleich auch alle Gegenstände, die sich hinter den Spiegeln befinden und die nun im Gelände selbst zu stehen scheinen. Bewegt man einen Zeichenstift F hinter den Spiegeln, so wandert dieser anscheinend im Gelände umher, und es ist damit die Möglichkeit gegeben, den Stift den einzelnen Linien des Geländes entlang zu führen und diese aufzuzeichnen.

Deville befestigte den Zeichenstift unter einem kleinen Wagen und auf diesem einen Schirm, der lotrecht über dem Stift eine von der Rückseite beleuchtete Öffnung trug. Diese erschien dem Beobachter als ein leuchtender Punkt, der durch Bewegen des Wagens im Gelände herumgeführt werden konnte.

Der Apparat kann auch zur Zeichnung von Horizontalkurven benutzt werden, wozu der Schirm vertikal verschoben werden muß. Da die Höhe der Hauptpunkte von der Aufnahme her bekannt ist, und der Maßstab des plastisch erscheinenden Modells sich aus dem Augenabstand und der Basis ergibt, so kann hinter den Spiegeln eine lotrechte Skala aufgestellt werden, deren Teilstriche runden Werten der Höhen entsprechen. Stellt man nun die leuchtende Marke des Zeichenstiftes nacheinander auf die einzelnen Höhen ein und sucht alle Punkte des Geländes auf, die in diesen Höhen liegen, so gibt der Zeichenstift die entsprechenden Höhenkurven.

Liegen die beiden Aufnahmepunkte in verschiedenen Höhen, so sind auch die Bilder so aufzustellen, daß der Höhenunterschied der Hauptpunkte dem der Aufnahmepunkte im Maßstabe der Verkleinerung gleichkommt. Der Beobachter ist dann genötigt, mit seitlich geneigtem Kopf in die Spiegel zu blicken.

Die erste Anregung zur geodätischen Verwertung der Stereoskopie gab der Charlottenburger Ingenieur *Hector de Grousilliers* (gestorben 1899), der im Jahre 1893 der optischen Werkstätte *Carl Zeiß* in Jena den Grundgedanken des stereoskopischen Entfernungsmessers zur Ausführung vorschlug. Nach vielfachen

Versuchen von Dr. *Pulfrich* gelangte diese Idee zur Verwirklichung und die ausgeführten Instrumente zeigten in überraschender Weise die Fruchtbarkeit des von *Grousilliers* angegebenen völlig neuen Prinzips. Diese Erfolge führten *Pulfrich* dazu, die neue Methode auch zur Entfernungsmessung im Stereoskop zu verwenden, und wenn dieser Gedanke auch, wie es sich dann zeigte, schon früher mehrfach verfolgt worden war, so gelang die vollkommene Verwirklichung doch erst nach Ersatz des gewöhnlichen Stereoskops durch ein binokulares Mikroskop, in dessen Bildebene die Meßvorrichtung angebracht wurde. Der auf diesem Wege entstandene Stereokomparator hat sich in den wenigen Jahren als ein sehr wichtiges Meßinstrument erwiesen, dessen Anwendungsgebiet heute noch nicht abgegrenzt ist.

An einer zusammenhängenden umfassenden Darstellung der Photogrammetrie fehlt es bis jetzt. Grundlegende Schriften sind:

C. Koppe, Die Photogrammetrie oder Bildmeßkunst. Weimar 1889.

C. Koppe, Photogrammetrie und internationale Wolkenmessung. Braunschweig 1896.

Als Beispiel einer größeren photogrammetrischen Aufnahme ist zu erwähnen:

S. Finsterwalder, Der Vernagtferner, seine Geschichte und seine Vermessung in den Jahren 1888 und 1889. Graz 1897.

Für die Stereophotogrammetrie ist außer den Veröffentlichungen von *C. Pulfrich* in der Zeitschrift für Instrumentenkunde 1903/04 zu nennen:

von Hübl, Die Stereophotogrammetrie. Mitt. d. k. k. mil.-geogr. Instituts XXII. Bd. 1902, S. 139–154.

von Hübl, Die stereophotogrammetrische Terrainaufnahme. Mitt. d. k. k. mil.-geogr. Instituts XXIII. Bd. 1903, S. 182—212.

Die geschichtliche Entwicklung des gesamten Gebiets ist dargestellt im zweiten Teil des schon im Vorwort erwähnten Werkes *Laussedat*, Recherches sur les instruments.

IV. Abschnitt.

Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.

17. Kapitel.

Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

§ 138. Einführendes Beispiel.

Als Beispiel einer einfachen Ausgleichung behandeln wir die Berechnung der Konstanten zweier Meßkeile, wie sie auf dem Meßband- oder Meßlattenkomparator benutzt werden (vgl. S. 8). Zur Bestimmung der Konstanten wurde der Abstand z der beiden Parallelflächen für neun verschiedene Keilablesungen k gemessen. Die Messungswerte, die mit $l_1, l_2 \ldots l_9$ bezeichnet werden mögen, sind die folgenden:

$$\begin{array}{ll} k_1 = -19{,}6 & l_1 = 15{,}80 \\ k_2 = -16{,}4 & l_2 = 16{,}48 \\ k_3 = -11{,}6 & l_3 = 17{,}42 \\ k_4 = -\ 6{,}8 & l_4 = 18{,}40 \\ k_5 = -\ 0{,}4 & l_5 = 19{,}66 \\ k_6 = +\ 4{,}4 & l_6 = 20{,}56 \\ k_7 = +\ 9{,}5 & l_7 = 21{,}58 \\ k_8 = +14{,}5 & l_8 = 22{,}66 \\ k_9 = +19{,}5 & l_9 = 23{,}60. \end{array}$$

Nach § 3, S. 8 ist der Abstand der Parallelflächen

$$z = \alpha + \beta k, \tag{1}$$

es sind demnach aus den Messungen die beiden Konstanten α und β zu berechnen. Wir führen diese Berechnung zunächst

auf graphischem Wege aus, indem wir die k als Abszissen, die l als Ordinaten auftragen und durch die gefundenen Punkte eine Gerade legen (Fig. 225). Da es jedoch infolge der Messungsfehler, mit denen die l behaftet sind, nicht möglich sein wird, die Gerade gleichzeitig durch alle neun Punkte gehen zu lassen, so kann sie nur eine ausgleichende Linie darstellen, die mög-

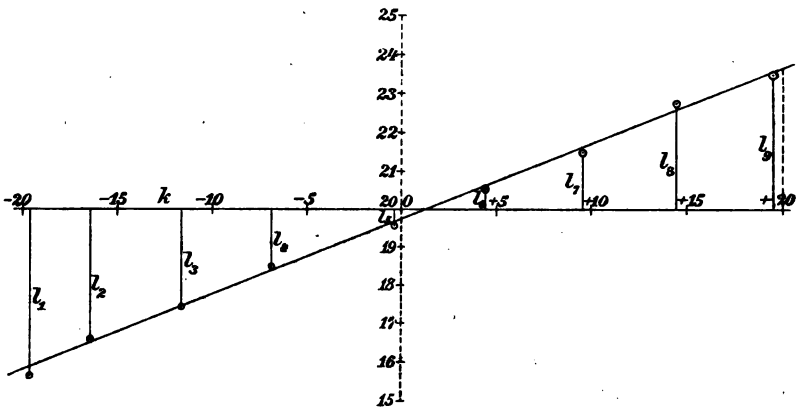


Fig. 225.

lichst wenig von den einzelnen Punkten abweicht. In Fig. 225 ist diese Zeichnung verzerrt dargestellt, damit die Abweichungen deutlicher hervortreten. Bei genauer Konstruktion findet man, daß die Gerade die Ordinatenachse bei dem Wert 19,75 schneidet, und daß die Ordinaten der Geraden bei einer Abszissendifferenz von 40 Einheiten um 7,94 Einheiten wachsen. Es ist demnach:

$$\alpha = 19{,}75 \qquad \beta = \frac{7{,}94}{40} = 0{,}199,$$

und das Resultat der Ausgleichung ist die Gleichung der Meßkeile

$$z = 19{,}75 + 0{,}199\,k.$$

Um die vorstehende Aufgabe numerisch zu lösen, bezeichnen wir die Abweichungen der Messungen von der ausgleichenden Geraden in Fig. 225 mit λ_1, $\lambda_2 \ldots \lambda_9$ und es sind dann die Ordinaten der Geraden für die Abszissen $k_1, k_2, \cdots k_9$ gleich $l_1 + \lambda_1$, $l_2 + \lambda_2, \cdots l_9 + \lambda_9$. Es ist infolgedessen:

$$
\begin{aligned}
l_1 + \lambda_1 &= \alpha + \beta k_1 \\
l_2 + \lambda_2 &= \alpha + \beta k_2 \\
&\vdots \\
l_9 + \lambda_9 &= \alpha + \beta k_9.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Diese Gleichungen gelten für jede beliebige ausgleichende Gerade, jedoch wird jede derselben andere Werte der λ und andere Werte für α und β bestimmen. Als Kriterium für die günstigste Lage der Geraden wurde schon vorher die Forderung aufgestellt, daß die Werte der λ möglichst klein sein sollen, was indessen in verschiedener Weise mathematisch formuliert werden kann. Der Versuch, die *Absolutsumme* der λ möglichst klein zu machen, führt nicht zu einer allgemein verwendbaren Ausgleichungsmethode; wenn man dagegen die *Quadratsumme* der λ zu einem Minimum macht, so ergibt sich eine einfache Lösung der Aufgabe. Diesen Weg hat *C. F. Gauß* im Jahre 1795 zum ersten Male eingeschlagen und das gefundene Ausgleichungsverfahren in seiner „Theoria motus corporum coelestium" im Jahre 1809 begründet. Wenig später als *Gauß* gelangte auch *Legendre* zu derselben Lösung, die er bereits im Jahre 1806 in seiner Schrift „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes" bekannt gab, ohne jedoch auf eine Begründung einzugehen. *Legendre* legte dem Verfahren den Namen „Methode der kleinsten Quadrate" bei.

Indem wir die theoretischen Vorzüge dieses Ausgleichungsprinzips zunächst nicht erörtern, benutzen wir es sofort, um die vorliegende Aufgabe numerisch zu lösen.

Nach (2) haben wir:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= -l_1 + \alpha + k_1\beta \\
\lambda_2 &= -l_2 + \alpha + k_2\beta \\
&\vdots \\
\lambda_9 &= -l_9 + \alpha + k_9\beta,
\end{aligned} \tag{3}
$$

woraus die Unbekannten α und β so bestimmt werden sollen, daß

$$[\lambda\lambda] = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_9^2 \tag{4}$$

ein Minimum wird, oder daß

$$\frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial\alpha} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial\beta} = 0$$

wird. Es ist aber

$$\frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial\alpha} = \frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial\lambda_1}\frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial\lambda_2}\frac{\partial\lambda_2}{\partial\alpha} + \cdots + \frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial\lambda_9}\frac{\partial\lambda_9}{\partial\alpha}$$

und nach (4) und (3):

$$\frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial\alpha} = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + 2\lambda_9 = 0.$$

Entsprechend ergibt sich:

$$\frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial\beta} = 2\lambda_1 k_1 + 2\lambda_2 k_2 + \cdots + 2\lambda_9 k_9 = 0.$$

Die Bedingungen des Minimums sind somit

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_9 &= 0 \\ k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + \cdots + k_9\lambda_9 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Indem wir hier die Werte der λ aus den Gl. (3) einführen, finden wir

$$\begin{aligned} -[l] + 9\alpha + [k]\beta &= 0 \\ -[kl] + [k]\alpha + [kk]\beta &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

woraus die beiden Unbekannten α und β berechnet werden können. Wir gehen nun zu Zahlenwerten über und erhalten für das System (3):

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -15{,}80 + \alpha - 19{,}6\beta \\ \lambda_2 &= -16{,}48 + \alpha - 16{,}4\beta \\ \lambda_3 &= -17{,}42 + \alpha - 11{,}6\beta \\ \lambda_4 &= -18{,}40 + \alpha - 6{,}8\beta \\ \lambda_5 &= -19{,}66 + \alpha - 0{,}4\beta \\ \lambda_6 &= -20{,}56 + \alpha + 4{,}4\beta \\ \lambda_7 &= -21{,}58 + \alpha + 9{,}5\beta \\ \lambda_8 &= -22{,}66 + \alpha + 14{,}5\beta \\ \lambda_9 &= -23{,}60 + \alpha + 19{,}5\beta \end{aligned}$$

und hieraus für das System (6) die Gleichungen

$$\begin{aligned} -176{,}16 + 9{,}00\alpha - 6{,}90\beta &= 0 \\ -169{,}24 - 6{,}90\alpha + 1534{,}19\beta &= 0, \end{aligned}$$

aus denen wir finden:

$$\alpha = +19{,}727 \qquad \beta = +0{,}1990,$$

Werte, die wenig von den Resultaten der graphischen Ausgleichung abweichen.

§ 139. Vermittelnde Beobachtungen.

Gleichungen von der Form des Systems (2) § 138 ergeben sich überall da, wo Funktionen von Unbekannten gemessen werden, um die Unbekannten zu ermitteln. Man bezeichnet solche Messungen als *vermittelnde Beobachtungen* und die soeben gelöste Aufgabe als eine *Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.* Voraussetzung ist hierbei, daß die Anzahl der Beobachtungen größer als die Anzahl der Unbekannten ist. Wir behandeln die Aufgabe noch einmal, indem wir statt der Gl. (3) die allgemeineren linearen Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \lambda_2 &= -l_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ &\vdots \\ \lambda_n &= -l_n + a_n x + b_n y + c_n z \end{aligned}$$

betrachten, in denen die drei Unbekannten $x\ y\ z$ aus den n Beobachtungen $l_1, l_2 \ldots l_n$ zu berechnen sind. Man bezeichnet die Gl. (1) als *Fehlergleichungen.* Wird der Bestimmung der Unbekannten die Forderung zugrunde gelegt, daß

$$(2)\qquad [\lambda\lambda] = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \cdots + \lambda_n^2$$

ein Minimum sein soll, so erhalten wir analog den Entwicklungen des § 138 aus (1) und (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial x} &= 2a_1\lambda_1 + 2a_2\lambda_2 + \cdots + 2a_n\lambda_n = 0 \\ \frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial y} &= 2b_1\lambda_1 + 2b_2\lambda_2 + \cdots + 2b_n\lambda_n = 0 \\ \frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial z} &= 2c_1\lambda_1 + 2c_2\lambda_2 + \cdots + 2c_n\lambda_n = 0 \end{aligned}$$

oder in einfacherer Bezeichnung:

$$(3)\qquad [a\lambda] = 0 \qquad [b\lambda] = 0 \qquad [c\lambda] = 0.$$

Werden die Gleichungen (1) der Reihe nach mit $a_1, a_2 \ldots a_n$ multipliziert und summiert, so ergibt sich nach (3):

$$[a\lambda] = -[al] + [aa]x + [ab]y + [ac]z = 0.$$

Entsprechende Gleichungen finden wir durch Multiplikation der Fehlergleichungen (1) mit $b_1, b_2 \ldots b_n$, bzw. mit $c_1, c_2 \ldots c_n$. Im Zusammenhange lauten die drei Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&[aa]x + [ab]y + [ac]z - [al] = 0\\
&[ab]x + [bb]y + [bc]z - [bl] = 0\\
&[ac]x + [bc]y + [cc]z - [cl] = 0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Aus diesen Gleichungen, den sog. *Normalgleichungen*, können die drei Unbekannten x, y und z berechnet werden.

Das arithmetische Mittel. Gleichungen einfacher Form ergeben sich in dem speziellen Fall, in dem eine Unbekannte *unmittelbar* mehrmals gemessen worden ist. Wird mit x der aus den Messungen zu berechnende Wert der Unbekannten bezeichnet, und sind $l_1, l_2 \ldots l_n$ die Beobachtungen, so sind die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
l_1 + \lambda_1 &= x\\
l_2 + \lambda_2 &= x\\
&\vdots\\
l_n + \lambda_n &= x
\end{aligned} \tag{5}
$$

die Fehlergleichungen dieser Aufgabe. Hieraus ergibt sich, wenn die Unbekannte nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet wird, die Normalgleichung

$$nx - [l] = 0$$

oder

$$x = \frac{[l]}{n}. \tag{6}$$

Der nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnete Wert der Unbekannten ist mithin gleich dem arithmetischen Mittel der Beobachtungen. Es besteht somit kein Widerspruch zwischen dem arithmetischen Mittel, das sich bei wiederholter Messung einer Unbekannten als nächstliegender Wert derselben aufdrängt und dem Resultat der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate.

§ 140. Einführung von Näherungswerten der Unbekannten. Elimination einer Unbekannten.

a) In vielen Fällen ist es zweckmäßig, Näherungswerte der Unbekannten schon vor der Ausgleichung zu ermitteln, indem man z. B. bei drei Unbekannten in drei Fehlergleichungen die Verbesserungen λ gleich Null setzt und hieraus die Unbekannten berechnet. Bezeichnen wir die Näherungswerte mit x_0, y_0 und z_0 und setzen

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= x_0 + \xi \\ y &= y_0 + \eta \\ z &= z_0 + \zeta, \end{aligned}$$

so sind durch die Ausgleichung nur noch die kleinen Verbesserungen ξ, η und ζ zu ermitteln. In manchen Fällen führt dies zu einer Vereinfachung der Zahlenrechnung, in anderen wird hierdurch erst die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate ermöglicht.

Beispiel. Die Länge eines Stahlmeßbandes wurde auf dem Meßbandkomparator bei verschiedenen Temperaturen gemessen. Aus den gefundenen Werten soll die Länge des Bandes für 0^0 und die Änderung derselben für 1^0 Temperaturerhöhung berechnet werden. Die Messungsergebnisse sind:

$$\begin{aligned} t_1 &= +\ 3{,}5^0 & l_1 &= 19998{,}2 \text{ mm} \\ t_2 &= +\ 8{,}7^0 & l_2 &= 19999{,}3 \ \text{„} \\ t_3 &= +\ 15{,}2^0 & l_3 &= 20001{,}9 \ \text{„} \\ t_4 &= +\ 19{,}8^0 & l_4 &= 20002{,}9 \ \text{„} \\ t_5 &= +\ 26{,}2^0 & l_5 &= 20004{,}0 \ \text{„} \end{aligned}$$

Es sei x die Länge des Meßbandes bei 0^0, y ihre Änderung bei 1^0 Temperaturzunahme. Indem wir zu den Beobachtungen l die Verbesserungen λ hinzufügen, die nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden sollen, erhalten wir die Fehlergleichungen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} 19998{,}2 + \lambda_1 &= x + 3{,}5\,y \\ 19999{,}3 + \lambda_2 &= x + 8{,}7\,y \\ 20001{,}9 + \lambda_3 &= x + 15{,}2\,y \\ 20002{,}9 + \lambda_4 &= x + 19{,}8\,y \\ 20004{,}0 + \lambda_5 &= x + 26{,}2\,y. \end{aligned}$$

Die Aufstellung der Normalgleichungen wird mit den großen Zahlenwerten der l sehr unbequem; wir führen deshalb nach (1) Näherungswerte für die Unbekannten ein, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} x &= 20000 + \xi \\ y &= 0{,}2 + \eta, \end{aligned}$$

wobei der Ausdehnungskoeffizient gleich rd. 0,00001 angenommen ist. Werden diese Werte in die Fehlergleichungen (2) eingesetzt, so gehen die letzteren über in

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= +2{,}5 + \xi + 3{,}5\eta\\ \lambda_2 &= +2{,}4 + \xi + 8{,}7\eta\\ \lambda_3 &= +1{,}1 + \xi + 15{,}2\eta\\ \lambda_4 &= +1{,}1 + \xi + 19{,}8\eta\\ \lambda_5 &= +1{,}2 + \xi + 26{,}2\eta.\end{aligned}$$

Die Normalgleichungen hierzu sind

$$\begin{aligned}+ 5{,}0\xi + 73{,}4\eta + 8{,}30 &= 0\\ + 73{,}4\xi + 1397{,}5\eta + 99{,}57 &= 0\end{aligned}$$

und hiermit werden die Verbesserungen der Unbekannten

$$\xi = -2{,}68 \qquad \eta = +0{,}0696.$$

Die Unbekannten selbst erhalten die Werte

$$\begin{aligned}x &= 19\,997{,}32 \text{ mm}\\ y &= 0{,}270,\end{aligned}$$

und die Länge des Meßbandes ist für eine beliebige Temperatur t in Millimetern $L = 19997{,}32 + 0{,}27t.$

b) Eine andere Vereinfachung der Zahlenrechnung ist in denjenigen Fällen möglich, in denen eine Unbekannte in allen Fehlergleichungen denselben Koeffizienten hat. Ist z. B. in den Fehlergleichungen (1) § 139, S. 341 $a_1 = a_2 = a_3 \cdots = a_n = a$, so ist nach (3) desselben Paragraphen

(3) $$a[\lambda] = 0 \qquad \text{oder} \qquad [\lambda] = 0.$$

Mithin gibt die Summe der Fehlergleichungen (1) § 139 S. 341

$$0 = -[l] + nax + [b]\,y + [c]\,z$$

für diesen besonderen Fall ein bequemes Hilfsmittel zur Elimination der Unbekannten z. Wird die Gleichung

(4) $$0 = +\frac{[l]}{n} - ax - \frac{[b]}{n}\,y - \frac{[c]}{n}\,z$$

zu allen Fehlergleichungen hinzugefügt, so ergeben sich die *reduzierten* Fehlergleichungen

(5) $$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\left(l_1 - \frac{[l]}{n}\right) + \left(b_1 - \frac{[b]}{n}\right)y + \left(c_1 - \frac{[c]}{n}\right)z\\ \lambda_2 &= -\left(l_2 - \frac{[l]}{n}\right) + \left(b_2 - \frac{[b]}{n}\right)y + \left(c_2 - \frac{[c]}{n}\right)z\\ &\vdots\\ \lambda_n &= -\left(l_n - \frac{[l]}{n}\right) + \left(b_n - \frac{[b]}{n}\right)y + \left(c_n - \frac{[c]}{n}\right)z,\end{aligned}$$

die nur noch die Unbekannten y und z enthalten.

Wenden wir dies auf das vorstehende Beispiel an, so ist zu den ursprünglichen Fehlergleichungen (2) die Gleichung

$$-20001{,}26 = -x - 14{,}7\,y \tag{6}$$

hinzuzufügen. Die reduzierten Fehlergleichungen sind dann

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= +3{,}1 - 11{,}2\,y\\
\lambda_2 &= +2{,}0 - 6{,}0\,y\\
\lambda_3 &= -0{,}6 + 0{,}5\,y\\
\lambda_4 &= -1{,}6 + 5{,}1\,y\\
\lambda_5 &= -2{,}7 + 11{,}5\,y.
\end{aligned}$$

Als einzige Normalgleichung ergibt sich hieraus

$$319{,}95\,y - 86{,}23 = 0$$

und

$$y = +0{,}2695.$$

Zur Berechnung von x dient die Summengleichung (6), aus der wir finden

$$x = 19997{,}30.$$

§ 141. Nicht lineare Fehlergleichungen.

Bisher wurde angenommen, daß lineare Funktionen der Unbekannten gemessen seien. Indem wir nun die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen verallgemeinern, gehen wir zu beliebigen Funktionen der Unbekannten über. Bezeichnen wir die gemessenen Werte dieser Funktionen mit L, so ergeben sich die Fehlergleichungen

$$\begin{aligned}
L_1 + \lambda_1 &= f_1(x, y, z)\\
L_2 + \lambda_2 &= f_2(x, y, z)\\
&\vdots\\
L_n + \lambda_n &= f_n(x, y, z).
\end{aligned} \tag{1}$$

Um diese Gleichungen in eine lineare Form zu bringen, führen wir Näherungswerte $x_0\ y_0\ z_0$ der Unbekannten ein, indem wir setzen

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + \xi\\
y &= y_0 + \eta\\
z &= z_0 + \zeta.
\end{aligned} \tag{2}$$

Hiermit gehen die Fehlergleichungen über in

$$\begin{aligned} L_1 + \lambda_1 &= f_1(x_0 + \xi,\ y_0 + \eta,\ z_0 + \zeta) \\ L_2 + \lambda_2 &= f_2(x_0 + \xi,\ y_0 + \eta,\ z_0 + \zeta) \\ &\vdots \\ L_n + \lambda_n &= f_n(x_0 + \xi,\ y_0 + \eta,\ z_0 + \zeta). \end{aligned}$$

Die rechte Seite jeder dieser Gleichungen entwickeln wir nach *Taylor*s Satz in eine Reihe, die wir aber unter der Voraussetzung, daß die Näherungswerte nur noch wenig von den endgültigen Werten abweichen, auf die Glieder erster Ordnung beschränken. Es ist somit

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -L_1 + f_1(x_0,\ y_0,\ z_0) + \frac{\partial f_1}{\partial x_0}\xi + \frac{\partial f_1}{\partial y_0}\eta + \frac{\partial f_1}{\partial z_0}\zeta \\ \lambda_2 &= -L_2 + f_2(x_0,\ y_0,\ z_0) + \frac{\partial f_2}{\partial x_0}\xi + \frac{\partial f_2}{\partial y_0}\eta + \frac{\partial f_2}{\partial z_0}\zeta \qquad (3) \\ &\vdots \\ \lambda_n &= -L_n + f_n(x_0,\ y_0,\ z_0) + \frac{\partial f_n}{\partial x_0}\xi + \frac{\partial f_n}{\partial y_0}\eta + \frac{\partial f_n}{\partial z_0}\zeta. \end{aligned}$$

Um zu einfacheren Bezeichnungen zu gelangen, setzen wir

$$-L_i + f_i(x_0,\ y_0,\ z_0) = -l_i \qquad (4)$$

und

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_0} = a_i, \quad \frac{\partial f_i}{\partial y_0} = b_i, \quad \frac{\partial f_i}{\partial z_0} = c_i \qquad (5)$$

und erhalten dann die linearen Fehlergleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta \\ \lambda_2 &= -l_2 + a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta \qquad (6) \\ &\vdots \\ \lambda_n &= -l_n + a_n\xi + b_n\eta + c_n\zeta, \end{aligned}$$

auf die die Methode der kleinsten Quadrate angewendet werden kann. Wenn sich nach der Ausgleichung zeigen sollte, daß die Verbesserungen $\xi\ \eta\ \zeta$ Werte erhalten, deren höhere Potenzen nicht zu vernachlässigen sind, so ist die Ausgleichung unter Einführung der neuen Näherungswerte $x_0' = x_0 + \xi$, $y_0' = y_0 + \eta$, $z_0' = z_0 + \zeta$ zu wiederholen.

Um eine Gesamtprobe für die Richtigkeit der Ausgleichung zu erhalten, berechnet man nach der Auflösung der Normalgleichungen die Werte der Verbesserungen λ aus den Gleichungen (6) und setzt diese, sowie die Unbekannten in die ur-

sprünglichen Fehlergleichungen (1) ein, die von ihnen erfüllt werden müssen.

Beispiel. Zur Bestimmung der Koordinaten des Punktes A in Fig. 226 nach der Methode des Vorwärtsabschneidens sind auf den vier gegebenen Punkten G, M, B und K vier Winkel gemessen worden. Die Messungsergebnisse sind

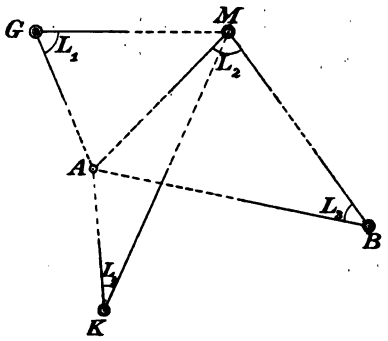


Fig. 226.

$$\begin{aligned} L_1 &= 66^0\ 44'\ 01{,}2'' \\ L_2 &= 81\ \ 05\ \ 25{,}4 \\ L_3 &= 42\ \ 29\ \ 16{,}8 \\ L_4 &= 27\ \ 58\ \ 24{,}1. \end{aligned}$$

Gegeben sind die Koordinaten der vier Festpunkte

$$\begin{aligned} G: y &= +\,2574{,}607 & x &= -\ 9818{,}958 \\ M: y &= +\,5099{,}477 & x &= -\ 9885{,}262 \\ B: y &= +\,6851{,}732 & x &= -\,12421{,}398 \\ K: y &= +\,3387{,}987 & x &= -\,13549{,}155. \end{aligned}$$

Die gemessenen und verbesserten Winkel sind nun als Funktionen der unbekannten Koordinaten x und y des Neupunktes A darzustellen. Indem wir die verbesserten Winkel als Differenzen der Richtungswinkel angeben, gelangen wir nach Fig. 226 zu den folgenden Fehlergleichungen

$$(7)\quad \begin{aligned} L_1 + \lambda_1 &= -\operatorname{arctang}\frac{y_m - y}{x_m - x_g} + \operatorname{arctang}\frac{y - y_g}{x - x_g} \\ L_2 + \lambda_2 &= -\operatorname{arctang}\frac{y_b - y_m}{x_b - x_m} + \operatorname{arctang}\frac{y - y_m}{x - x_m} \\ L_3 + \lambda_3 &= \operatorname{arctang}\frac{y_m - y_b}{x_m - x_b} - \operatorname{arctang}\frac{y - y_b}{x - x_b} \\ L_4 + \lambda_4 &= \operatorname{arctang}\frac{y_m - y_k}{x_m - x_k} - \operatorname{arctang}\frac{y - y_k}{x - x_k}. \end{aligned}$$

Nach den Gleichungen (2) setzen wir

$$x = x_0 + \xi \qquad y = y_0 + \eta$$

und bezeichnen den Punkt, der den Näherungskoordinaten x_0 und y_0 entspricht, mit A_0, während A für die endgültige Lage des Neupunktes vorbehalten bleiben soll. Es ist dann

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= -L_1 - \operatorname{arctang}\frac{y_m - y_g}{x_m - x_g} + \operatorname{arctang}\frac{y_0 - y_g + \eta}{x_0 - x_g + \xi}\\
\lambda_2 &= -L_2 - \operatorname{arctang}\frac{y_b - y_m}{x_b - x_m} + \operatorname{arctang}\frac{y_0 - y_m + \eta}{x_0 - x_m + \xi}\\
\lambda_3 &= -L_3 + \operatorname{arctang}\frac{y_m - y_b}{x_m - x_b} - \operatorname{arctang}\frac{y_0 - y_b + \eta}{x_0 - x_b + \xi}\\
\lambda_4 &= -L_4 + \operatorname{arctang}\frac{y_m - y_k}{x_m - x_k} - \operatorname{arctang}\frac{y_0 - y_k + \eta}{x_0 - x_k + \xi}\,.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Zur Aufstellung der Gleichungen (3) sind die Differentialquotienten (5) für jede der vorstehenden Gleichungen zu berechnen. Für die erste Gleichung ist

$$
\frac{\partial}{\partial x_0}\operatorname{arctang}\frac{y_0 - y_g}{x_0 - x_g} = -\frac{1}{1 + \left(\frac{y_0 - y_g}{x_0 - x_g}\right)^2}\,\frac{y_0 - y_g}{(x_0 - x_g)^2} = -\frac{y_0 - y_g}{s_g^2},
$$

worin

$$
(x_0 - x_g)^2 + (y_0 - y_g)^2 = s_g^2
$$

gesetzt ist. Ebenso ist

$$
\frac{\partial}{\partial y_0}\operatorname{arctang}\frac{y_0 - y_g}{x_0 - x_g} = +\frac{1}{1 + \left(\frac{y_0 - y_g}{x_0 - x_g}\right)^2}\,\frac{1}{(x_0 - x_g)} = +\frac{x_0 - x_g}{s_g^2}\,.
$$

Sollen die Verbesserungen λ in Sekunden berechnet werden, so sind die beiden Differentialquotienten noch mit ϱ'' zu multiplizieren. Die erste Fehlergleichung wird dann

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 = -L_1 &- \operatorname{arctang}\frac{y_m - y_g}{x_m - x_g} + \operatorname{arctang}\frac{y_0 - y_g}{x_0 - x_g}\\
&- \frac{y_0 - y_g}{s_g^2}\,\varrho''\,\xi + \frac{x_0 - x_g}{s_g^2}\,\varrho''\,\eta
\end{aligned}
$$

oder auch

$$
\lambda_1 = -L_1 - (G,M) + (G,A_0) - \frac{y_0 - y_g}{s_g^2}\,\varrho''\,\xi + \frac{x_0 - x_g}{s_g^2}\,\varrho''\,\eta.
$$

Entsprechend geben die übrigen Fehlergleichungen

$$\lambda_2 = -L_2 - (M,B) + (M,A_0) - \frac{y_0 - y_m}{s_m^2}\varrho''\xi + \frac{x_0 - x_m}{s_m^2}\varrho''\eta$$

$$(9)\quad \lambda_3 = -L_3 + (B,M) - (B,A_0) - \frac{y_0 - y_b}{s_b^2}\varrho''\xi + \frac{x_0 - x_b}{s_b^2}\varrho''\eta$$

$$\lambda_4 = -L_4 + (K,M) - (K,A_0) - \frac{y_0 - y_k}{s_k^2}\varrho''\xi + \frac{x_0 - x_k}{s_k^2}\varrho''\eta,$$

womit die Fehlergleichungen die einfache Form der Gleichungen (6) angenommen haben.

Für die Zahlenrechnung ermitteln wir durch eine vorläufige Berechnung die Näherungskoordinaten

$$y_0 = +3288{,}39 \qquad x_0 = -11607{,}10$$

des Neupunktes. Hieraus und aus den Koordinaten der Festpunkte ergeben sich die folgenden Richtungswinkel

$(G,M) = 91^0\ 30'\ 15{,}4''$	$(B,A_0) = 282^0\ 52'\ 20{,}2''$
$(G,A_0) = 158^0\ 14'\ 21{,}9''$	$(B,M) = 325^0\ 21'\ 31{,}7''$
$(M,B) = 145^0\ 21'\ 31{,}7''$	$(K,A_0) = 357^0\ 03'\ 50{,}8''$
$(M,A_0) = 226^0\ 26'\ 49{,}4''$	$(K,M) = 25^0\ 02'\ 18{,}0''$.

Bezeichnen wir die Absolutglieder der Fehlergleichungen (9) mit $-l_1$, $-l_2$, $-l_3$ und $-l_4$, so wird mit den vorstehenden Richtungswinkeln und den gemessenen Winkeln L von S. 347

$-l_1 = +5{,}3''$	$-l_3 = -5{,}3''$
$-l_2 = -7{,}7''$	$-l_4 = +3{,}1''$.

Die Entfernungen s, die in den Koeffizienten von ξ und η vorkommen, brauchen nur bis auf einige Meter genau bekannt zu sein. Die Berechnung der Koeffizienten, die wieder mit a und b bezeichnet werden mögen, erfolgt mit vierstelligen Logarithmen. Es ergibt sich

$a_1 = -39{,}7$	$b_1 = -99{,}6$
$a_2 = +60{,}0$	$b_2 = -57{,}0$
$a_3 = -55{,}1$	$b_3 = -12{,}6$
$a_4 = -5{,}4$	$b_4 = -106{,}0$.

Hiermit erhalten wir die Fehlergleichungen

$$(10)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= +5{,}3 - 39{,}7\,\xi - 99{,}6\,\eta \\ \lambda_2 &= -7{,}7 + 60{,}0\,\xi - 57{,}0\,\eta \\ \lambda_3 &= -5{,}3 - 55{,}1\,\xi - 12{,}6\,\eta \\ \lambda_4 &= +3{,}1 - 5{,}4\,\xi - 106{,}0\,\eta, \end{aligned}$$

und die Normalgleichungen

$$(11)\qquad \begin{aligned} +8241\,\xi + 1801\,\eta - 397{,}12 &= 0 \\ +1801\,\xi + 24565\,\eta - 350{,}80 &= 0, \end{aligned}$$

aus denen sich die Unbekannten

$$\xi = +0{,}046 \text{ m} \qquad \eta = +0{,}011 \text{ m}$$

ergeben. Die endgültigen Koordinaten des Neupunktes werden

$$y = +3288{,}401 \text{ m} \qquad x = -11607{,}054 \text{ m}.$$

Zur Ausführung der Schlußprobe erhalten wir aus den linearen Fehlergleichungen (10) die Verbesserungen

$$\lambda_1 = +2{,}4'' \qquad \lambda_3 = -8{,}0''$$
$$\lambda_2 = -5{,}6'' \qquad \lambda_4 = +1{,}7''$$

und setzen nun alles in die ursprünglichen Fehlergleichungen (7) ein. Einer Neurechnung bedürfen nur die letzten Glieder dieser Gleichungen, die jetzt die Richtungswinkel der von den Festpunkten nach dem endgültigen Neupunkt gerichteten Strahlen darstellen. Wir finden aus den Koordinaten

$$\begin{aligned} (G,A) &= 158^0\ 14'\ 18{,}9'' \\ (M,A) &= 226^0\ 26'\ 51{,}4'' \\ (B,A) &= 282^0\ 52'\ 22{,}8'' \\ (K,A) &= 357^0\ 03'\ 52{,}5''. \end{aligned}$$

Die Einsetzung der gefundenen Zahlen in die Gleichungen (7) gibt für die linken und rechten Seiten die folgenden Werte:

links	rechts
66° 44′ 03,6″	66° 44′ 03,5″
81 05 19,8	81 05 19,7
42 29 08,8	42 29 08,9
27 58 25,8	27 58 25,5,

die bis auf geringe Abweichungen übereinstimmen.

§ 142. Auflösung der Normalgleichungen. Summenprobe.

Bei wenigen Normalgleichungen ist es gleichgültig, welche Auflösungsmethode angewendet wird. Ist ihre Anzahl jedoch groß, so empfiehlt sich ein von *C. F. Gauß* angegebenes Eliminationsverfahren, nach dem die Bestimmung der Unbekannten in übersichtlicher Form vor sich geht, und das von Stufe zu Stufe durch eine durchgreifende Rechenprobe geprüft werden kann. Aus den Fehlergleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \lambda_2 &= -l_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ &\vdots \\ \lambda_n &= -l_n + a_n x + b_n y + c_n z \end{aligned}$$

geht ein System von drei Normalgleichungen

$$(2)\qquad \begin{aligned} [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z - [al] &= 0 \\ [ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z - [bl] &= 0 \\ [ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z - [cl] &= 0 \end{aligned}$$

hervor. Es wird nun die erste Normalgleichung mit dem Faktor $-\frac{[ab]}{[aa]}$ multipliziert und zur zweiten Gleichung hinzugefügt, woraus sich ergibt

$$+\left([bb]-\frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}\right)y+\left([bc]-\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}\right)z-\left([bl]-\frac{[ab]\,[al]}{[aa]}\right)=0.$$

Hierauf wird die erste Gleichung mit dem Faktor $-\frac{[ac]}{[aa]}$ multipliziert und zur dritten Gleichung hinzugefügt, womit diese übergeht in

$$+\left([bc]-\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}\right)y+\left([cc]-\frac{[ac]\,[ac]}{[aa]}\right)z-\left([cl]-\frac{[ac]\,[al]}{[aa]}\right)=0.$$

Zur einfacheren Bezeichnung der Koeffizienten setzen wir

$$(3)\qquad \begin{aligned} \left([bb]-\frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}\right) &= [bb\cdot 1] \\ \left([bc]-\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}\right) &= [bc\cdot 1] \\ &\vdots \end{aligned}$$

und erhalten

$$(4)\qquad \begin{aligned} [bb\cdot 1]\,y + [bc\cdot 1]\,z - [bl\cdot 1] &= 0 \\ [bc\cdot 1]\,y + [cc\cdot 1]\,z - [cl\cdot 1] &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen bezeichnet man als die *einmal reduzierten Normalgleichungen.*

Wenden wir dasselbe Verfahren zur Elimination der Unbekannten y an, indem wir die erste der Gleichungen (4) mit dem Faktor $-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$ multiplizieren und zur zweiten hinzufügen, so ergibt sich die *zweimal reduzierte Normalgleichung*

$$\left([cc\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1]\,[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)z-\left([cl\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1]\,[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)=0,$$

die in einfacher Bezeichnung der Koeffizienten

$$[cc\cdot 2]\,z-[cl\cdot 2]=0 \tag{5}$$

lautet.

Mit dieser Eliminationsmethode läßt sich eine einfache Rechenprobe verbinden, die zugleich das Aufstellen der Normalgleichungen aus den Fehlergleichungen prüft. Wir berechnen hierzu die Koeffizientensummen der Fehlergleichungen

$$\begin{aligned} s_1&=a_1+b_1+c_1\\ s_2&=a_2+b_2+c_2\\ &\vdots\\ s_n&=a_n+b_n+c_n \end{aligned} \tag{6}$$

und bilden aus ihnen die Summen

$$\begin{aligned} a_1s_1+a_2s_2+a_3s_3+\cdots+a_ns_n&=[as]\\ b_1s_1+b_2s_2+b_3s_3+\cdots+b_ns_n&=[bs]\\ c_1s_1+c_2s_2+c_3s_3+\cdots+c_ns_n&=[cs]\\ -l_1s_1-l_2s_2-l_3s_3-\cdots-l_ns_n&=-[ls]. \end{aligned} \tag{7}$$

Diese Werte lassen sich andererseits aus den Normalgleichungen finden. Multiplizieren wir nämlich die Gleichungen (6) der Reihe nach mit a_1, $a_2\cdots a_n$, und bilden ihre Summe, so ergibt sich

$$[as]=\quad[aa]+[ab]+[ac]$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} [bs]&=\quad[ab]+[bb]+[bc]\\ [cs]&=\quad[ac]+[bc]+[cc]\\ -[ls]&=-[al]-[bl]-[cl]. \end{aligned} \tag{8}$$

Bilden wir nun die Summe der Normalgleichungen, so folgt aus (8), daß die Koeffizienten der Summengleichung gleich

den nach den Gl. (7) berechneten Größen $[as]$, $[bs]$, $[cs]$ und $-[ls]$ sind. Wir haben also bei der Aufstellung der Normalgleichungen außer den Koeffizienten der letzteren noch die Koeffizienten der Summengleichung nach (7) zu berechnen und dann die folgenden Gleichungen zusammenzustellen:

$$\begin{array}{l} [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z - [al] = 0 \\ [ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z - [bl] = 0 \\ [ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z - [cl] = 0 \\ \hline [as]\,x + [bs]\,y + [cs]\,z - [ls] = 0. \end{array} \tag{9}$$

Die Rechenprobe besteht darin, daß die Summe der drei ersten Gleichungen die letzte, die Summengleichung, ergeben muß.

Die Abhängigkeit der Summengleichung von den Normalgleichungen bleibt auch bei der Reduktion der letzteren bestehen. Multiplizieren wir nämlich die erste Normalgleichung mit $-\frac{[as]}{[aa]}$ und addieren sie zur Summengleichung, so erhalten wir

$$\left([bs]-\frac{[as]\,[ab]}{[aa]}\right)y+\left([cs]-\frac{[as]\,[ac]}{[aa]}\right)z-\left([ls]-\frac{[as]\,[al]}{[aa]}\right)=0 \tag{10}$$

oder mit einfacheren Bezeichnungen

$$[bs\cdot 1]\,y + [cs\cdot 1]\,z - [ls\cdot 1] = 0. \tag{11}$$

Es ist aber

$$[bs\cdot 1]=[bs]-\frac{[as]\,[ab]}{[aa]}=[ab]+[bb]+[bc]-\frac{[ab]}{[aa]}([aa]+[ab]+[ac])$$

$$= [bb] - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]} + [bc] - \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}$$

oder

$$[bs\cdot 1] = [bb\cdot 1] + [bc\cdot 1].$$

Ebenso läßt sich zeigen, daß

$$\begin{aligned} [cs\cdot 1] &= [bc\cdot 1] + [cc\cdot 1] \\ -[ls\cdot 1] &= -[bl\cdot 1] - [cl\cdot 1] \end{aligned}$$

ist. Wenn also nach (10) bezw. (11) die *einmal reduzierte Summengleichung* gebildet wird, so stimmt diese mit der Summe der einmal reduzierten Normalgleichungen überein. Wir erhalten somit die folgende Zusammenstellung

$$
\begin{array}{l}
[bb\cdot 1]\,y + [bc\cdot 1]\,z - [bl\cdot 1] = 0 \\
[bc\cdot 1]\,y + [cc\cdot 1]\,z - [cl\cdot 1] = 0 \\
\hline
[bs\cdot 1]\,y + [cs\cdot 1]\,z - [ls\cdot 1] = 0.
\end{array} \tag{12}
$$

Dieselbe Probe läßt sich nun auch auf die mehrfach reduzierten Normalgleichungen anwenden. Im vorliegenden Falle multiplizieren wir die erste Gl. (12) mit $-\frac{[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$ und addieren sie zur Summengleichung, woraus sich ergibt

$$
\left([cs\cdot 1] - \frac{[bs\cdot 1]\,[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right) z - \left([ls\cdot 1] - \frac{[bs\cdot 1]\,[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right) = 0. \tag{13}
$$

Diese *zweimal reduzierte Summengleichung* ist, wie sich dem Vorhergehenden entsprechend leicht zeigen läßt, identisch mit der zweimal reduzierten Normalgleichung, es müssen somit die beiden Gleichungen

$$
\begin{array}{l}
[cc\cdot 2]\,z - [cl\cdot 2] = 0 \\
\hline
[cs\cdot 2]\,z - [ls\cdot 2] = 0
\end{array} \tag{14}
$$

übereinstimmen.

§ 143. Beispiel.

Auf einem Dreieckspunkt wurden zwischen fünf Zielen die in Fig. 227 bezeichneten sechs Winkel gemessen. Die Beobachtungen sind

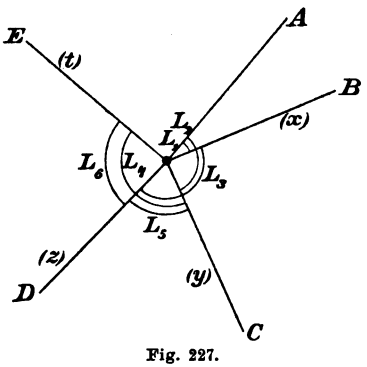


Fig. 227.

$$
\begin{array}{lll}
L_1 = & 34^0\ 28'\ 24'' \\
L_2 = & 121\ \ 52\ \ 21 \\
L_3 = & 153\ \ 21\ \ 48 \\
L_4 = & 147\ \ 11\ \ 56 \\
L_5 = & 65\ \ 57\ \ 24 \\
L_6 = & 81\ \ 14\ \ 23.
\end{array} \tag{1}
$$

Da zur Bestimmung der fünf Richtungen nur vier Winkelmessungen erforderlich sind, so ist eine Ausgleichung der sechs gemessenen Winkel vor ihrer weiteren Verwendung erforderlich. Wir bezeichnen die vier ausgeglichenen Winkel zwischen dem Strahl A und den Strahlen B, C, D und E mit x, y, z und t und erhalten dann die Fehlergleichungen

$$
\begin{aligned}
L_1 + \lambda_1 &= x \\
L_2 + \lambda_2 &= y \\
L_3 + \lambda_3 &= z - x \\
L_4 + \lambda_4 &= t - y \\
L_5 + \lambda_5 &= z - y \\
L_6 + \lambda_6 &= t - z.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Zur Erleichterung der Rechnung führen wir Näherungswerte der Unbekannten ein, indem wir setzen

$$
\begin{aligned}
x &= 34^0\ 28'\ 24'' + \xi \\
y &= 121\ \ 52\ \ 21\ \ + \eta \\
z &= 187\ \ 49\ \ 45\ \ + \zeta \\
t &= 269\ \ 04\ \ 17\ \ + \tau
\end{aligned} \tag{3}
$$

und erhalten dann

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0 + \xi \cdot \cdot \cdot & s_1 &= +1 \\
\lambda_2 &= 0 \cdot + \eta \cdot \cdot & s_2 &= +1 \\
\lambda_3 &= -27 - \xi \cdot + \zeta \cdot & s_3 &= 0 \\
\lambda_4 &= 0 \cdot - \eta \cdot + \tau & s_4 &= 0 \\
\lambda_5 &= 0 \cdot - \eta + \zeta \cdot & s_5 &= 0 \\
\lambda_6 &= +\ 9 \cdot \cdot - \zeta + \tau & s_6 &= 0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Hieraus bilden wir die Normalgleichungen und die Summengleichung

$$
\begin{aligned}
+2\xi \cdot \cdot - 1\zeta \cdot + 27 &= 0 \\
\cdot + 3\eta - 1\zeta - 1\tau + 0 &= 0 \\
-1\xi - 1\eta + 3\zeta + 1\tau - 36 &= 0 \\
\cdot - 1\eta - 1\zeta + 2\tau + 9 &= 0 \\
\hline
+1\xi + 1\eta \cdot \cdot \cdot &= 0.
\end{aligned}
$$

Indem wir hieran die Elimination der Unbekannten anknüpfen, erhalten wir die folgenden Systeme:

a) Die einmal reduzierten Gleichungen

$$
\begin{aligned}
+3\eta - 1\zeta - 1\tau + 0 &= 0 \\
-1\eta + 2{,}5\zeta - 1\tau - 22{,}5 &= 0 \\
-1\eta - 1\zeta + 2\tau + 9 &= 0 \\
\hline
+1\eta + 0{,}5\zeta \cdot - 13{,}5 &= 0.
\end{aligned}
$$

b) Die zweimal reduzierten Gleichungen

$$
\begin{aligned}
+2{,}17\zeta - 1{,}33\tau - 22{,}5 &= 0 \\
-1{,}33\zeta + 1{,}67\tau + 9{,}0 &= 0 \\
\hline
+0{,}84\zeta + 0{,}34\tau - 13{,}5 &= 0.
\end{aligned}
$$

c) Die dreimal reduzierten Gleichungen

$$\begin{array}{r} +0{,}85\,\tau - 4{,}79 = 0 \\ \hline +0{,}85\,\tau - 4{,}79 = 0\,. \end{array}$$

Hieraus ergeben sich die Werte der Unbekannten

$$\begin{array}{ll} \xi = -6{,}6'' & \zeta = +13{,}8'' \\ \eta = +6{,}5 & \tau = +5{,}6 \end{array}$$

und die der ausgeglichenen Winkel

$$\begin{array}{lrrr} x = & 34^0 & 28' & 17{,}4'' \\ y = & 121 & 52 & 27{,}5 \\ z = & 187 & 49 & 58{,}8 \\ t = & 269 & 04 & 22{,}6. \end{array}$$

Um auch noch die Schlußprobe anwenden zu können, die die Einführung der Näherungswerte in die Fehlergleichungen prüft, berechnen wir die Verbesserungen λ und erhalten

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = -6{,}6'' & \lambda_4 = -0{,}9'' \\ \lambda_2 = +6{,}5 & \lambda_5 = +7{,}3 \\ \lambda_3 = -6{,}6 & \lambda_6 = +0{,}8\,. \end{array}$$

Werden diese, sowie die Winkel $x\,y\,z\,t$ in die ursprünglichen Fehlergleichungen (2) eingesetzt, so werden die letzteren erfüllt.

§ 144. Prüfung der Quadratsumme der Verbesserungen.

Eine weitere Rechenprobe läßt erkennen, ob die Quadratsumme der Verbesserungen λ durch die Ausgleichung wirklich den Minimalwert erreicht hat, denn letzterer läßt sich schon vor der Berechnung der einzelnen λ ermitteln.

Wir multiplizieren die Fehlergleichungen

$$(1) \qquad \begin{array}{l} \lambda_1 = -l_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \lambda_2 = -l_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ \quad\vdots \\ \lambda_n = -l_n + a_n x + b_n y + c_n z \end{array}$$

der Reihe nach mit l_1, $l_2 \cdots l_n$ und bilden ihre Summe, woraus wir erhalten

$$(2) \qquad [\lambda l] = -[ll] + [al]x + [bl]y + [cl]z\,.$$

Multiplizieren wir hierauf die Gl. (1) nochmals mit λ_1, λ_2 $\cdots$ λ_n, so gibt ihre Summe

$$[\lambda\lambda] = -[\lambda l] + [a\lambda]x + [b\lambda]y + [c\lambda]z. \tag{3}$$

Wird die Berechnung der λ nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeführt, so ist nach den Gl. (3) § 139 S. 341

$$[a\lambda] = [b\lambda] = [c\lambda] = 0,$$

folglich ist nach (2) und (3)

$$[\lambda\lambda] = -[\lambda l]$$

oder

$$[\lambda\lambda] = [ll] - [al]x - [bl]y - [cl]z. \tag{4}$$

Diese Gl. (4) kann als Rechenprobe dienen, indem man nach ihr den Wert von $[\lambda\lambda]$ berechnet und letzteren noch einmal aus den einzelnen λ ermittelt.

Man kann aber auch die Gl. (4) noch einmal umformen, indem man die Unbekannten mit Hilfe der reduzierten Normalgleichungen eliminiert. Nach der ersten Normalgleichung (2) § 142 S. 351 ist

$$x = -\frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z + \frac{[al]}{[aa]}.$$

Wird dies in (4) eingesetzt, so ergibt sich

$$[\lambda\lambda] = [ll] + \frac{[ab]}{[aa]}[al]y + \frac{[ac]}{[aa]}[al]z - \frac{[al]^2}{[aa]} - [bl]y - [cl]z$$

oder zusammengezogen

$$[\lambda\lambda] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - [bl\cdot 1]y - [cl\cdot 1]z. \tag{5}$$

Zur Elimination von y benutzen wir die erste Gl. (4) § 142 S. 351, und haben hiernach

$$y = -\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}z + \frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]},$$

womit (5) übergeht in

$$[\lambda\lambda] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} + \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bl\cdot 1]z - \frac{[bl\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]} - [cl\cdot 1]z$$

oder

$$[\lambda\lambda] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]} - [cl\cdot 2]z. \tag{6}$$

Endlich haben wir nach Gl. (5) § 142 S. 352 für z den Wert

$$z = + \frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]},$$

womit wir erhalten

$$(7) \qquad [\lambda\lambda] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \frac{[cl \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]}.$$

Wir wenden die Gl. (7) auf das Beispiel von S. 354 an. Aus den Fehlergleichungen und den Normalgleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned} [ll] &= + 810{,}00 \\ - \frac{[al]^2}{[aa]} &= - 364{,}50 \\ - \frac{[bl \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} &= 0 \\ - \frac{[cl \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} &= - 233{,}29 \\ - \frac{[dl \cdot 3]^2}{[dd \cdot 3]} &= - 26{,}98, \end{aligned}$$

folglich wird $[\lambda\lambda] = + 185{,}23.$

Aus den einzelnen Werten der λ von S. 356 finden wir

$$[\lambda\lambda] = + 184{,}11,$$

es stimmen somit beide Berechnungen genügend gut überein.

§ 145. Unmittelbare Berechnung der Unbekannten aus den Fehlergleichungen.

Sind die Fehlergleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= - l_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z, && \text{Koeff.-Summe} = s_1 \\ \lambda_2 &= - l_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z && \text{„ „} = s_2 \\ &\vdots \\ \lambda_n &= - l_n + a_n x + b_n y + c_n z && \text{„ „} = s_n \end{aligned}$$

gegeben, so bilden wir hieraus die erste Normalgleichung

$$(2) \qquad - [al] + [aa]x + [ab]y + [ac]z = 0, \text{ Koeff.-Summe} = [as].$$

Diese Gleichung benutzen wir zur Aufstellung einer fingierten Fehlergleichung von der Form

$$(3) \qquad v_1 = - [al] + [aa]x + [ab]y + [ac]z,$$

$$\text{Koeff.-Summe} = [as], \quad \text{Gew.} = - \frac{1}{[aa]},$$

die wir mit den Fehlergleichungen (1) zusammenfassen, nachdem überall die Glieder mit x gestrichen sind.

Die erste Normalgleichung der Fehlergleichungen (1) und (3) lautet dann

$$-\left([bl]-\frac{[ab][al]}{[aa]}\right)+\left([bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}\right)y+\left([bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}\right)z=0$$

mit der Koeff.-Summe

$$[bs]-\frac{[ab][as]}{[aa]}$$

oder

(4) $\quad -[bl\cdot 1]+[bb\cdot 1]y+[bc\cdot 1]z=0, \quad$ Koeff.-Summe $=[bs\cdot 1]$.

Aus (4) bilden wir wieder eine neue fingierte Fehlergleichung

(5) $\quad v_2=-[bl\cdot 1]+[bb\cdot 1]y+[bc\cdot 1]z, \quad$ Koeff.-Summe $=[bs\cdot 1]$,

$$\text{Gew.}=-\frac{1}{[bb\cdot 1]}.$$

Streichen wir in den Fehlergleichungen (1), (3) und (5) die Glieder mit x und y, und bilden die erste Normalgleichung, so wird analog (4) erhalten

(6) $\quad -[cl\cdot 2]+[cc\cdot 2]z=0, \quad$ Koeff.-Summe $=[cs\cdot 2]$,

woraus z ermittelt werden kann. Die Gl. (4) und (2) ergeben hierauf y und x.

Während die Koeffizienten der Normalgleichungen oder der fingierten Fehlergleichungen von Stufe zu Stufe durch die Summenglieder geprüft werden, ergibt sich eine Probe für die Absolutglieder erst nach der Aufstellung der letzten Normalgleichung (6). Bilden wir nämlich aus den gegebenen und den fingierten Fehlergleichungen die Produkte aus den Absolutgliedern, den Koeffizientensummen und den Gewichten, so ergibt sich deren Summe gleich

$$-[ls]+\frac{[al][as]}{[aa]}+\frac{[bl\cdot 1][bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]},$$

was gleichbedeutend mit $-[ls\cdot 2]$ ist. Es muß aber nach (14) § 142 S. 354

(7) $$-[ls\cdot 2]=-[cl\cdot 2]$$

sein; die Probe besteht also darin, daß die oben gebildete Summe mit dem Absolutgliede der letzten Normalgleichung übereinstimmen muß.

Das vorstehende Verfahren der Elimination der Unbekannten kann übrigens an beliebiger Stelle unterbrochen werden. So können wir, nachdem die Gl. (3) gefunden ist, *beide* Normalgleichungen des neuen Fehlergleichungssystems aufstellen und erhalten, wie leicht einzusehen ist,

$$-[bl\cdot 1]+[bb\cdot 1]y+[bc\cdot 1]z=0$$
$$-[cl\cdot 1]+[bc\cdot 1]y+[cc\cdot 1]z=0,$$

also das System der einmal reduzierten Normalgleichungen. Besonders einfach wird die Elimination einer Unbekannten, wenn sie in allen Fehlergleichungen den Koeffizienten 1 hat. Ist z. B. in den Gl. (1) $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$, so ist die erste Normalgleichung

$$(2^*) \qquad -[l]+nx+[b]y+[c]z=0$$

und die erste fingierte Fehlergleichung wird

$$(3^*) \qquad v_1=-[l]+nx+[b]y+[c]z, \quad \text{Gew.}=-\frac{1}{n}.$$

Dieses Verfahren der Elimination einer Unbekannten ist unter dem Namen *Schreiber*sche *Regel* bekannt.

Wir wenden die vorstehende Methode auf die Fehlergleichungen des § 143 S. 355 an. Es ist

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0+\xi\cdot\cdot\cdot & s_1&=+1\\
\lambda_2 &= 0\cdot+\eta\cdot\cdot & s_2&=+1\\
\lambda_3 &= -27-\xi\cdot+\zeta\cdot & s_3&=0\\
\lambda_4 &= 0\cdot-\eta\cdot+\tau & s_4&=0\\
\lambda_5 &= 0\cdot-\eta+\zeta\cdot & s_5&=0\\
\lambda_6 &= +\,9\cdot\cdot-\zeta+\tau & s_6&=0.
\end{aligned}$$

Hieraus bilden wir der Reihe nach die obigen Gleichungen (2)—(6), zu denen, da vier Unbekannte vorliegen, noch zwei weitere Gleichungen hinzukommen. Wir erhalten

1) $+27+2\xi\cdot-1\zeta\cdot=0,\ [as]=+1$
$v_1=+27(+2\xi)\cdot-1\zeta\cdot,\ s_1'=+1,\ \text{Gew.}=-\frac{1}{2}$

2) $0+3\eta-1\zeta-1\tau=0,\ [bs\cdot 1]=+1$
$v_2=0(+3\eta)-1\zeta-1\tau,\ s_2'=+1,\ \text{Gew.}=-\frac{1}{3}$

3) $-22{,}5+2{,}17\zeta-1{,}33\tau=0,\ [cs\cdot 2]=+0{,}84$
$v_3=-22{,}5(+2{,}17\zeta)-1{,}33\tau,\ s_3'=+0{,}83,\ \text{Gew.}=-\frac{1}{2{,}17}$

4) $-4{,}79+0{,}85\tau=0,\ [ds\cdot 3]=+0{,}84.$

Zur Prüfung des Absolutgliedes der letzten Gleichung wird für alle neun Fehlergleichungen das Produkt aus dem Absolutgliede, der Koeffizientensumme und dem Gewicht gebildet und als Summe dieser Produkte — 4,79 gefunden, übereinstimmend mit dem Absolutgliede der letzten Normalgleichung. Die Unbekannten ergeben sich aus den vorstehenden Gleichungen in Übereinstimmung mit den S. 356 gefundenen Werten.

§ 146. Der mittlere Fehler einer Beobachtung.

Zur Berechnung des mittleren Fehlers einer Beobachtung benutzen wir, wie es bereits im § 12 S. 29 geschehen ist, die Quadratsumme der Verbesserungen λ. Wir gehen hierzu von n Fehlergleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \lambda_2 &= -l_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ &\vdots \\ \lambda_n &= -l_n + a_n x + b_n y + c_n z \end{aligned}$$

mit drei Unbekannten aus, aus denen wir nach der Reduktion der Normalgleichungen die folgenden drei Endgleichungen erhalten:[1])

$$(2)\qquad \begin{aligned} x + \frac{[ab]}{[aa]} y + \frac{[ac]}{[aa]} z &= \frac{[al]}{[aa]} = u_1 \\ y + \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} z &= \frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} = u_2 \\ z &= \frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]} = u_3 . \end{aligned}$$

Die drei Größen u_1, u_2, u_3, die von den Beobachtungen abhängen, sind zur Vereinfachung der Bezeichnungen eingeführt.

Hieraus ergeben sich die Unbekannten

$$(3)\qquad \begin{aligned} z &= u_3 \\ y &= u_2 - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} u_3 \\ x &= u_1 - \frac{[ab]}{[aa]} u_2 + \frac{[ab]}{[aa]} \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} u_3 - \frac{[ac]}{[aa]} u_3 , \end{aligned}$$

1) Vgl. *F. R. Helmert*, Zur Ableitung der Formel von *C. F. Gauß* für den mittleren Beobachtungsfehler und ihrer Genauigkeit. Sitzungsberichte der Kgl. Pr. Ak. d. Wissenschaften. 1904. XXX.

die wir in die Fehlergleichungen (1) einsetzen. Die erste Fehlergleichung geht hiermit über in

$$\lambda_1 = -l_1 + a_1 u_1 + \left(b_1 - a_1 \frac{[ab]}{[aa]}\right) u_2 + \left(c_1 - a_1 \frac{[ac]}{[aa]}\right) u_3 - \left(b_1 - a_1 \frac{[ab]}{[aa]}\right) \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} u_3 .$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} b_1 - a_1 \frac{[ab]}{[aa]} &= b_1' \\ c_1 - a_1 \frac{[ac]}{[aa]} &= c_1' \\ c_1' - b_1' \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} &= c_1'', \end{aligned} \tag{4}$$

so wird

$$\lambda_1 = -l_1 + a_1 u_1 + b_1' u_2 + c_1'' u_3$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -l_2 + a_2 u_1 + b_2' u_2 + c_2'' u_3 \\ \lambda_3 &= -l_3 + a_3 u_1 + b_3' u_2 + c_3'' u_3 \\ &\vdots \\ \lambda_n &= -l_n + a_n u_1 + b_n' u_2 + c_n'' u_3 . \end{aligned} \tag{5}$$

Wir bezeichnen die den wahren Werten der Beobachtungen entsprechenden Werte von u_1, u_2 und u_3 mit U_1, U_2 und U_3. Werden diese in die Gleichungen (5) eingesetzt, so gehen die Verbesserungen λ in die wahren Fehler ε der Beobachtungen über. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -l_1 + a_1 U_1 + b_1' U_2 + c_1'' U_3 \\ \varepsilon_2 &= -l_2 + a_2 U_1 + b_2' U_2 + c_2'' U_3 \\ &\vdots \\ \varepsilon_n &= -l_n + a_n U_1 + b_n' U_2 + c_n'' U_3 \end{aligned} \tag{6}$$

und aus (5) und (6)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \varepsilon_1 + a_1(u_1 - U_1) + b_1'(u_2 - U_2) + c_1''(u_3 - U_3) \\ \lambda_2 &= \varepsilon_2 + a_2(u_1 - U_1) + b_2'(u_2 - U_2) + c_2''(u_3 - U_3) \\ &\vdots \\ \lambda_n &= \varepsilon_n + a_n(u_1 - U_1) + b_n'(u_2 - U_2) + c_n''(u_3 - U_3). \end{aligned} \tag{7}$$

Da es erlaubt ist, in die Fehlergleichungen (1) beliebige andere Unbekannte einzuführen, so können an ihrer Stelle auch die Gleichungen (5) der Ausgleichung unterworfen werden. Aus den hierbei gefundenen Werten von u_1, u_2, u_3 können dann

nach (2) die Unbekannten x, y, z berechnet werden. Ebenso können aber auch aus den Gl. (7), die durch Transformation der Fehlergleichungen (5) entstanden sind, Normalgleichungen aufgestellt werden. Vorher sollen jedoch noch ein paar wichtige Beziehungen zwischen den Koeffizienten abgeleitet werden.

Es ist

$$[ab'] = a_1 b_1' + a_2 b_2' + \cdots + a_n b_n'$$
$$= a_1\left(b_1 - a_1\frac{[ab]}{[aa]}\right) + a_2\left(b_2 - a_2\frac{[ab]}{[aa]}\right) + \cdots + a_n\left(b_n - a_n\frac{[ab]}{[aa]}\right)$$

oder

$$[ab'] = 0.$$

Ebenso finden wir

$$\begin{aligned}[ac''] &= 0\\ [b'c''] &= 0.\end{aligned} \tag{8}$$

Unter Berücksichtigung dieser Beziehungen lauten die Normalgleichungen zu den Fehlergleichungen (7)

$$\begin{aligned}[aa](u_1 - U_1) + [a\varepsilon] &= 0\\ [b'b'](u_2 - U_2) + [b'\varepsilon] &= 0\\ [c''c''](u_3 - U_3) + [c''\varepsilon] &= 0.\end{aligned} \tag{9}$$

Quadrieren wir die Gleichungen (7) und bilden ihre Summe, so ergibt sich mit Rücksicht auf (8):

$$[\lambda\lambda] = [\varepsilon\varepsilon] + [aa](u_1 - U_1)^2 + [b'b'](u_2 - U_2)^2 + [c''c''](u_3 - U_3)^2$$
$$+ 2[a\varepsilon](u_1 - U_1) + 2[b'\varepsilon](u_2 - U_2) + 2[c''\varepsilon](u_3 - U_3).$$

Hieraus eliminieren wir die Unbekannten mit Hilfe der Normalgleichungen (9) und erhalten

$$[\lambda\lambda] = [\varepsilon\varepsilon] - \frac{[a\varepsilon]^2}{[aa]} - \frac{[b'\varepsilon]^2}{[b'b']} - \frac{[c''\varepsilon]^2}{[c''c'']}. \tag{10}$$

Die Glieder rechter Hand lassen sich nicht zahlenmäßig berechnen, jedoch ist es möglich, Durchschnittswerte anzugeben, die sie bei unendlich vielen Fällen annehmen würden.

Die Durchschnittswerte der einzelnen ε^2 sind gleich μ^2, folglich ist für das erste Glied der Durchschnittswert $n\mu^2$ zu setzen.

Im zweiten Gliede ist

$$[a\varepsilon]^2 = a_1^2\varepsilon_1^2 + a_2^2\varepsilon_2^2 + \cdots + a_n^2\varepsilon_n^2 + 2a_1a_2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2a_1a_3\varepsilon_1\varepsilon_3 + \cdots$$
$$\cdots + 2a_{n-1}a_n\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n.$$

Die Durchschnittswerte der quadratischen Glieder sind hierin $a_1^2\mu^2$, $a_2^2\mu^2, \ldots$, die der übrigen sind bei Voraussetzung eines geraden Fehlergesetzes gleich Null. Ebenso ergeben sich die Durchschnittswerte von $[b'\varepsilon]^2$ und $[c''\varepsilon]^2$ zu $[b'b']\mu^2$ bzw. $[c''c'']\mu^2$, und die Gleichung (10) geht hiermit über in

$$[\lambda\lambda] = n\mu^2 - \mu^2 - \mu^2 - \mu^2$$

oder

$$\mu^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n-3}.$$

Für m Unbekannte würde die Entwicklung geben

$$\mu^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n-m}. \tag{11}$$

Die bereits in § 12 S. 30 gefundene Gl. (5) ist in der vorstehenden Gleichung als spezieller Fall enthalten.

§ 147. Ermittlung der genauesten Werte der Unbekannten.

Nachdem wir die Methode der kleinsten Quadrate als bequemes Ausgleichungsprinzip kennen gelernt haben, das nach dem Bisherigen ohne Zweifel günstige Werte der Unbekannten liefert, wollen wir die Aufgabe behandeln, aus den Beobachtungen die *genauesten* Werte der Unbekannten zu finden, d. h. diejenigen, die die kleinsten mittleren Fehler haben.

Wir gehen von den Fehlergleichungen

$$\begin{aligned} L_1 + \lambda_1 &= f_1(x, y, z) \\ L_2 + \lambda_2 &= f_2(x, y, z) \\ &\vdots \\ L_n + \lambda_n &= f_n(x, y, z) \end{aligned} \tag{1}$$

aus, in denen die L die Beobachtungen, die λ deren Verbesserungen und die $f(x, y, z)$ beliebige Funktionen der Unbekannten sind. Die Ausgleichung der Beobachtungen gibt uns die Unbekannten als Funktionen der letzteren, so daß wir erhalten

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(L_1, L_2 \ldots L_n) \\ y &= \varphi_2(L_1, L_2 \ldots L_n) \\ z &= \varphi_3(L_1, L_2 \ldots L_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Wir nehmen an, daß Näherungswerte x_0, y_0, z_0 der Unbekannten bestimmt sind, und berechnen aus den Gl. (1) die ihnen

entsprechenden Werte der λ, die wir mit $-l$ bezeichnen. Es wird dann

$$\begin{aligned} L_1 - l_1 &= f_1(x_0, y_0, z_0) \\ L_2 - l_2 &= f_2(x_0, y_0, z_0) \\ &\vdots \\ L_n - l_n &= f_n(x_0, y_0, z_0). \end{aligned} \tag{3}$$

Die Gl. (2) gelten für beliebige Werte der Beobachtungen, sie verlieren deshalb ihre Gültigkeit nicht, wenn wir die Größen $L_1 - l_1$, $L_2 - l_2, \ldots L_n - l_n$ als Beobachtungen einführen. Für diese Beobachtungen werden die Verbesserungen λ sämtlich gleich Null und die Werte der Unbekannten sind x_0, y_0, z_0. Wir erhalten somit aus (2)

$$\begin{aligned} x_0 &= \varphi_1(L_1 - l_1, L_2 - l_2, \ldots L_n - l_n) \\ y_0 &= \varphi_2(L_1 - l_1, L_2 - l_2, \ldots L_n - l_n) \\ z_0 &= \varphi_3(L_1 - l_1, L_2 - l_2, \ldots L_n - l_n). \end{aligned} \tag{4}$$

Unter der Voraussetzung, daß die Näherungswerte der Unbekannten von ihren endgültigen Werten nur wenig abweichen, werden die Größen $l_1, l_2 \ldots l_n$ klein sein, und wenn wir die obigen Funktionen in Reihen entwickeln, so können diese auf die Glieder erster Ordnung beschränkt werden. Es wird dann

$$\begin{aligned} x_0 &= \varphi_1(L_1, L_2, \ldots L_n) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial L_1} l_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial L_2} l_2 - \cdots - \frac{\partial \varphi_1}{\partial L_n} l_n \\ y_0 &= \varphi_2(L_1, L_2, \ldots L_n) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial L_1} l_1 - \frac{\partial \varphi_2}{\partial L_2} l_2 - \cdots - \frac{\partial \varphi_2}{\partial L_n} l_n \\ z_0 &= \varphi_3(L_1, L_2, \ldots L_n) - \frac{\partial \varphi_3}{\partial L_1} l_1 - \frac{\partial \varphi_3}{\partial L_2} l_2 - \cdots - \frac{\partial \varphi_3}{\partial L_n} l_n. \end{aligned} \tag{5}$$

Setzen wir

$$x - x_0 = \xi, \qquad y - y_0 = \eta, \qquad z - z_0 = \zeta \tag{5*}$$

und

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial L_i} = \alpha_i, \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial L_i} = \beta_i, \qquad \frac{\partial \varphi_3}{\partial L_i} = \gamma_i,$$

so ist nach (5) und (2)

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \cdots + \alpha_n l_n \\ \eta &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \cdots + \beta_n l_n \\ \zeta &= \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \cdots + \gamma_n l_n. \end{aligned} \tag{6}$$

Wenden wir die Reihenentwicklung auch auf die Fehlergleichungen (1) an, und bezeichnen die Differentialquotienten

der Funktionen f nach x_0, y_0 und z_0 mit a, b und c, so ist mit Rücksicht auf (3)

$$(7)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta \\ \lambda_2 &= -l_2 + a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta \\ &\vdots \\ \lambda_n &= -l_n + a_n\xi + b_n\eta + c_n\zeta. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten auch für die *wahren* Werte ξ', η', ζ' der Größen ξ, η, ζ und für die wahren Werte l_1', $l_2' \ldots l_n'$ der Größen l_1, $l_2 \ldots l_n$, jedoch werden dann die Verbesserungen λ gleich Null. Es ist also

$$(8)\qquad \begin{aligned} 0 &= -l_1' + a_1\xi' + b_1\eta' + c_1\zeta' \\ 0 &= -l_2' + a_2\xi' + b_2\eta' + c_2\zeta' \\ &\vdots \\ 0 &= -l_n' + a_n\xi' + b_n\eta' + c_n\zeta' \end{aligned}$$

und nach (6)

$$(9)\qquad \begin{aligned} \xi' &= \alpha_1 l_1' + \alpha_2 l_2' + \cdots + \alpha_n l_n' \\ \eta' &= \beta_1 l_1' + \beta_2 l_2' + \cdots + \beta_n l_n' \\ \zeta' &= \gamma_1 l_1' + \gamma_2 l_2' + \cdots + \gamma_n l_n'. \end{aligned}$$

Aus (8) und (9) ergibt sich:

$$(10)\qquad \begin{aligned} \xi' &= [a\alpha]\xi' + [b\alpha]\eta' + [c\alpha]\zeta' \\ \eta' &= [a\beta]\xi' + [b\beta]\eta' + [c\beta]\zeta' \\ \zeta' &= [a\gamma]\xi' + [b\gamma]\eta' + [c\gamma]\zeta'. \end{aligned}$$

Da die Gleichungen (10) für beliebige Werte von ξ', η' und ζ' gelten müssen, so müssen die Koeffizienten der drei Unbekannten gleich Null sein. Es bestehen also die neun Gleichungen

$$(11)\qquad \begin{array}{lll} [a\alpha] - 1 = 0 & [a\beta] = 0 & [a\gamma] = 0 \\ [b\alpha] = 0 & [b\beta] - 1 = 0 & [b\gamma] = 0 \\ [c\alpha] = 0 & [c\beta] = 0 & [c\gamma] - 1 = 0. \end{array}$$

Hieraus folgen unmittelbar drei weitere Beziehungen. Multiplizieren wir nämlich die Gleichungen (7) mit α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$, so gibt ihre Summe

$$[\alpha\lambda] = -[\alpha l] + [a\alpha]\xi + [b\alpha]\eta + [c\alpha]\zeta,$$

woraus wegen (6) und (11) folgt

$$[\alpha\lambda] = 0.$$

Ebenso wird gefunden

$$\begin{aligned}[\beta\lambda] &= 0\\ [\gamma\lambda] &= 0.\end{aligned} \tag{12}$$

Nun kehren wir zu den Gl. (6) zurück und bestimmen die Koeffizienten $\alpha\beta\gamma$ so, daß die mittleren Fehler der drei Unbekannten ξ, η und ζ möglichst klein werden, wobei jedoch die Bedingungsgleichungen (11) erfüllt bleiben müssen. Da die Beobachtungen gleich genau angenommen werden sollen, so ist nach der Fehlerhäufungsregel (4) § 10 S. 26

$$\mu_x^2 = \mu_\xi^2 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2)\mu^2$$

oder

$$\mu_x^2 = [\alpha\alpha]\mu^2$$

und ebenso

$$\begin{aligned}\mu_y^2 &= [\beta\beta]\mu^2\\ \mu_z^2 &= [\gamma\gamma]\mu^2,\end{aligned} \tag{13}$$

worin μ den mittleren Fehler einer Beobachtung bezeichnet.

Es sind somit die Minima der Größen $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$ und $[\gamma\gamma]$ mit den Nebenbedingungen (11) zu ermitteln. Wir multiplizieren die auf α bezüglichen drei Gleichungen (11) mit den unbestimmten Faktoren $-2Q_{11}$, $-2Q_{12}$, $-2Q_{13}$ und addieren sie zu $[\alpha\alpha]$, so daß die Funktion

$$[\alpha\alpha] - 2Q_{11}([a\alpha] - 1) - 2Q_{12}[b\alpha] - 2Q_{13}[c\alpha] \tag{14}$$

zu einem absoluten Minimum zu machen ist. Setzen wir ihre partiellen Differentialquotienten nach $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ gleich Null, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a_1 Q_{11} + b_1 Q_{12} + c_1 Q_{13}\\ \alpha_2 &= a_2 Q_{11} + b_2 Q_{12} + c_2 Q_{13}\\ &\vdots\\ \alpha_n &= a_n Q_{11} + b_n Q_{12} + c_n Q_{13}.\end{aligned} \tag{15}$$

Um die unbestimmten Koeffizienten Q_{11}, Q_{12} und Q_{13} berechnen zu können, multiplizieren wir die Gl. (15) mit $a_1, a_2 \ldots a_n$ und erhalten mit Rücksicht auf (11)

$$1 = [aa]Q_{11} + [ab]Q_{12} + [ac]Q_{13}$$

und in entsprechender Weise

$$\begin{aligned}0 &= [ab]Q_{11} + [bb]Q_{12} + [bc]Q_{13}\\ 0 &= [ac]Q_{11} + [bc]Q_{12} + [cc]Q_{13}.\end{aligned} \tag{16}$$

Sind die Gl. (16) aufgelöst, die Koeffizienten α nach (15) berechnet, so geben die Gl. (6) und (5*) den Wert von ξ und x.

Denselben Weg schlagen wir zur Berechnung von y ein. Unter Einführung dreier neuer Koeffizienten ist das absolute Minimum der Funktion

$$(14^*) \quad [\beta\beta] - 2Q_{21}[a\beta] - 2Q_{22}([b\beta] - 1) - 2Q_{23}[c\beta]$$

zu suchen, woraus hervorgeht

$$(15^*) \quad \begin{aligned} \beta_1 &= a_1 Q_{21} + b_1 Q_{22} + c_1 Q_{23} \\ \beta_2 &= a_2 Q_{21} + b_2 Q_{22} + c_2 Q_{23} \\ &\vdots \\ \beta_n &= a_n Q_{21} + b_n Q_{22} + c_n Q_{23}. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten ergibt sich:

$$(16^*) \quad \begin{aligned} 0 &= [aa]Q_{21} + [ab]Q_{22} + [ac]Q_{23} \\ 1 &= [ab]Q_{21} + [bb]Q_{22} + [bc]Q_{23} \\ 0 &= [ac]Q_{21} + [bc]Q_{22} + [cc]Q_{23}. \end{aligned}$$

Endlich erhalten wir für die dritte Unbekannte in analoger Weise

$$(15^{**}) \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= a_1 Q_{31} + b_1 Q_{32} + c_1 Q_{33} \\ \gamma_2 &= a_2 Q_{31} + b_2 Q_{32} + c_2 Q_{33} \\ &\vdots \\ \gamma_n &= a_n Q_{31} + b_n Q_{32} + c_n Q_{33} \end{aligned}$$

und

$$(16^{**}) \quad \begin{aligned} 0 &= [aa]Q_{31} + [ab]Q_{32} + [ac]Q_{33} \\ 0 &= [ab]Q_{31} + [bb]Q_{32} + [bc]Q_{33} \\ 1 &= [ac]Q_{31} + [bc]Q_{32} + [cc]Q_{33}. \end{aligned}$$

Hiermit ist die Aufgabe der Bestimmung der *genauesten* Werte der Unbekannten gelöst. Es läßt sich jedoch aus den gefundenen Gleichungssystemen ein wichtiger Schluß ziehen. Multiplizieren wir die Gleichungen (15) mit $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ und bilden ihre Summe, so ist mit Rücksicht auf (12)

$$0 = [a\lambda]Q_{11} + [b\lambda]Q_{12} + [c\lambda]Q_{13},$$

welche Gleichung aber nur dann für beliebige Werte von Q_{11}, Q_{12} und Q_{13} bestehen kann, wenn

$$[a\lambda] = 0, \qquad [b\lambda] = 0, \qquad [c\lambda] = 0$$

ist. Diese drei Gleichungen bilden aber nach § 139 S. 341 die

Grundgleichungen der Methode der kleinsten Quadrate. Da die Gl. (15*) und (15**) zu demselben Resultat führen, so ist erwiesen, daß die Methode der kleinsten Quadrate zugleich die genauesten Werte der Unbekannten liefert.

§ 148. Die mittleren Fehler der Unbekannten.

Nach (13) § 147 S. 367 ist

$$\mu_x^2 = [\alpha\alpha]\mu^2, \tag{1}$$

es könnte somit nach der Berechnung der Koeffizienten α der mittlere Fehler von x sofort angegeben werden. Da die Unbekannten jedoch aus den Normalgleichungen berechnet werden, also die Größen α kein Interesse bieten, so ist es bequemer, $[\alpha\alpha]$ auf andere Weise zu ermitteln. Multiplizieren wir die Gl. (15) des vorigen Paragraphen mit $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, und bilden ihre Summe, so wird mit Rücksicht auf (11)

$$[\alpha\alpha] = Q_{11} \tag{2}$$

und folglich

$$\mu_x^2 = Q_{11}\mu^2. \tag{3}$$

Ebenso finden wir

$$\mu_y^2 = Q_{22}\mu^2$$

und

$$\mu_z^2 = Q_{33}\mu^2.$$

Bezeichnen wir mit g_x, g_y, g_z die Gewichte der drei Unbekannten, und setzen das Gewicht einer Beobachtung gleich der Einheit, so ist nach (5) § 11 S. 29

$$\mu_x^2 = \frac{\mu^2}{g_x}, \qquad \mu_y^2 = \frac{\mu^2}{g_y}, \qquad \mu_z^2 = \frac{\mu^2}{g_z}$$

und folglich

$$g_x = \frac{1}{Q_{11}}, \qquad g_y = \frac{1}{Q_{22}}, \qquad g_z = \frac{1}{Q_{33}}. \tag{4}$$

Es sind demnach die drei Größen Q_{11}, Q_{22}, Q_{33} die *Gewichtsreziproken* der Unbekannten, und man bezeichnet die drei Gleichungssysteme (16), (16*) und (16**) des § 147, aus denen sie berechnet werden, als *Gewichtsgleichungen*. Es läßt sich noch leicht zeigen, daß $Q_{12} = Q_{21}$, $Q_{13} = Q_{31}$ usw. ist, was für manche Berechnungen von Wichtigkeit ist.

Beispiel. Um die Genauigkeit der in § 138 S. 339 bestimmten Konstanten zweier Meßkeile zu ermitteln, berechnen wir zunächst aus den Fehlergleichungen die Verbesserungen λ und erhalten in Millimetern

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = +0{,}03 & \lambda_4 = -0{,}02 & \lambda_7 = +0{,}04 \\ \lambda_2 = -0{,}01 & \lambda_5 = -0{,}01 & \lambda_8 = -0{,}04 \\ \lambda_3 = 0{,}00 & \lambda_6 = -0{,}05 & \lambda_9 = +0{,}01. \end{array}$$

Werden die λ in Hundertstel-Millimetern ausgedrückt, so wird der mittlere Fehler einer Messung

$$\mu = \sqrt{\frac{73}{7}} = \pm 3{,}03 \; {}^{1}/_{100} \text{ mm}.$$

Zur Bestimmung der Gewichtsreziproken haben wir die Gewichtsgleichungen

$$\begin{array}{llll} 9{,}00\,Q_{11} - & 6{,}90\,Q_{12} = 1 & 9{,}00\,Q_{21} - & 6{,}90\,Q_{22} = 0 \\ -6{,}90\,Q_{11} + & 1534{,}19\,Q_{12} = 0 & -6{,}90\,Q_{21} + & 1534{,}19\,Q_{22} = 1. \end{array}$$

Die Auflösung dieser beiden Gleichungssysteme erfolgt ebenfalls nach dem *Gauß*schen Eliminationsverfahren. Sie läßt sich unmittelbar mit der der Normalgleichungen verbinden, da nur die Absolutglieder von den letzteren abweichen. Als einmal reduzierte Gewichtsgleichungen finden wir

$$+1528{,}90\,Q_{12} = +0{,}767 \quad \text{und} \quad +1528{,}90\,Q_{22} = 1,$$

woraus sich ergibt

$$\begin{array}{ll} Q_{12} = +0{,}000\,502 & Q_{22} = +0{,}000\,654 \\ Q_{11} = +0{,}111\,496. & \end{array}$$

Nehmen wir hierzu noch $\mu = \pm 0{,}0303$ mm, so wird

$$\mu_\alpha = 0{,}3339\,\mu \qquad \mu_\beta = 0{,}0256\,\mu$$

oder

$$\mu_\alpha = \pm 0{,}011 \text{ mm} \qquad \mu_\beta = \pm 0{,}000\,83.$$

Das vollständige Resultat der Ausgleichung ist somit

$$\alpha = +19{,}727 \pm 0{,}011 \text{ mm} \qquad \beta = +0{,}19903 \pm 0{,}000\,83.$$

§ 149. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen ungleicher Genauigkeit.

Anschließend an die Entwicklungen des § 147 nehmen wir jetzt an, daß die Beobachtungen nicht gleich genau sind, son-

dern die mittleren Fehler $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n$ bzw. die Gewichte $g_1, g_2 \ldots g_n$ haben. An die Stelle der Gl. (13) S. 367 treten dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mu_x^2 &= \alpha_1^2\mu_1^2 + \alpha_2^2\mu_2^2 + \cdots + \alpha_n^2\mu_n^2 \\ \mu_y^2 &= \beta_1^2\mu_1^2 + \beta_2^2\mu_2^2 + \cdots + \beta_n^2\mu_n^2 \\ \mu_z^2 &= \gamma_1^2\mu_1^2 + \gamma_2^2\mu_2^2 + \cdots + \gamma_n^2\mu_n^2, \end{aligned}$$

oder, wenn wir nach (5) § 11 S. 29

$$\mu_1^2 = \frac{\mu^2}{g_1}, \qquad \mu_2^2 = \frac{\mu^2}{g_2}, \ldots \mu_n^2 = \frac{\mu^2}{g_n}$$

setzen, worin μ der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist, so wird

$$(1) \qquad \mu_x^2 = \left[\frac{\alpha\alpha}{g}\right]\mu^2, \qquad \mu_y^2 = \left[\frac{\beta\beta}{g}\right]\mu^2, \qquad \mu_z^2 = \left[\frac{\gamma\gamma}{g}\right]\mu^2.$$

Es sind somit für die Bestimmung der genauesten Werte der Unbekannten die Koeffizienten α, β und γ so zu bestimmen, daß die Ausdrücke $\left[\frac{\alpha\alpha}{g}\right]$, $\left[\frac{\beta\beta}{g}\right]$ und $\left[\frac{\gamma\gamma}{g}\right]$ Minima werden, wobei jedoch die Bedingungen (11) § 147 S. 366 berücksichtigt werden müssen.

Analog den Entwicklungen des § 147 erhalten wir die Bedingungen des Minimums von $\left[\frac{\alpha\alpha}{g}\right]$

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{\alpha_1}{g_1} &= a_1 Q_{11} + b_1 Q_{12} + c_1 Q_{13} \\ \frac{\alpha_2}{g_2} &= a_2 Q_{11} + b_2 Q_{12} + c_2 Q_{13} \\ &\vdots \\ \frac{\alpha_n}{g_n} &= a_n Q_{11} + b_n Q_{12} + c_n Q_{13} \end{aligned}$$

und zur Berechnung der Koeffizienten Q_{11}, Q_{12} und Q_{13} finden wir

$$(3) \qquad \begin{aligned} [aag]\,Q_{11} + [abg]\,Q_{12} + [acg]\,Q_{13} &= 1 \\ [abg]\,Q_{11} + [bbg]\,Q_{12} + [bcg]\,Q_{13} &= 0 \\ [acg]\,Q_{11} + [bcg]\,Q_{12} + [ccg]\,Q_{13} &= 0. \end{aligned}$$

Von Wichtigkeit ist es, das allgemeine Prinzip dieser Ausgleichung festzustellen. Multiplizieren wir die Gl. (2) mit $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$, und berücksichtigen, daß nach (12) § 147 S. 366/367

$$[\alpha\lambda] = [\beta\lambda] = [\gamma\lambda] = 0$$

ist, so wird

$$[\alpha\lambda] = [a\lambda g]\,Q_{11} + [b\lambda g]\,Q_{12} + [c\lambda g]\,Q_{13} = 0,$$

und hieraus folgt, da die Gleichung für beliebige Werte der drei Größen Q_{11}, Q_{12} und Q_{13} gelten muß

$$[a\lambda g] = 0, \qquad [b\lambda g] = 0, \qquad [c\lambda g] = 0. \tag{4}$$

Die Ausdrücke $[a\lambda g]$, $[b\lambda g]$ und $[c\lambda g]$ sind aber, wie die Gl. (7) § 147 S. 366 lehren, die halben Differentialquotienten der Funktion $[\lambda\lambda g]$ in bezug auf ξ, η, ζ. Aus den Gleichungen (4) geht also hervor, daß bei der vorstehenden Berechnung der Unbekannten die Summe der Quadrate der Verbesserungen multipliziert mit den Gewichten der Beobachtungen ein Minimum wird. Dies ist der verallgemeinerte Grundsatz der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate.

§ 150. Zusammenstellung der Formeln.

Die Entwicklung der Gebrauchsformeln bietet nun keine Schwierigkeiten mehr, weshalb wir uns auf eine Zusammenstellung derselben beschränken. Es mögen die Fehlergleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z, && \text{Gew. } g_1 \\ \lambda_2 &= -l_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z && \text{„ } g_2 \\ &\vdots && \vdots \\ \lambda_n &= -l_n + a_n x + b_n y + c_n z && \text{„ } g_n \end{aligned} \tag{1}$$

gegeben sein. Die Gl. (4) des vorigen Paragraphen enthalten bereits die Normalgleichungen, die wir mit Hilfe der Fehlergleichungen auf die Form

$$\begin{aligned} [aag]x + [abg]y + [acg]z - [alg] &= 0 \\ [abg]x + [bbg]y + [bcg]z - [blg] &= 0 \\ [acg]x + [bcg]y + [ccg]z - [clg] &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

bringen. Außer den Gl. (3) § 149 S. 371 sind zur Berechnung der Gewichtsreziproken noch die beiden entsprechenden Systeme aufzustellen, so daß wir im Zusammenhang haben

$$\begin{aligned} [aag]Q_{11} + [abg]Q_{12} + [acg]Q_{13} &= 1 \\ [abg]Q_{11} + [bbg]Q_{12} + [bcg]Q_{13} &= 0 \\ [acg]Q_{11} + [bcg]Q_{12} + [ccg]Q_{13} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} [aag]Q_{21} + [abg]Q_{22} + [acg]Q_{23} &= 0 \\ [abg]Q_{21} + [bbg]Q_{22} + [bcg]Q_{23} &= 1 \\ [acg]Q_{21} + [bcg]Q_{22} + [ccg]Q_{23} &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

$$
\begin{aligned}
[aag]\,Q_{31} + [abg]\,Q_{32} + [acg]\,Q_{33} &= 0\\
[abg]\,Q_{31} + [bbg]\,Q_{32} + [bcg]\,Q_{33} &= 0\\
[acg]\,Q_{31} + [bcg]\,Q_{32} + [ccg]\,Q_{33} &= 1.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Die mittleren Fehler der Unbekannten ergeben sich aus den Gleichungen

$$\mu_x^2 = Q_{11}\mu^2, \quad \mu_y^2 = Q_{22}\mu^2, \quad \mu_z^2 = Q_{33}\mu^2. \tag{6}$$

Wie die Gl. (2)—(6) zeigen, kann man die Gewichte vernachlässigen, wenn man die Fehlergleichungen (1) der Reihe nach mit $\sqrt{g_1}, \sqrt{g_2} \ldots \sqrt{g_n}$ multipliziert. Die Ausgleichung ist dann auf den Fall des § 139 zurückgeführt, in dem für alle Beobachtungen das Gewicht Eins vorausgesetzt wurde. Wird mit den so umgeformten Fehlergleichungen die Entwicklung des § 146 noch einmal durchgeführt, so ergibt sich für den mittleren Fehler der auf die Gewichtseinheit reduzierten Beobachtungen der Ausdruck

$$\mu^2 = \frac{[\lambda\lambda g]}{n-m}. \tag{7}$$

Beispiel. Zur Bestimmung der Höhen von vier Nivellementspunkten X, Y, Z und T sind von den Festpunkten A und B aus die in Fig. 228 dargestellten Nivellementszüge gemessen, bei denen die Pfeile die Richtung der Steigung angeben. Die gemessenen Höhenunterschiede L und die Zuglängen e sind

$L_1 = 18{,}917$ m	$e_1 = 2{,}4$ km
$L_2 = 8{,}010$ „	$e_2 = 2{,}8$ „
$L_3 = 10{,}895$ „	$e_3 = 4{,}6$ „
$L_4 = 20{,}574$ „	$e_4 = 3{,}7$ „
$L_5 = 9{,}682$ „	$e_5 = 5{,}2$ „
$L_6 = 15{,}573$ „	$e_6 = 5{,}8$ „
$L_7 = 5{,}889$ „	$e_7 = 3{,}6$ „
$L_8 = 17{,}485$ „	$e_8 = 6{,}3$ „
$L_9 = 1{,}933$ „	$e_9 = 4{,}2$ „

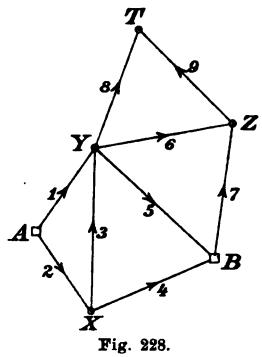


Fig. 228.

Gegeben sind die Höhen der beiden Festpunkte A und B

$$H_a = 76{,}372, \quad H_b = 104{,}965.$$

Bezeichnen wir die zu berechnenden Höhen der Neupunkte mit x, y, z und t, so erhalten wir die folgenden Fehlergleichungen

$$
\begin{aligned}
L_1 + \lambda_1 &= y - H_a \\
L_2 + \lambda_2 &= x - H_a \\
L_3 + \lambda_3 &= y - x \\
L_4 + \lambda_4 &= H_b - x \\
L_5 + \lambda_5 &= H_b - y \\
L_6 + \lambda_6 &= z - y \\
L_7 + \lambda_7 &= z - H_b \\
L_8 + \lambda_8 &= t - y \\
L_9 + \lambda_9 &= t - z.
\end{aligned}
$$

Zur Vereinfachung der Rechnung führen wir Näherungswerte der Unbekannten ein, indem wir setzen:

$$
\begin{aligned}
x &= 84{,}382 + \xi \\
y &= 95{,}289 + \eta \\
z &= 110{,}854 + \zeta \\
t &= 112{,}774 + \tau.
\end{aligned}
$$

Die Gewichte der Nivellementszüge sind nach S. 203 umgekehrt proportional den Längen. Setzen wir das Gewicht eines Zuges von 10 km Länge gleich der Einheit, so sind die Gewichte

$$g_1 = \frac{10}{e_1}, \qquad g_2 = \frac{10}{e_2} \text{ usw.}$$

Hiermit können wir die Fehlergleichungen und ihre Gewichte angeben. Es ist

$$
\begin{array}{llll}
\lambda_1 = & 0 \cdot + \eta \cdot \cdot & g_1 = 4{,}2 & s_1 = +1 \\
\lambda_2 = & 0 + \xi \cdot \cdot \cdot & g_2 = 3{,}6 & s_2 = +1 \\
\lambda_3 = +12 - \xi + \eta \cdot \cdot & & g_3 = 2{,}2 & s_3 = 0 \\
\lambda_4 = +\ 9 - \xi \cdot \cdot \cdot & & g_4 = 2{,}7 & s_4 = -1 \\
\lambda_5 = -\ 6 \cdot - \eta \cdot \cdot & & g_5 = 1{,}9 & s_5 = -1 \\
\lambda_6 = -\ 8 \cdot - \eta + \zeta \cdot & & g_6 = 1{,}7 & s_6 = 0 \\
\lambda_7 = & 0 \cdot \cdot + \zeta \cdot & g_7 = 2{,}8 & s_7 = +1 \\
\lambda_8 = & 0 \cdot - \eta \cdot + \tau & g_8 = 1{,}6 & s_8 = 0 \\
\lambda_9 = -13 \cdot \cdot - \zeta + \tau & & g_9 = 2{,}4 & s_9 = 0.
\end{array}
$$

Zugleich sind auch die Koeffizientensummen s für die Summenproben beigefügt.

Die Aufstellung und Auflösung der Normalgleichungen und Gewichtsgleichungen geht aus der folgenden Tabelle hervor.

$+8{,}5\,\xi - 2{,}2\,\eta \cdot \cdot - 50{,}7 = 0$	1	0	0	0
$-2{,}2\,\xi + 11{,}6\,\eta - 1{,}7\,\zeta - 1{,}6\,\tau + 51{,}4 = 0$	0	1	0	0
$\cdot - 1{,}7\,\eta + 6{,}9\,\zeta - 2{,}4\,\tau + 17{,}6 = 0$	0	0	1	0
$\cdot - 1{,}6\,\eta - 2{,}4\,\zeta + 4{,}0\,\tau - 31{,}2 = 0$	0	0	0	1
$+6{,}3\,\xi + 6{,}1\,\eta + 2{,}8\,\zeta + 0{,}0\,\tau - 12{,}9 = 0$	1	1	1	1
$+11{,}0\,\eta - 1{,}7\,\zeta - 1{,}6\,\tau + 38{,}28 = 0$	$+0{,}26$	1	0	0
$-1{,}7\,\eta + 6{,}9\,\zeta - 2{,}4\,\tau + 17{,}60 = 0$	0	0	1	0
$-1{,}6\,\eta - 2{,}4\,\zeta + 4{,}0\,\tau - 31{,}20 = 0$	0	0	0	1
$+7{,}7\,\eta + 2{,}8\,\zeta \cdot + 24{,}68 = 0$	$+0{,}26$	1	1	1
$+6{,}6\,\zeta - 2{,}6\,\tau + 23{,}52 = 0$	$+0{,}04$	$+0{,}15$	1	0
$-2{,}6\,\zeta + 3{,}8\,\tau - 25{,}63 = 0$	$+0{,}04$	$+0{,}15$	0	1
$+4{,}0\,\zeta + 1{,}2\,\tau - 2{,}11 = 0$	$+0{,}08$	$+0{,}30$	$+1{,}00$	$+1{,}00$
$+2{,}8\,\tau - 16{,}37 = 0$	$+0{,}06$	$+0{,}21$	$+0{,}39$	$+1{,}00$
$+2{,}8\,\tau - 16{,}37 = 0$	$+0{,}06$	$+0{,}21$	$+0{,}39$	$+1{,}00$

Es ergibt sich

$\xi = +5{,}25 \quad Q_{11} = +0{,}125$

$\eta = -2{,}76 \quad Q_{12} = +0{,}029 \quad Q_{22} = +0{,}111$

$\zeta = -1{,}23 \quad Q_{13} = +0{,}014 \quad Q_{23} = +0{,}052 \quad Q_{33} = +0{,}208$

$\tau = +5{,}85 \quad Q_{14} = +0{,}021 \quad Q_{24} = +0{,}075 \quad Q_{34} = +0{,}139 \quad Q_{44} = 0{,}357,$

und für die Unbekannten erhalten wir

$$x = 84{,}387 \qquad z = 110{,}853$$
$$y = 95{,}286 \qquad t = 112{,}780.$$

Zur Berechnung der mittleren Fehler bestimmen wir aus den Fehlergleichungen die Verbesserungen λ und finden

$$\lambda_1 = -2{,}8 \qquad \lambda_4 = +3{,}8 \qquad \lambda_7 = -1{,}2$$
$$\lambda_2 = +5{,}2 \qquad \lambda_5 = -3{,}2 \qquad \lambda_8 = +8{,}6$$
$$\lambda_3 = +4{,}0 \qquad \lambda_6 = -6{,}5 \qquad \lambda_9 = -5{,}9$$

und hieraus

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda g]}{5}} = \sqrt{\frac{502}{5}} = \pm 10{,}0 \text{ mm}$$

als mittleren Fehler eines gemessenen Nivellementszuges von 10 km Länge. Für einen Zug von 1 km Länge ist folglich

$$\mu_1 = \pm 3{,}16 \text{ mm}.$$

Ferner erhalten wir

$\mu_x = \sqrt{0{,}125}\,\mu = \pm 3{,}54$ mm $\qquad \mu_z = \sqrt{0{,}208}\,\mu = \pm 4{,}56$ mm

$\mu_y = \sqrt{0{,}111}\,\mu = \pm 3{,}33$ „ $\qquad \mu_t = \sqrt{0{,}357}\,\mu = \pm 5{,}98$ „ .

§ 151. Äquivalente Fehlergleichungen. Mittlerer Fehler einer Funktion der Unbekannten.

Wenn zwei verschiedene Systeme von Fehlergleichungen auf dieselben Normalgleichungen führen, so ergeben sich aus beiden Systemen dieselben Werte der Unbekannten und ihrer Gewichte. Nach *Helmert* bezeichnet man solche Systeme als *äquivalente Fehlergleichungen*. Wir betrachten hierzu das System der reduzierten Normalgleichungen in der Form (2) § 146 S. 361

$$(1)\qquad \begin{aligned} u_1 &= x + \frac{[ab]}{[aa]}y + \frac{[ac]}{[aa]}z \\ u_2 &= \quad y + \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}z \\ u_3 &= \quad z, \end{aligned}$$

worin

$$u_1 = \frac{[al]}{[aa]}, \qquad u_2 = \frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}, \qquad u_3 = \frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$$

ist. Sehen wir die Größen u als Beobachtungen mit den Gewichten $[aa]$, $[bb\cdot 1]$, $[cc\cdot 2]$, und die Gl. (1) als Fehlergleichungen an, so ergeben sich die folgenden Normalgleichungen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z - [al] &= 0 \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z - [bl] &= 0 \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z - [cl] &= 0, \end{aligned}$$

also dieselben, die aus den ursprünglichen Fehlergleichungen hervorgehen. Es ist somit das fingierte System (1) den ursprünglichen Fehlergleichungen äquivalent. Die fingierten Beobachtungen u_1, u_2, u_3 sind unabhängig voneinander und können mit anderen Beobachtungen zusammen einer neuen Ausgleichung unterworfen werden, durch die sie die Verbesserungen v_1, v_2, v_3 erhalten. Für diesen Zweck stellen wir die Gleichungen noch einmal zusammen

$$(3)\qquad \begin{aligned} v_1 &= -u_1 + x + \frac{[ab]}{[aa]}y + \frac{[ac]}{[aa]}z, & \text{Gew. } p_1 &= [aa] \\ v_2 &= -u_2 \quad + y + \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}z & \text{„ } p_2 &= [bb\cdot 1] \\ v_3 &= -u_3 \quad + z & \text{„ } p_3 &= [cc\cdot 2]. \end{aligned}$$

Wir benutzen die äquivalenten Fehlergleichungen (1), um den mittleren Fehler einer beliebigen Funktion

$$(4)\qquad F = f(x, y, z)$$

der Unbekannten x, y, z zu berechnen. Die Unbekannten sind Funktionen der Beobachtungen l, die deshalb in (4) eingeführt werden müßten; bequemer ist es jedoch, die fingierten Beobachtungen u_1, u_2, u_3 zu benutzen, die die ursprünglichen vollständig ersetzen. Wir erhalten dann

$$F = \varphi(u_1, u_2, u_3),$$

und da die Beobachtungen u voneinander unabhängig sind, so ist nach der Fehlerhäufungsregel

$$\mu_f^2 = \left\{\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\right)^2 \frac{1}{p_1} + \left(\frac{\partial F}{\partial u_2}\right)^2 \frac{1}{p_2} + \left(\frac{\partial F}{\partial u_3}\right)^2 \frac{1}{p_3}\right\} \mu^2. \tag{5}$$

Aus den Gleichungen (1) ergibt sich:

$$\begin{aligned} x &= u_1 - \frac{[ab]}{[aa]} u_2 - \left(\frac{[ac]}{[aa]} - \frac{[ab][bc\cdot 1]}{[aa][bb\cdot 1]}\right) u_3 \\ y &= u_2 - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} u_3 \\ z &= u_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Setzen wir

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = F_2, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = F_3, \tag{7}$$

so ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u_1} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u_1} = F_1 \\ \frac{\partial F}{\partial u_2} &= -F_1 \frac{[ab]}{[aa]} + F_2 \\ \frac{\partial F}{\partial u_3} &= -F_1\left(\frac{[ac]}{[aa]} - \frac{[ab][bc\cdot 1]}{[aa][bb\cdot 1]}\right) - F_2 \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} + F_3. \end{aligned}$$

Entsprechend den Koeffizienten der reduzierten Normalgleichungen und den reduzierten Koeffizienten (4) § 146 S. 362 setzen wir

$$\begin{aligned} F_2 - \frac{[ab]}{[aa]} F_1 &= (F_2 \cdot 1) \\ F_3 - \frac{[ac]}{[aa]} F_1 &= (F_3 \cdot 1) \\ (F_3 \cdot 1) - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}(F_2 \cdot 1) &= (F_3 \cdot 2) \end{aligned}$$

und erhalten dann

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = F_1 \qquad \frac{\partial F}{\partial u_2} = (F_2 \cdot 1) \qquad \frac{\partial F}{\partial u_3} = (F_3 \cdot 2)$$

und aus (5)

$$\mu_f^2 = \left\{\frac{F_1^2}{[aa]} + \frac{(F_2\cdot 1)^2}{[bb\cdot 1]} + \frac{(F_3\cdot 2)^2}{[cc\cdot 2]}\right\} \mu^2. \tag{8}$$

Der Klammerausdruck in (8) ist zugleich die Gewichtsreziproke von F. Für die Anwendung dieser wichtigen Formel hat man die Differentialquotienten F_1, F_2, F_3 nach (7) zu bilden und diese bei der Reduktion der Normalgleichungen mitzuführen, wie es in dem Beispiel § 150 mit den Absolutgliedern der Gewichtsgleichungen geschah.

18. Kapitel.

Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

§ 152. Umwandlung der Fehlergleichungen in Bedingungsgleichungen.

Die Fehlergleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \lambda_2 &= -l_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ &\vdots \\ \lambda_n &= -l_n + a_n x + b_n y + c_n z \end{aligned}$$

lassen sich in eine andere Form bringen, indem man die Unbekannten x, y, z eliminiert. Werden z. B. aus den ersten drei Fehlergleichungen die Unbekannten durch $l_1 + \lambda_1$, $l_2 + \lambda_2$ und $l_3 + \lambda_3$ ausgedrückt und hierauf in die übrigen Gleichungen eingesetzt, so ergeben sich $n - 3$ Gleichungen von der Form

$$(2)\qquad \begin{aligned} a_1'(l_1 + \lambda_1) + a_2'(l_2 + \lambda_2) + \cdots + a_n'(l_n + \lambda_n) &= 0 \\ b_1'(l_1 + \lambda_1) + b_2'(l_2 + \lambda_2) + \cdots + b_n'(l_n + \lambda_n) &= 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

also $n - 3$ *Bedingungsgleichungen*, die von den ausgeglichenen Beobachtungen streng erfüllt werden müssen. Eine ganze Reihe von Aufgaben führt unmittelbar auf derartige Bedingungsgleichungen, und wenn man auch in jedem Falle durch Umkehrung der vorstehenden Elimination beliebige Unbekannte einführen kann, die die Bedingungsgleichungen in Fehlergleichungen umwandeln, so ist es doch meistens bequemer, die Bedingungsgleichungen unmittelbar der Ausgleichung zu unterwerfen. Indem wir die Aufgabe verallgemeinern, nehmen wir an, daß von den ausgeglichenen Beobachtungen r nicht lineare Bedingungsgleichungen erfüllt werden sollen.

§ 153. Bedingte Beobachtungen.

Die r Bedingungsgleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} f_1(l_1+\lambda_1,\ l_2+\lambda_2,\dots l_n+\lambda_n)&=0\\ f_2(l_1+\lambda_1,\ l_2+\lambda_2,\dots l_n+\lambda_n)&=0\\ &\vdots\\ f_r(l_1+\lambda_1,\ l_2+\lambda_2,\dots l_n+\lambda_n)&=0, \end{aligned}$$

in denen $r<n$ ist, müssen von den Verbesserungen λ erfüllt werden, während gleichzeitig $[\lambda\lambda]$ ein Minimum wird. Bevor wir an die Ermittlung der λ gehen, suchen wir die Gl. (1) durch Entwicklung nach *Taylor*s Satz in eine lineare Form zu bringen. Es ist

$$(2)\qquad \begin{aligned} f_1(l_1,l_2\dots l_n)+\frac{\partial f_1}{\partial l_1}\lambda_1+\frac{\partial f_1}{\partial l_2}\lambda_2+\dots+\frac{\partial f_1}{\partial l_n}\lambda_n&=0\\ f_2(l_1,l_2\dots l_n)+\frac{\partial f_2}{\partial l_1}\lambda_1+\frac{\partial f_2}{\partial l_2}\lambda_2+\dots+\frac{\partial f_2}{\partial l_n}\lambda_n&=0\\ &\vdots\\ f_n(l_1,l_2\dots l_n)+\frac{\partial f_n}{\partial l_1}\lambda_1+\frac{\partial f_n}{\partial l_2}\lambda_2+\dots+\frac{\partial f_n}{\partial l_n}\lambda_n&=0. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$f_i(l_1,l_2\dots l_n)=w_i,\qquad \frac{\partial f_1}{\partial l_i}=a_i,\qquad \frac{\partial f_2}{\partial l_i}=b_i \text{ usw.},$$

so ist

$$(3)\qquad \begin{aligned} a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+\dots+a_n\lambda_n+w_1&=0\\ b_1\lambda_1+b_2\lambda_2+\dots+b_n\lambda_n+w_2&=0\\ c_1\lambda_1+c_2\lambda_2+\dots+c_n\lambda_n+w_3&=0\\ &\vdots \end{aligned}$$

Zur Bestimmung derjenigen Werte der λ, die die Quadratsumme $[\lambda\lambda]$ mit Rücksicht auf die Gl. (3) zu einem Minimum machen, multiplizieren wir die letzteren mit unbestimmten Koeffizienten $-2k_1$, $-2k_2\cdots$ und addieren sie zu $[\lambda\lambda]$. Wir beschränken uns hierbei der Einfachheit wegen auf drei Bedingungsgleichungen und erhalten die Funktion

$$\begin{aligned} [\lambda\lambda]&-2k_1(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+\dots+a_n\lambda_n+w_1)\\ &-2k_2(b_1\lambda_1+b_2\lambda_2+\dots+b_n\lambda_n+w_2)\\ &-2k_3(c_1\lambda_1+c_2\lambda_2+\dots+c_n\lambda_n+w_3), \end{aligned}$$

deren absolutes Minimum zu suchen ist. Hierzu finden wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 - 2k_1a_1 - 2k_2b_1 - 2k_3c_1 &= 0 \\ 2\lambda_2 - 2k_1a_2 - 2k_2b_2 - 2k_3c_2 &= 0 \\ &\vdots \\ 2\lambda_n - 2k_1a_n - 2k_2b_n - 2k_3c_n &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a_1k_1 + b_1k_2 + c_1k_3 \\ \lambda_2 &= a_2k_1 + b_2k_2 + c_2k_3 \\ &\vdots \\ \lambda_n &= a_nk_1 + b_nk_2 + c_nk_3, \end{aligned} \tag{4}$$

die als *Korrelatengleichungen* bezeichnet werden. Die Bedingungsgleichungen (3) geben nach Elimination der Verbesserungen λ mit Hilfe der Korrelatengleichungen die *Normalgleichungen*

$$\begin{aligned} [aa]\,k_1 + [ab]\,k_2 + [ac]\,k_3 + w_1 &= 0 \\ [ab]\,k_1 + [bb]\,k_2 + [bc]\,k_3 + w_2 &= 0 \\ [ac]\,k_1 + [bc]\,k_2 + [cc]\,k_3 + w_3 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Bei der zahlenmäßigen Lösung der Aufgabe werden aus den Bedingungsgleichungen unmittelbar die Normalgleichungen aufgestellt, aus diesen die *Korrelaten* k berechnet und dann mit Hilfe der Korrelatengleichungen die λ ermittelt.

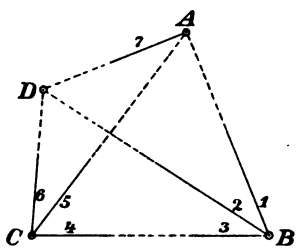


Fig. 229.

§ 154. Beispiel.

Die Höhenunterschiede der vier Dreieckspunkte *A, B, C, D* (Fig. 229) sollen durch trigonometrische Höhenmessung bestimmt werden. Hierzu sind die in der Fig. 229 bezeichneten sieben Zenitdistanzen gemessen. Die Messungsergebnisse, sowie die Logarithmen der Entfernungen und die letzteren selbst sind die folgenden:

$z_1 = 87^0\ 52'\ 20''$	$\log s_1 = 3{,}06831$	$s_1 = 1170$ m
$z_2 = 89\ 31\ 48$	$\log s_2 = 3{,}20531$	$s_2 = 1604$
$z_3 = 89\ 25\ 00$	$\log s_3 = 3{,}26396$	$s_3 = 1836$
$z_4 = 90\ 35\ 41$	$\log s_4 = 3{,}26396$	$s_4 = 1836$
$z_5 = 89\ 27\ 52$	$\log s_5 = 3{,}41539$	$s_5 = 2602$
$z_6 = 90\ 14\ 26$	$\log s_6 = 3{,}11962$	$s_6 = 1317$
$z_7 = 91\ 01\ 06$	$\log s_7 = 3{,}23099$	$s_7 = 1702$

Zur Berechnung des Höhenunterschiedes zweier Punkte haben wir nach (7) § 96 S. 227

$$h = s \operatorname{cotang} z + 0{,}0685\ (s_{km})^2,$$

wobei das Korrektionsglied in Metern erhalten wird. Fügen wir zu den gemessenen Zenitdistanzen z die Verbesserungen λ hinzu, so sollen die aus den verbesserten Zenitdistanzen berechneten Höhenunterschiede die folgenden Bedingungsgleichungen erfüllen:

$$s_5 \operatorname{cotang}(z_5 + \lambda_5) + s_7 \operatorname{cotang}(z_7 + \lambda_7) - s_6 \operatorname{cotang}(z_6 + \lambda_6) + r\,(s_5^2 + s_7^2 - s_6^2) = 0$$

$$\frac{s_3}{2} \operatorname{cotang}(z_3 + \lambda_3) - \frac{s_4}{2} \operatorname{cotang}(z_4 + \lambda_4) + s_5 \operatorname{cotang}(z_5 + \lambda_5) - s_1 \operatorname{cotang}(z_1 + \lambda_1) + r\,(s_5^2 - s_1^2) = 0$$

$$s_1 \operatorname{cotang}(z_1 + \lambda_1) + s_7 \operatorname{cotang}(z_7 + \lambda_7) - s_2 \operatorname{cotang}(z_2 + \lambda_2) + r\,(s_1^2 + s_7^2 - s_2^2) = 0.$$

Hierin ist der Koeffizient $0{,}0685 = r$ gesetzt worden. Da die Punkte B und C durch gegenseitige Zenitdistanzen verbunden sind, so ist in die zweite Gleichung das arithmetische Mittel der beiden Höhenunterschiede eingeführt worden.

Werden diese Gleichungen nach (2) § 153 S. 379 linear gemacht, so ergibt sich, da

$$\frac{d\,(s \operatorname{cotang} z)}{dz} = -\frac{s}{\sin^2 z}$$

ist,

$$s_5 \operatorname{cotang} z_5 + s_7 \operatorname{cotang} z_7 - s_6 \operatorname{cotang} z_6 + r\,(s_5^2 + s_7^2 - s_6^2) - \frac{s_5}{\varrho'' \sin^2 z_5}\lambda_5 - \frac{s_7}{\varrho'' \sin^2 z_7}\lambda_7 + \frac{s_6}{\varrho'' \sin^2 z_6}\lambda_6 = 0$$

$$\frac{s_3}{2} \operatorname{cotang} z_3 - \frac{s_4}{2} \operatorname{cotang} z_4 + s_5 \operatorname{cotang} z_5 - s_1 \operatorname{cotang} z_1 + r\,(s_5^2 - s_1^2) - \frac{s_3}{\varrho'' \sin^2 z_3}\lambda_3 + \frac{s_4}{\varrho'' \sin^2 z_4}\lambda_4 - \frac{s_5}{\varrho'' \sin^2 z_5}\lambda_5 + \frac{s_1}{\varrho'' \sin^2 z_1}\lambda_1 = 0$$

$$s_1 \operatorname{cotang} z_1 + s_7 \operatorname{cotang} z_7 - s_2 \operatorname{cotang} z_2 + r\,(s_1^2 + s_7^2 - s_2^2) - \frac{s_1}{\varrho'' \sin^2 z_1}\lambda_1 - \frac{s_7}{\varrho'' \sin^2 z_7}\lambda_7 + \frac{s_2}{\varrho'' \sin^2 z_2}\lambda_2 = 0.$$

Die Verbesserungen λ sollen hierbei in Minuten berechnet werden.

Zur Aufstellung der Koeffizienten berechnen wir für die sieben Messungen zunächst die folgenden Größen

	$s \cot z$	$r s^2$	$\frac{s}{\varrho' \sin^2 z}$
1	+ 43,48	+ 0,09	+ 0,341
2	+ 13,16	+ 0,18	+ 0,467
3	+ 18,70	+ 0,23	+ 0,534
4	− 19,06	+ 0,23	+ 0,534
5	+ 24,33	+ 0,46	+ 0,757
6	− 5,53	+ 0,12	+ 0,383
7	− 30,26	+ 0,20	+ 0,495

womit wir die Bedingungsgleichungen erhalten

$$-0{,}757\,\lambda_5 - 0{,}495\,\lambda_7 + 0{,}383\,\lambda_6 + 0{,}14 = 0$$
$$-0{,}267\,\lambda_3 + 0{,}267\,\lambda_4 - 0{,}757\,\lambda_5 + 0{,}341\,\lambda_1 + 0{,}10 = 0$$
$$-0{,}341\,\lambda_1 - 0{,}495\,\lambda_7 + 0{,}467\,\lambda_2 + 0{,}17 = 0$$

oder geordnet und nach Multiplikation mit 10, wodurch die Zahlenrechnung übersichtlicher wird,

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & -7{,}57\lambda_5 & +3{,}83\lambda_6 & -4{,}95\lambda_7 + 1{,}40 = 0 \\
+3{,}41\lambda_1 & -2{,}67\lambda_3 & +2{,}67\lambda_4 & -7{,}57\lambda_5 & & +1{,}00 = 0 \\
-3{,}41\lambda_1 & & & & & -4{,}95\lambda_7 + 1{,}70 = 0.
\end{array}$$

Die Normalgleichungen sind

$$\begin{array}{r}
+96{,}5\,k_1 + 57{,}3\,k_2 + 24{,}5\,k_3 + 1{,}40 = 0 \\
+57{,}3\,k_1 + 83{,}2\,k_2 - 11{,}6\,k_3 + 1{,}00 = 0 \\
+24{,}5\,k_1 - 11{,}6\,k_2 + 57{,}9\,k_3 + 1{,}70 = 0 \\
\hline
+49{,}1\,k_2 - 26{,}2\,k_3 + 0{,}17 = 0 \\
-26{,}2\,k_2 + 51{,}7\,k_3 + 1{,}35 = 0 \\
\hline
+37{,}0\,k_3 + 1{,}44 = 0,
\end{array}$$

woraus wir finden

$$k_1 = +0{,}0096 \qquad k_2 = -0{,}0241 \qquad k_3 = -0{,}0389$$

und

$$\lambda_1 = +0{,}050' = +3{,}0'' \qquad \lambda_5 = +0{,}110' = +6{,}6''$$
$$\lambda_2 = -0{,}181 = -10{,}9 \qquad \lambda_6 = +0{,}037 = +2{,}2$$
$$\lambda_3 = +0{,}064 = +3{,}8 \qquad \lambda_7 = +0{,}145 = +8{,}7\,.$$
$$\lambda_4 = -0{,}064 = -3{,}8$$

Die ausgeglichenen Zenitdistanzen sowie die endgültigen Höhenunterschiede sind dann

$$\begin{array}{llll}
z_1 = 87^0\ 52'\ 23'' & & h_1 = +\ 43{,}56 \\
z_2 = 89\ \ 31\ \ 37 & & h_2 = +\ 13{,}43 \\
z_3 = 89\ \ 25\ \ 04 & & h_3 = +\ 18{,}84 \\
z_4 = 90\ \ 35\ \ 37 & & h_4 = -\ 18{,}84 \\
z_5 = 89\ \ 27\ \ 59 & & h_5 = +\ 24{,}70 \\
z_6 = 90\ \ 14\ \ 28 & & h_6 = -\ \ 5{,}42 \\
z_7 = 91\ \ 01\ \ 15 & & h_7 = -\ 30{,}13,
\end{array}$$

wodurch die Bedingungsgleichungen bis auf kleine durch Abrundung entstandene Ungenauigkeiten erfüllt werden.

Eine einfachere Lösung der Aufgabe wird im § 157 S. 389 behandelt werden.

§ 155. Mittlerer Fehler einer Beobachtung. Rechenprobe.

Wenn r Bedingungsgleichungen zwischen n Verbesserungen λ vorliegen, so können r Verbesserungen durch die übrigen ausgedrückt werden. Wir bezeichnen die letzteren mit $x, y, z \cdots u$, und erhalten dann die folgenden Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{array}{ll}
\lambda_1 & = -\,l_1 + a_1'x + b_1'y + c_1'z + \cdots p_1'u \\
\lambda_2 & = -\,l_2 + a_2'x + b_2'y + c_2'z + \cdots p_2'u \\
\vdots & \\
\lambda_r & = -\,l_r + a_r'x + b_r'y + c_r'z + \cdots p_r'u \\
\lambda_{r+1} & = \qquad + \quad x \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
\lambda_{r+2} & = \qquad \cdot \qquad + y \qquad \cdot \qquad \cdot \\
\vdots & \\
\lambda_n & = \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdots + u.
\end{array}$$

Es ergeben sich somit n Fehlergleichungen mit $n - r$ Unbekannten. Der mittlere Fehler einer Beobachtung ist folglich nach (11) § 146 S. 364

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n - (n - r)}}$$

oder

$$(2)\qquad \mu = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{r}}.$$

Multiplizieren wir die Korrelatengleichungen (4) § 153 S. 380 bzw. mit $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$, so gibt ihre Summe

$$[\lambda\lambda] = [a\lambda]\,k_1 + [b\lambda]\,k_2 + [c\lambda]\,k_3.$$

Andererseits erhalten wir aus den Bedingungsgleichungen (3) desselben Paragraphen durch Multiplikation mit k_1, k_2 und k_3 und Summierung

$$[a\lambda]\,k_1 + [b\lambda]\,k_2 + \cdots + [wk] = 0,$$

folglich ist

$$[\lambda\lambda] = -[wk], \tag{3}$$

wodurch wir eine Probe für die Ausgleichung erhalten.

Die Aufstellung und Auflösung der Normalgleichungen wird durch die Summenprobe wie bei der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen geprüft. Eine Schlußprobe endlich, die auch das Linearmachen der Bedingungsgleichungen prüft, erhält man durch Einsetzen der Verbesserungen in die ursprünglichen nicht linearen Bedingungsgleichungen (1) § 153 S. 379.

Wir führen die Berechnung des mittleren Fehlers nach Gl. (2) und die Rechenprobe nach Gl. (3) für das Beispiel des vorhergehenden Paragraphen aus.

Es ist

$\lambda_1^2 = 9{,}0$	$-w_1k_1 \cdot 60^2 = -48{,}4$
$\lambda_2^2 = 118{,}1$	$-w_2k_2 \cdot 60^2 = +86{,}8$
$\lambda_3^2 = 14{,}4$	$-w_3k_3 \cdot 60^2 = +238{,}1$
$\lambda_4^2 = 14{,}4$	$-[wk] \cdot 60^2 = +276{,}5$
$\lambda_5^2 = 43{,}6$	
$\lambda_6^2 = 4{,}8$	$\mu^2 = \frac{280}{3} = 93{,}3$
$\lambda_7^2 = 75{,}7$	
$[\lambda\lambda] = 280{,}0$	$\mu = \pm 9{,}6''$.

Da in $[\lambda\lambda]$ die Verbesserungen in *Sekunden* eingeführt wurden, so mußten die Größen w und k mit 60 multipliziert werden. Die Probe stimmt mit Rücksicht auf die verwendete Rechenschärfe genügend gut.

§ 156. Mittlerer Fehler einer Funktion der ausgeglichenen Beobachtungen.

Die durch die Ausgleichung widerspruchsfrei gemachten Beobachtungen bilden nicht den Endzweck der Messungen, sondern werden zur Berechnung von Unbekannten, z. B. Dreiecks-

seiten, Punktkoordinaten usw. benutzt. Es interessiert nun, mit welcher Genauigkeit diese Unbekannten gefunden werden. Wir nehmen an, es sei eine beliebige Funktion

$$F = F(l_1 + \lambda_1,\ l_2 + \lambda_2,\ \cdots l_n + \lambda_n) \tag{1}$$

der ausgeglichenen Beobachtungen zu berechnen, und wollen den mittleren Fehler von F bestimmen. Da die Verbesserungen λ mit Hilfe der Normalgleichungen aus den Beobachtungen l berechnet werden, so sind die Variabeln der obigen Funktion nicht unabhängig voneinander, weshalb die Fehlerhäufungsregel nicht auf (1) unmittelbar anwendbar ist.

Nach *Taylor*s Satz ist unter Weglassung der Glieder zweiter und höherer Ordnung

$$F = F(l_1, l_2, \cdots l_n) + \frac{\partial F}{\partial l_1}\lambda_1 + \frac{\partial F}{\partial l_2}\lambda_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial l_n}\lambda_n,$$

oder in kürzerer Bezeichnung

$$F = F(l_1, l_2 \cdots l_n) + F_1\lambda_1 + F_2\lambda_2 + \cdots + F_n\lambda_n. \tag{2}$$

Setzen wir an die Stelle der Verbesserungen λ die wahren Fehler der Beobachtungen, so erhalten wir den *wahren* Wert F' der Funktion, und es ist

$$F' = F(l_1, l_2 \cdots l_n) + F_1\varepsilon_1 + F_2\varepsilon_2 + \cdots + F_n\varepsilon_n,$$

und der wahre Fehler des *berechneten* Wertes der Funktion ist

$$\varepsilon_f = F_1\varepsilon_1 + F_2\varepsilon_2 + \cdots + F_n\varepsilon_n - F_1\lambda_1 - F_2\lambda_2 - \cdots - F_n\lambda_n$$

oder

$$\varepsilon_f = [F\varepsilon] - [F\lambda]. \tag{3}$$

Die wahren Fehler der Beobachtungen müssen die Bedingungsgleichungen (3) § 153, S. 379 ebenso erfüllen, wie die Verbesserungen λ, mithin ist

$$\begin{aligned} [a\varepsilon] &= -w_1 \\ [b\varepsilon] &= -w_2 \\ [c\varepsilon] &= -w_3, \end{aligned}$$

und die Normalgleichungen (5) § 153, S. 380 werden

$$\begin{aligned} [aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 - [a\varepsilon] &= 0 \\ [ab]k_1 + [bb]k_2 + [bc]k_3 - [b\varepsilon] &= 0 \\ [ac]k_1 + [bc]k_2 + [cc]k_3 - [c\varepsilon] &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Die Auflösung der Normalgleichungen nach der *Gaußschen* Methode gibt analog (6) § 151, S. 377

$$
\begin{aligned}
k_1 &= [a\varepsilon] - \frac{[ab]}{[aa]}\frac{[b\varepsilon\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} - \left(\frac{[ac]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]}\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)\frac{[c\varepsilon\cdot 2]}{[cc\cdot 2]} \\
k_2 &= \frac{[b\varepsilon\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\frac{[c\varepsilon\cdot 2]}{[cc\cdot 2]} \qquad (5) \\
k_3 &= \frac{[c\varepsilon\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}.
\end{aligned}
$$

Aus den Korrelatengleichungen (4) § 153, S. 380 erhalten wir nach Substitution der vorstehenden Werte der k und Multiplikation mit $F_1, F_2 \cdots F_n$

$$[F\lambda] = [aF]\frac{[a\varepsilon]}{[aa]} + [bF\cdot 1]\frac{[b\varepsilon\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} + [cF\cdot 2]\frac{[c\varepsilon\cdot 2]}{[cc\cdot 2]},$$

worin

$$
\begin{aligned}
&[bF\cdot 1] = [bF] - [aF]\frac{[ab]}{[aa]}, \quad [cF\cdot 1] = [cF] - [aF]\frac{[ac]}{[aa]}, \\
&[cF\cdot 2] = [cF] - [bF\cdot 1]\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}
\end{aligned} \qquad (6)
$$

gesetzt ist. Es wird mithin

$$\varepsilon_f = [F\varepsilon] - [aF]\frac{[a\varepsilon]}{[aa]} - [bF\cdot 1]\frac{[b\varepsilon\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} - [cF\cdot 2]\frac{[c\varepsilon\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}. \qquad (7)$$

In die beiden letzten Glieder rechter Hand führen wir nach (4) § 146, S. 362 die reduzierten Koeffizienten b', c', c'' ein. Es ist

$$[b'\varepsilon] = [b\varepsilon] - [a\varepsilon]\frac{[ab]}{[aa]}, \quad [b'b'] = [bb] - [ab]\frac{[ab]}{[aa]}$$

oder

$$[b'\varepsilon] = [b\varepsilon\cdot 1] \qquad [b'b'] = [bb\cdot 1] \qquad (8)$$

und ebenso

$$[c''\varepsilon] = [c\varepsilon\cdot 2] \qquad [c''c''] = [cc\cdot 2].$$

Folglich wird

$$\varepsilon_f = [F\varepsilon] - [aF]\frac{[a\varepsilon]}{[aa]} - [bF\cdot 1]\frac{[b'\varepsilon]}{[bb\cdot 1]} - [cF\cdot 2]\frac{[c''\varepsilon]}{[cc\cdot 2]}. \qquad (9)$$

Zerlegen wir diesen Ausdruck in einzelne Glieder, die mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n$ multipliziert sind, und bezeichnen den Koeffizienten von ε_i mit A_i, so ist

$$A_i = F_i - \frac{[aF]}{[aa]}a_i - \frac{[bF\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}b_i' - \frac{[cF\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}c_i'' \qquad (10)$$

und

$$\varepsilon_f = A_1\varepsilon_1 + A_2\varepsilon_2 + \cdots A_n\varepsilon_n. \tag{11}$$

Wenn wir die Gleichung (11) quadrieren und für die einzelnen Glieder Durchschnittswerte unendlich vieler Fälle einführen, so ist derjenige von ε_f^2 gleich μ_f^2; die von ε_1^2, $\varepsilon_2^2 \cdots \varepsilon_n^2$ sind gleich μ^2 und die der Produkte $\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\varepsilon_1\varepsilon_3 \cdots$ sind gleich Null. Es wird demnach

$$\mu_f^2 = [AA]\,\mu^2. \tag{12}$$

Nach Gl. (10) wird mit Rücksicht auf (8)

$$[AA] = [FF] - \frac{[aF]^2}{[aa]} - \frac{[bF\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]} - \frac{[cF\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]} + 2\,[ab']\,\frac{[aF][bF\cdot 1]}{[aa]\,[bb\cdot 1]}$$
$$+ 2\,[ac'']\,\frac{[aF]\,[cF\cdot 2]}{[aa]\,[cc\cdot 2]} + 2\,[b'c'']\,\frac{[bF\cdot 1]\,[cF\cdot 2]}{[bb\cdot 1]\;\;[cc\cdot 2]},$$

und da nach (8) § 146, S. 363

$$[ab'] = [ac''] = [b'c''] = 0$$

ist, so wird

$$\mu_f^2 = \mu^2\left\{[FF] - \frac{[aF]^2}{[aa]} - \frac{[bF\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]} - \frac{[cF\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}\right\}. \tag{13}$$

Wenn vor der Ausgleichung die Funktion F und ihr mittlerer Fehler berechnet worden wären, so hätten wir für den letzteren nach der Fehlerhäufungsregel erhalten

$$\mu_f^2 = \mu^2\,[FF].$$

Die Gl. (13) zeigt, in welchem Maße der mittlere Fehler von F durch die Ausgleichung verkleinert wird.

Beispiel. Um die Benutzung der Gl. (13) an einem einfachen Beispiel zu zeigen, berechnen wir für die in § 154, S. 380 erfolgte Ausgleichung einer trigonometrischen Höhenmessung den mittleren Fehler des nach der Ausgleichung berechneten Höhenunterschiedes $C - D$. Es ist

$$F = s_5 \operatorname{cotang}(z_5 + \lambda_5) + r_5,$$

folglich wird der Differentialquotient

$$F_5 = -\frac{s_5}{\varrho'\sin^2 z_5},$$

während alle anderen Differentialquotienten gleich Null sind. Mit den Zahlenwerten von S. 382 ist

$$F_5 = -0{,}757,$$

mithin erhalten wir

$$[FF] = +0{,}573 \quad [bF\cdot 1] = +2{,}328 \quad [cF\cdot 2] = -0{,}213.$$
$$[aF] = +5{,}730 \quad [cF\cdot 1] = -1{,}455$$
$$[bF] = +5{,}730$$
$$[cF] = 0$$

Wir setzen noch von S. 382

$$[aa] = +96{,}5 \quad [bb\cdot 1] = +49{,}1 \quad [cc\cdot 2] = +37{,}0,$$

sowie von S. 384

$$\mu = \pm 9{,}6'' = \pm 0{,}16'$$

hinzu und erhalten nach der vorstehenden Gl. (13)

$$\mu_f^2 = 0{,}0256 \left(0{,}573 - \frac{5{,}730^2}{96{,}5} - \frac{2{,}328^2}{49{,}1} - \frac{0{,}213^2}{37{,}0}\right)$$

oder

$$\mu = \pm 0{,}056 \text{ m}.$$

§ 157. Ausgleichung bedingter Beobachtungen ungleicher Genauigkeit.

In den Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \cdots + a_n\lambda_n + w_1 &= 0 \\ b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \cdots + b_n\lambda_n + w_2 &= 0 \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_n\lambda_n + w_3 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

mögen die λ Verbesserungen von Beobachtungen sein, die verschiedene Gewichte $g_1, g_2 \cdots g_n$ haben. Soll die Quadratsumme $[\lambda\lambda g]$ unter gleichzeitiger Gültigkeit der Gl. (1) ein Minimum werden, so sind die partiellen Differentialquotienten der Funktion

$$\begin{aligned} [\lambda\lambda g] &- 2k_1(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \cdots + a_n\lambda_n + w_1) \\ &- 2k_2(b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \cdots + b_n\lambda_n + w_2) \\ &- 2k_3(c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_n\lambda_n + w_3) \end{aligned}$$

gleich Null zu setzen. Analog den früheren Entwicklungen (§ 153, S. 379) finden wir die Korrelatengleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{g_1}(a_1k_1 + b_1k_2 + c_1k_3) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{g_2}(a_2k_1 + b_2k_2 + c_2k_3) \\ &\vdots \\ \lambda_n &= \frac{1}{g_n}(a_nk_1 + b_nk_2 + c_nk_3) \end{aligned} \tag{2}$$

und die Normalgleichungen

$$\begin{aligned}
\left[\frac{aa}{g}\right] k_1 + \left[\frac{ab}{g}\right] k_2 + \left[\frac{ac}{g}\right] k_3 + w_1 &= 0 \\
\left[\frac{ab}{g}\right] k_1 + \left[\frac{bb}{g}\right] k_2 + \left[\frac{bc}{g}\right] k_3 + w_2 &= 0 \\
\left[\frac{ac}{g}\right] k_1 + \left[\frac{bc}{g}\right] k_2 + \left[\frac{cc}{g}\right] k_3 + w_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda g]}{r}}, \tag{4}$$

wobei r die Anzahl der Bedingungsgleichungen bezeichnet. Als Rechenprobe erhält man

$$[\lambda\lambda g] = -[wk], \tag{5}$$

und der mittlere Fehler einer Funktion

$$F = F(l_1 + \lambda_1,\ l_2 + \lambda_2,\ \cdots\ l_n + \lambda_n)$$

der ausgeglichenen Beobachtungen ergibt sich aus

$$\mu_f^2 = \mu^2 \left\{ \left[\frac{FF}{g}\right] - \frac{\left[\frac{aF}{g}\right]^2}{\left[\frac{aa}{g}\right]} - \frac{\left[\frac{bF}{g}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{g}\cdot 1\right]} - \frac{\left[\frac{cF}{g}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{g}\cdot 2\right]} \right\}, \tag{6}$$

worin F_1, $F_2 \cdots F_n$ die Differentialquotienten von F nach l_1, $l_2 \cdots l_n$ bezeichnen.

Wir benutzen diese Formeln, um das Beispiel von S. 380, die Ausgleichung der trigonometrischen Höhenmessung, noch einmal zu behandeln. Die Koeffizienten der Bedingungsgleichungen hängen fast nur von den Entfernungen s ab, da die Zenitdistanzen z nahezu gleich 90^0 sind. Infolgedessen können wir eine Vereinfachung der Ausgleichung herbeiführen, wenn wir die aus den gemessenen Zenitdistanzen berechneten vorläufigen Höhenunterschiede als *Messungsgrößen* einführen. Wir setzen mithin $\sin^2 z = 1$ und

$$\begin{aligned}
s_1 \frac{\lambda_1}{\varrho''} &= -v_1 \\
s_2 \frac{\lambda_2}{\varrho''} &= -v_2 \\
&\vdots \\
s_n \frac{\lambda_n}{\varrho''} &= -v_n.
\end{aligned}$$

Das negative Vorzeichen der v ist notwendig, da die Zenitdistanzen und die Höhenunterschiede in entgegengesetztem Sinne wachsen. Dies führt aber nur dann zu denselben endgültigen Höhenunterschieden, die die strenge Ausgleichung ergab, wenn den Verbesserungen v die Gewichte $\frac{1}{s^2}$ gegeben werden. Wir führen hierbei das arithmetische Mittel der aus z_3 und z_4 berechneten Höhenunterschiede ein, dem wir die Summe der beiden Einzelgewichte beilegen. Es ergeben sich die folgenden Gewichtsreziproken

$$\frac{1}{g_1} = 1{,}37 \qquad \frac{1}{g_5} = 6{,}75$$
$$\frac{1}{g_2} = 2{,}56 \qquad \frac{1}{g_6} = 1{,}74$$
$$\frac{1}{g_3} = 1{,}70 \qquad \frac{1}{g_7} = 2{,}89$$

und die Bedingungsgleichungen werden

$$\begin{aligned} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad &+ v_5 - v_6 + v_7 + 0{,}14 = 0 \\ - v_1 \quad \cdot \quad &+ v_3 + v_5 \quad \cdot \quad \cdot \quad + 0{,}10 = 0 \\ + v_1 - v_2 \quad \cdot \quad &\cdot \quad \cdot \quad + v_7 + 0{,}17 = 0. \end{aligned}$$

Hieraus bilden wir die Normalgleichungen

$$\begin{aligned} + 11{,}4\, k_1 + 6{,}8\, k_2 + 2{,}9\, k_3 + 0{,}14 &= 0 \\ + 6{,}8\, k_1 + 9{,}9\, k_2 - 1{,}4\, k_3 + 0{,}10 &= 0 \\ + 2{,}9\, k_1 - 1{,}4\, k_2 + 6{,}9\, k_3 + 0{,}17 &= 0, \end{aligned}$$

aus denen wir

$$k_1 = + 0{,}0089 \qquad k_2 = - 0{,}0207 \qquad k_3 = - 0{,}0310$$

finden. Mit Hilfe dieser Korrelaten erhalten wir die Verbesserungen

$$\begin{aligned} v_1 &= - 0{,}01 \text{ m} & v_5 &= - 0{,}08 \text{ m} \\ v_2 &= + 0{,}08 \text{ „} & v_6 &= - 0{,}02 \text{ „} \\ v_3 &= - 0{,}04 \text{ „} & v_7 &= - 0{,}06 \text{ „} \end{aligned}$$

und die endgültigen Höhenunterschiede

$$\begin{aligned} h_1 &= + 43{,}56 \text{ m} & h_5 &= + 24{,}71 \text{ m} \\ h_2 &= + 13{,}42 \text{ „} & h_6 &= - 5{,}43 \text{ „} \\ h_3 &= - 18{,}84 \text{ „} & h_7 &= - 30{,}12 \text{ „} \end{aligned}$$

die hinreichend mit den Resultaten der strengen Ausgleichung übereinstimmen.

Als weiteres Beispiel erwähnen wir die Ausgleichung von Nivellementsnetzen, die sich in den meisten Fällen nach bedingten Beobachtungen einfacher durchführen läßt, als nach vermittelnden Beobachtungen. Betrachten wir das Nivellementsnetz von S. 373, so ergeben sich als Bedingungsgleichungen zwischen den ausgeglichenen Höhenunterschieden unmittelbar die vier Dreiecksabschlüsse. Hierzu ist als fünfte Bedingung noch die Forderung zu stellen, daß der Höhenunterschied der Festpunkte A und B, aus den ausgeglichenen Beobachtungen berechnet, gleich dem gegebenen wird. Bezeichnen wir die gemessenen Höhenunterschiede mit l, so erhalten wir die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}
l_2 + \lambda_2 + l_3 + \lambda_3 - l_1 - \lambda_1 &= 0 \\
l_3 + \lambda_3 + l_5 + \lambda_5 - l_4 - \lambda_4 &= 0 \\
l_5 + \lambda_5 + l_7 + \lambda_7 - l_6 - \lambda_6 &= 0 \\
l_6 + \lambda_6 + l_9 + \lambda_9 - l_8 - \lambda_8 &= 0 \\
l_2 + \lambda_2 + l_4 + \lambda_4 + H_a - H_b &= 0
\end{aligned}$$

und nach Einsetzen der Zahlenwerte von S. 373

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrr}
-\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -12 & = 0 \\
\cdot & \cdot & +\lambda_3 & -\lambda_4 & +\lambda_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +3 & = 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +\lambda_5 & -\lambda_6 & +\lambda_7 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -2 & = 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +\lambda_6 & \cdot & -\lambda_8 & +\lambda_9 & \cdot & \cdot & \cdot & +21 & = 0 \\
\cdot & +\lambda_2 & \cdot & +\lambda_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -9 & = 0 \\
\hline
\end{array}$$

$$\frac{1}{g} = s: 2{,}4 \quad 2{,}8 \quad 4{,}6 \quad 3{,}7 \quad 5{,}2 \quad 5{,}8 \quad 3{,}6 \quad 6{,}3 \quad 4{,}2.$$

Der Gewichtseinheit entspricht hier der mittlere Fehler eines Nivellements von 1 km Länge.

Die Aufstellung der Normalgleichungen und die Berechnung der Verbesserungen, die nun in gewöhnlicher Weise ausgeführt werden kann, soll hier nicht weiter erläutert werden.

19. Kapitel.

Ausgleichung von Dreiecksnetzen.

§ 158. Die Winkelsummengleichungen.

Die weitestgehende Anwendung findet die Ausgleichung bedingter Beobachtungen bei der Berechnung von Dreiecks-

netzen. Zwischen den Winkeln eines Dreiecksnetzes besteht eine Anzahl von Bedingungen, die infolge der Messungsfehler von den gemessenen Richtungen bzw. Winkeln erst nach Hinzufügung kleiner Verbesserungen erfüllt werden. Wir setzen zunächst voraus, daß auf den einzelnen Dreieckspunkten entweder volle Richtungssätze oder voneinander unabhängige Winkel gemessen sind, und daß nur *eine* Dreiecksseite bekannt ist.

Die Bedingungsgleichungen lassen sich in zwei Gruppen einteilen: 1. Winkelsummengleichungen, 2. Seitengleichungen. Wir betrachten zunächst die Winkelsummengleichungen.

Es liege ein Dreiecksnetz von der Form des in Fig. 230 dargestellten vor, in dem auf jeder Station entweder Richtungen oder Winkel gemessen sind. Nehmen wir zunächst nur das

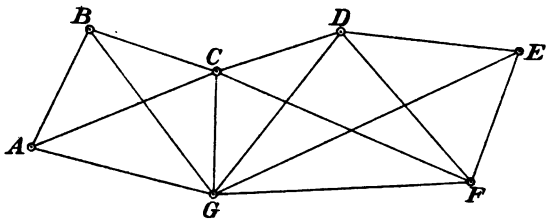


Fig. 230.

Polygon $ABCDEFG$ ohne Zwischenlinien als vorhanden an, so besteht die Bedingung, daß die Summe der Innenwinkel gleich $5 \cdot 180^0$ ist. Tritt nun z. B. die Linie AC hinzu, so liefert das Dreieck ABC eine zweite Bedingungsgleichung. Sind beide erfüllt, so hat auch die Winkelsumme des Polygons $ACDEFG$ ihren richtigen Wert. Für jede weiter hinzukommende Linie tritt auch eine weitere Bedingungsgleichung hinzu, so daß Fig. 230 im ganzen acht Bedingungsgleichungen liefert.

Aus diesen Erwägungen läßt sich leicht die Anzahl der in einem Dreiecksnetz vorhandenen Winkelsummengleichungen feststellen. Ist die Anzahl der Dreieckspunkte gleich p, so sind p Linien erforderlich, um diese Punkte zu einem geschlossenen Polygon zu verbinden, und dieses Polygon gibt eine Bedingungsgleichung. Da jede weitere Linie ebenfalls eine Gleichung liefert, so ist bei l Linien die

(1) Anzahl der Winkelsummengleichungen $= l - p + 1$.

Sind z. B. in einem Viereck (Fig. 231) auf jeder Station zwei Winkel gemessen, so sind die beiden Winkel voneinander unabhängig, und es trifft die obige Voraussetzung zu. Die Ergebnisse der Winkelmessung seien die folgenden:

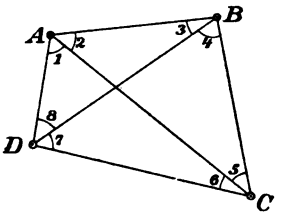


Fig. 231.

$l_1 =$	77°	29′	05″	$l_5 =$	39°	05′	12″
$l_2 =$	77	25	10	$l_6 =$	41	17	05
$l_3 =$	12	58	10	$l_7 =$	49	06	18
$l_4 =$	50	31	38	$l_8 =$	12	07	15.

Nach den vorstehenden Betrachtungen ergeben sich drei Bedingungen, die die *verbesserten* Winkel erfüllen müssen,

$$\begin{aligned} l_1 + \lambda_1 + l_2 + \lambda_2 + l_3 + \lambda_3 + l_8 + \lambda_8 - 180^0 &= 0 \\ l_1 + \lambda_1 + l_6 + \lambda_6 + l_7 + \lambda_7 + l_8 + \lambda_8 - 180 &= 0 \\ l_4 + \lambda_4 + l_5 + \lambda_5 + l_6 + \lambda_6 + l_7 + \lambda_7 - 180 &= 0, \end{aligned}$$

oder nach Einsetzung der Zahlenwerte

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_8 - 20'' &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8 - 17 &= 0 \\ \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 + 13 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

§ 159. Die Seitengleichungen.

Ein Dreiecksnetz (Fig. 232) werde durch ein Polygon gebildet, dessen sämtliche Eckpunkte mit einem innerhalb oder außerhalb liegenden *Zentralpunkt* verbunden sind; die Punkte bilden dann ein sog. *Zentralsystem*. Der einfacheren Darstellung wegen nehmen wir an, daß nur die in der Fig. 232 bezeichneten Winkel $l_1, l_2 \cdots l_{12}$ gemessen sind, die anscheinend nur eine Summengleichung zu erfüllen haben. Jedes Zentralsystem liefert jedoch außer den Winkelsummengleichungen noch eine von den ausgeglichenen Winkeln zu erfüllende Bedingungsgleichung anderer Art.

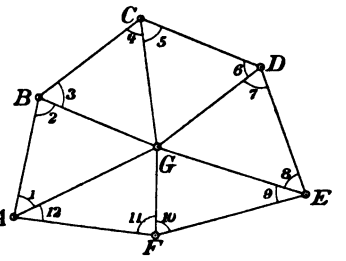


Fig. 232.

Es ist nämlich

$$BG = AG\,\frac{\sin(l_1+\lambda_1)}{\sin(l_2+\lambda_2)} \qquad CG = BG\,\frac{\sin(l_3+\lambda_3)}{\sin(l_4+\lambda_4)}$$

$$DG = CG\,\frac{\sin(l_5+\lambda_5)}{\sin(l_6+\lambda_6)} \qquad EG = DG\,\frac{\sin(l_7+\lambda_7)}{\sin(l_8+\lambda_8)}$$

$$FG = EG\,\frac{\sin(l_9+\lambda_9)}{\sin(l_{10}+\lambda_{10})} \qquad AG = FG\,\frac{\sin(l_{11}+\lambda_{11})}{\sin(l_{12}+\lambda_{12})},$$

woraus folgt

$$\frac{\sin(l_1+\lambda_1)\sin(l_3+\lambda_3)\sin(l_5+\lambda_5)\sin(l_7+\lambda_7)}{\sin(l_2+\lambda_2)\sin(l_4+\lambda_4)\sin(l_6+\lambda_6)\sin(l_8+\lambda_8)} = 1.$$

Eine solche Bedingungsgleichung wird als *Seitengleichung* bezeichnet. Meistens enthält ein Dreiecksnetz mehrere Zentralsysteme, deren jedes eine Seitengleichung liefert; in nebenstehender Fig. 233 lassen sich drei Zentralsysteme zusammenstellen, z. B.

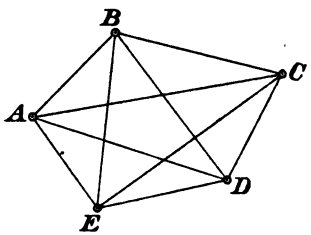


Fig. 233.

EBC, Zentralpunkt *D*
ABE, „ *C*
ABC, „ *D*,

die jedoch auch durch andere ersetzt werden können.

Um die Anzahl der Seitengleichungen eines Dreiecksnetzes festzustellen, ist zunächst einzusehen, daß zur Bestimmung der gegenseitigen Lage von p Punkten $2p-3$ Linien erforderlich sind; jede weitere vorhandene Linie gibt eine Seitengleichung. Ist mithin die Anzahl der Linien gleich l, so ist die

(1) Anzahl der Seitengleichungen $= l - 2p + 3$.

Es braucht jedoch nicht jede Seitengleichung aus einem Zentralsystem hervorgegangen zu sein, vielmehr können auch andere Gebilde zu Seitengleichungen führen, die dann aber nicht immer die obige einfache Gestalt haben.

Der einfachste Fall eines Zentralsystems ist das Viereck mit seinen beiden Diagonalen, für das nach dem vorstehenden Ausdruck eine Seitengleichung besteht. Da jeder Eckpunkt als Zentralpunkt dienen kann, so sind vier verschiedene Formen der Seitengleichung möglich. Nehmen wir z. B. in Fig. 231 S. 393 den Punkt C als Zentralpunkt an, so lautet die Seitengleichung

$$(2)\qquad \frac{\sin(l_7+l_8+\lambda_7+\lambda_8)\sin(l_4+\lambda_4)\sin(l_2+\lambda_2)}{\sin(l_1+\lambda_1)\sin(l_7+\lambda_7)\sin(l_3+l_4+\lambda_3+\lambda_4)}=1.$$

Zur Linearmachung dieser Gleichung schreiben wir sie zunächst in logarithmischer Form

$$\begin{aligned}(3)\qquad &\log\sin(l_7+l_8+\lambda_7+\lambda_8)+\log\sin(l_4+\lambda_4)+\log\sin(l_2+\lambda_2)\\ &-\log\sin(l_1+\lambda_1)-\log\sin(l_7+\lambda_7)\\ &-\log\sin(l_3+l_4+\lambda_3+\lambda_4)=0\end{aligned}$$

und erhalten durch Reihenentwicklung der einzelnen Glieder unter Beschränkung auf die Glieder erster Ordnung

$$\begin{aligned}(4)\qquad &\log\sin(l_7+l_8)+\log\sin l_4+\log\sin l_2-\log\sin l_1-\log\sin l_7\\ &-\log\sin(l_3+l_4)+\frac{M}{\varrho''}\operatorname{cotang}(l_7+l_8)\lambda_7+\frac{M}{\varrho''}\operatorname{cotang}(l_7+l_8)\lambda_8\\ &+\frac{M}{\varrho''}\operatorname{cotang} l_4\lambda_4+\frac{M}{\varrho''}\operatorname{cotang} l_2\lambda_2-\frac{M}{\varrho''}\operatorname{cotang} l_1\lambda_1\\ &-\frac{M}{\varrho''}\operatorname{cotang} l_7\lambda_7-\frac{M}{\varrho''}\operatorname{cotang}(l_3+l_4)\lambda_3\\ &-\frac{M}{\varrho''}\operatorname{cotang}(l_3+l_4)\lambda_4=0,\end{aligned}$$

worin $M=0{,}43429$ den Modulus des Logarithmensystems bezeichnet, und die Verbesserungen λ in Sekunden gerechnet sind.

Die Koeffizienten der Verbesserungen λ sind die Änderungen der Größen $\log\sin l$ für $1''$; da diese unmittelbar aus den Logarithmentafeln beim Aufschlagen der $\log\sin l$ entnommen werden können, so braucht man bei der Aufstellung der Seitengleichung die vorstehende lineare Gleichung gar nicht zu benutzen, sondern kann von der logarithmischen Gleichung (3) ausgehen. Wir führen dies für das Viereck von S. 393 unter Anwendung sechsstelliger Logarithmen aus. Es ist

$$\begin{aligned}\log\sin(l_7+l_8+\lambda_7+\lambda_8)&=9{,}942764+1{,}2\lambda_7+1{,}2\lambda_8\\ \log\sin(l_4+\lambda_4)&=9{,}887576+1{,}8\lambda_4\\ \log\sin(l_2+\lambda_2)&=9{,}989446+0{,}4\lambda_2\\ &\quad 9{,}819786\\ \log\sin(l_1+\lambda_1)&=9{,}989556+0{,}5\lambda_1\\ \log\sin(l_7+\lambda_7)&=9{,}878470+1{,}8\lambda_7\\ \log\sin(l_3+l_4+\lambda_3+\lambda_4)&=9{,}951779+1{,}1\lambda_3+1{,}1\lambda_4\\ &\quad 9{,}819805.\end{aligned}$$

Nach Gl. (3) wird

(5) $-19-0{,}5\lambda_1+0{,}4\lambda_2-1{,}1\lambda_3+0{,}7\lambda_4-0{,}6\lambda_7+1{,}2\lambda_8=0,$

wobei die Koeffizienten und das Absolutglied in Einheiten der sechsten Dezimalstelle des Logarithmus ausgedrückt sind.

Nunmehr stellen wir die vier Bedingungsgleichungen des Vierecks aus (2) § 158, S. 393 und der vorstehenden Gl. (5) zusammen:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr}
\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & \cdot & \cdot & \cdot & + & \lambda_8 - 20 = 0 \\
\lambda_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + \lambda_6 + & \lambda_7 & + & \lambda_8 & - 17 = 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & + & \lambda_4 & + \lambda_5 + \lambda_6 + & \lambda_7 & \cdot & & + 13 = 0 \\
-0{,}5\lambda_1 & + 0{,}4\lambda_2 & - 1{,}1\lambda_3 & + 0{,}7\lambda_4 & \cdot & \cdot & - 0{,}6\lambda_7 & + 1{,}2\lambda_8 & & - 19 = 0.
\end{array}$$

Hieraus ergeben sich die Normalgleichungen

$$\begin{array}{rrrrr}
4k_1 + & 2k_2 & \cdot & \cdot & - 20 = 0 \\
2k_1 + & 4k_2 + & 2k_3 + 0{,}1k_4 & - 17 = 0 \\
\cdot & + 2k_2 + & 4k_3 + 0{,}1k_4 & + 13 = 0 \\
\cdot & + 0{,}1k_2 + & 0{,}1k_3 + 3{,}9k_4 & - 19 = 0,
\end{array}$$

und es wird

$$\begin{array}{ll}
k_1 = +1{,}69 & k_3 = -6{,}68 \\
k_2 = +6{,}62 & k_4 = +4{,}85.
\end{array}$$

Mit Hilfe der Korrelatengleichungen erhält man die Verbesserungen

$$\begin{array}{ll}
\lambda_1 = +5{,}9'' & \lambda_5 = -6{,}7'' \\
\lambda_2 = +3{,}6 & \lambda_6 = -0{,}1 \\
\lambda_3 = -3{,}6 & \lambda_7 = -3{,}0 \\
\lambda_4 = -3{,}3 & \lambda_8 = +14{,}1
\end{array}$$

und hieraus die ausgeglichenen Winkel

$$\begin{array}{llll}
l_1+\lambda_1 = 77^0\ 29'\ 10{,}9'' & & l_5+\lambda_5 = 39^0\ 05'\ 05{,}3'' \\
l_2+\lambda_2 = 77\ 25\ 13{,}6 & & l_6+\lambda_6 = 41\ 17\ 04{,}9 \\
l_3+\lambda_3 = 12\ 58\ 06{,}4 & & l_7+\lambda_7 = 49\ 06\ 15{,}0 \\
l_4+\lambda_4 = 50\ 31\ 34{,}7 & & l_8+\lambda_8 = 12\ 07\ 29{,}1.
\end{array}$$

Als Rechenprobe benutzen wir die doppelte Berechnung der Quadratsumme $[\lambda\lambda]$. Es findet sich

$$[\lambda\lambda] = 324{,}3 \qquad -[wk] = 325{,}3,$$

und somit

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{324{,}3}{4}} = \pm 9{,}0''.$$

Die Schlußprobe, die auch die Koeffizienten der Bedingungsgleichungen prüft, besteht darin, daß die ausgeglichenen Winkel in die ursprünglichen Bedingungsgleichungen eingesetzt werden. Die drei Winkelsummengleichungen werden bis auf 0,1″ erfüllt, während die Seitengleichung in der sechsten Stelle der Logarithmen keine Abweichungen zeigt.

§ 160. Beispiel: Ausgleichung von Richtungsmessungen.

Nachdem wir das Wesentliche der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes kennen gelernt haben, behandeln wir als größeres Beispiel das auf S. 120—123 berechnete Dreiecksnetz, nachdem dort die Ausgleichungsresultate bereits benutzt worden sind. Auf jedem der sieben Punkte (Fig. 234) sind vollständige Richtungssätze gemessen, deren Mittel wir noch einmal zusammenstellen und zugleich mit den Verbesserungen λ versehen.

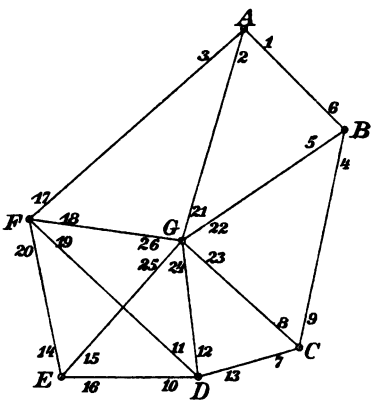


Fig. 234.

Stand	Ziel	Richtung	Stand	Ziel	Richtung
		° ′ ″			° ′ ″
A	*B*	0 00 00 + λ_1	*E*	*F*	0 00 00 + λ_{14}
	G	62 19 01 + λ_2		*G*	53 18 38 + λ_{15}
	F	93 48 35 + λ_3		*D*	102 53 38 + λ_{16}
B	*C*	0 00 00 + λ_4	*F*	*A*	0 00 00 + λ_{17}
	G	44 24 30 + λ_5		*G*	49 02 48 + λ_{18}
	A	123 01 13 + λ_6		*D*	84 16 09 + λ_{19}
C	*D*	0 00 00 + λ_7		*E*	119 41 07 + λ_{20}
	G	57 25 39 + λ_8	*G*	*A*	0 00 00 + λ_{21}
	B	116 16 46 + λ_9		*B*	39 04 19 + λ_{22}
D	*E*	0 00 00 + λ_{10}		*C*	115 48 36 + λ_{23}
	F	41 41 22 + λ_{11}		*D*	155 16 50 + λ_{24}
	G	81 12 28 + λ_{12}		*E*	204 29 20 + λ_{25}
	C	164 18 43 + λ_{13}		*F*	260 32 22 + λ_{26}

Das Netz enthält 13 Linien und 7 Punkte, infolgedessen ist die Anzahl der Winkelsummengleichungen nach (1) § 158, S. 393

$$l - p + 1 = 7$$

und die Anzahl der Seitengleichungen nach (1) § 159, S. 394

$$l - 2p + 3 = 2.$$

Für die Winkelsummengleichungen kommen die 6 Dreiecke des Sechsecks $ABCDEF$ und etwa das Dreieck DEF in Betracht. Die Seitengleichungen gehen aus den beiden Zentralsystemen des Netzes hervor, dem Sechseck $ABCDEF$ mit dem Zentralpunkt G und dem Viereck $DEFG$, für das wir den Zentralpunkt D annehmen. Die Wahl des Zentralpunktes im Viereck ist nicht gleichgültig, da von ihr die Größe der Koeffizienten in den Seitengleichungen abhängt. Von *C. F. Gauß* ist bereits derjenige Eckpunkt als günstigster Zentralpunkt angegeben worden, der der größten Dreiecksfläche gegenüberliegt. Im vorliegenden Falle trifft dies für den Punkt D zu.

Die 7 Bedingungsgleichungen sind

$$\begin{aligned}
&-(l_1+\lambda_1)+(l_2+\lambda_2)-(l_5+\lambda_5)+(l_6+\lambda_6)\\
&\qquad -(l_{21}+\lambda_{21})+(l_{22}+\lambda_{22})=0\\
&-(l_4+\lambda_4)+(l_5+\lambda_5)-(l_8+\lambda_8)+(l_9+\lambda_9)\\
&\qquad -(l_{22}+\lambda_{22})+(l_{23}+\lambda_{23})=0\\
&-(l_7+\lambda_7)+(l_8+\lambda_8)-(l_{12}+\lambda_{12})+(l_{13}+\lambda_{13})\\
&\qquad -(l_{23}+\lambda_{23})+(l_{24}+\lambda_{24})=0\\
&-(l_{10}+\lambda_{10})+(l_{12}+\lambda_{12})-(l_{15}+\lambda_{15})+(l_{16}+\lambda_{16})\\
&\qquad -(l_{24}+\lambda_{24})+(l_{25}+\lambda_{25})=0\\
&-(l_{14}+\lambda_{14})+(l_{15}+\lambda_{15})-(l_{18}+\lambda_{18})+(l_{20}+\lambda_{20})\\
&\qquad -(l_{25}+\lambda_{25})+(l_{26}+\lambda_{26})=0\\
&-(l_{10}+\lambda_{10})+(l_{11}+\lambda_{11})-(l_{14}+\lambda_{14})+(l_{16}+\lambda_{16})\\
&\qquad -(l_{19}+\lambda_{19})+(l_{20}+\lambda_{20})=0\\
&-(l_{17}+\lambda_{17})+(l_{18}+\lambda_{18})-(l_{26}+\lambda_{26})+(l_{21}+\lambda_{21})\\
&\qquad -(l_2+\lambda_2)+(l_3+\lambda_3)=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin(l_6-l_5+\lambda_6-\lambda_5)}{\sin(l_2-l_1+\lambda_2-\lambda_1)}\cdot\frac{\sin(l_9-l_8+\lambda_9-\lambda_8)}{\sin(l_5-l_4+\lambda_5-\lambda_4)}\cdot\frac{\sin(l_{13}-l_{12}+\lambda_{13}-\lambda_{12})}{\sin(l_8-l_7+\lambda_8-\lambda_7)}\\
&\cdot\frac{\sin(l_{16}-l_{15}+\lambda_{16}-\lambda_{15})}{\sin(l_{12}-l_{10}+\lambda_{12}-\lambda_{10})}\cdot\frac{\sin(l_{20}-l_{18}+\lambda_{20}-\lambda_{18})}{\sin(l_{15}-l_{14}+\lambda_{15}-\lambda_{14})}\\
&\cdot\frac{\sin(l_3-l_2+\lambda_3-\lambda_2)}{\sin(l_{18}-l_{17}+\lambda_{18}-\lambda_{17})}=1\\
&\frac{\sin(l_{20}-l_{19}+\lambda_{20}-\lambda_{19})}{\sin(l_{16}-l_{14}+\lambda_{16}-\lambda_{14})}\cdot\frac{\sin(l_{26}-l_{24}+\lambda_{26}-\lambda_{24})}{\sin(l_{19}-l_{18}+\lambda_{19}-\lambda_{18})}\\
&\cdot\frac{\sin(l_{16}-l_{15}+\lambda_{16}-\lambda_{15})}{\sin(l_{25}-l_{24}+\lambda_{25}-\lambda_{24})}=1.
\end{aligned}$$

Logarithmieren wir die beiden Seitengleichungen, so finden wir für die Logarithmen der einzelnen Faktoren der ersten Gleichung

Zähler:	Nenner:
$9{,}991364 + 0{,}4\lambda_6 - 0{,}4\lambda_5$	$9{,}947204 + 1{,}1\lambda_2 - 1{,}1\lambda_1$
$9{,}932389 + 1{,}3\lambda_9 - 1{,}3\lambda_8$	$9{,}844954 + 2{,}1\lambda_5 - 2{,}1\lambda_4$
$9{,}996847 + 0{,}2\lambda_{13} - 0{,}2\lambda_{12}$	$9{,}925679 + 1{,}3\lambda_8 - 1{,}3\lambda_7$
$9{,}881584 + 1{,}8\lambda_{16} - 1{,}8\lambda_{15}$	$9{,}994866 + 0{,}3\lambda_{12} - 0{,}3\lambda_{10}$
$9{,}974717 + 0{,}7\lambda_{20} - 0{,}7\lambda_{18}$	$9{,}904113 + 1{,}6\lambda_{15} - 1{,}6\lambda_{14}$
$9{,}717996 + 3{,}4\lambda_3 - 3{,}4\lambda_2$	$9{,}878087 + 1{,}9\lambda_{18} - 1{,}9\lambda_{17}$
$9{,}494897$	$9{,}494903$

und für die der zweiten Gleichung:

Zähler:	Nenner:
$9{,}763061 + 2{,}9\lambda_{20} - 2{,}9\lambda_{19}$	$9{,}988909 - 0{,}5\lambda_{16} + 0{,}5\lambda_{14}$
$9{,}984413 - 0{,}5\lambda_{26} + 0{,}5\lambda_{24}$	$9{,}760990 + 3{,}0\lambda_{19} - 3{,}0\lambda_{18}$
$9{,}881584 + 1{,}8\lambda_{16} - 1{,}8\lambda_{15}$	$9{,}879148 + 1{,}8\lambda_{25} - 1{,}8\lambda_{24}$
$9{,}629058$	$9{,}629047,$

worauf wir die Koeffizienten und Absolutglieder sämtlicher Bedingungsgleichungen in der Tabelle S. 400/401 zusammenstellen.

Die Normalgleichungen werden

$$
\begin{array}{rrrr

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}	λ_{11}	λ_{12}	λ_{13}
1	− 1	+ 1	·	·	− 1	+ 1	·	·	·	·	·	·	·
2	·	·	·	− 1	+ 1	·	·	− 1	+ 1	·	·	·	·
3	·	·	·	·	·	·	− 1	+ 1	·	·	·	− 1	+ 1
4	·	·	·	·	·	·	·	·	·	− 1	·	+ 1	·
5	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
6	·	·	·	·	·	·	·	·	·	− 1	+ 1	·	·
7	·	− 1	+ 1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
8	+ 1,1	− 4,5	+ 3,4	+ 2,1	− 2,5	+ 0,4	+ 1,3	− 2,6	+ 1,3	+ 0,3	·	− 0,5	+ 0,2
9	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
s	+ 0,1	− 4,5	+ 4,4	+ 1,1	− 2,5	+ 1,4	+ 0,3	− 2,6	+ 2,3	− 1,7	+ 1,0	− 0,5	+ 1,2

Wir übergehen die Reduktion der Normalgleichungen, aus der wir erhalten

$$k_1 = -0{,}392 \qquad k_4 = -0{,}943 \qquad k_7 = -0{,}192$$
$$k_2 = +0{,}435 \qquad k_5 = -0{,}743 \qquad k_8 = +0{,}060$$
$$k_3 = -1{,}326 \qquad k_6 = +1{,}620 \qquad k_9 = -0{,}377.$$

Hiermit finden sich die Verbesserungen

$$\lambda_1 = +0{,}46'' \qquad \lambda_{10} = -0{,}66'' \qquad \lambda_{19} = +0{,}60''$$
$$\lambda_2 = -0{,}47 \qquad \lambda_{11} = +1{,}62 \qquad \lambda_{20} = -0{,}17$$
$$\lambda_3 = +0{,}01 \qquad \lambda_{12} = +0{,}35 \qquad \lambda_{21} = +0{,}20$$
$$\lambda_4 = -0{,}31 \qquad \lambda_{13} = -1{,}31 \qquad \lambda_{22} = -0{,}83$$
$$\lambda_5 = +0{,}68 \qquad \lambda_{14} = -0{,}59 \qquad \lambda_{23} = +1{,}76$$
$$\lambda_6 = -0{,}37 \qquad \lambda_{15} = +0{,}67 \qquad \lambda_{24} = -1{,}25$$
$$\lambda_7 = +1{,}40 \qquad \lambda_{16} = -0{,}08 \qquad \lambda_{25} = +0{,}48$$
$$\lambda_8 = -1{,}92 \qquad \lambda_{17} = +0{,}31 \qquad \lambda_{26} = -0{,}36.$$
$$\lambda_9 = +0{,}51 \qquad \lambda_{18} = -0{,}74$$

Die zweimalige Berechnung der Quadratsumme $[\lambda\lambda]$ gibt in guter Übereinstimmung

$$[\lambda\lambda] = 19{,}519 \qquad -[wk] = 19{,}512,$$

und hieraus finden wir den mittleren Fehler einer Richtungsmessung

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{19{,}519}{9}} = \pm 1{,}47''.$$

Die berechneten Verbesserungen fügen wir zu den gemessenen Richtungen hinzu, ziehen dann aber wieder die erste Richtung

λ_{14}	λ_{15}	λ_{16}	λ_{17}	λ_{18}	λ_{19}	λ_{20}	λ_{21}	λ_{22}	λ_{23}	λ_{24}	λ_{25}	λ_{26}	w
.	.	.	.	.	.	.	− 1	+ 1	.	.	.	.	+ 3
.	.	.	.	.	.	.	.	− 1	+ 1	.	.	.	− 6
.	.	.	.	.	.	.	.	.	− 1	+ 1	.	.	+ 8
.	− 1	+ 1	.	.	.	.	.	.	.	− 1	+ 1	.	− 2
− 1	+ 1	.	.	− 1	.	+ 1	.	.	.	.	− 1	+ 1	− 1
− 1	.	+ 1	.	.	− 1	+ 1	.	.	.	.	.	.	− 2
.	.	.	− 1	+ 1	.	.	+ 1	.	.	.	.	− 1	0
+ 1,6	− 3,4	+ 1,8	+ 1,9	− 2,6	.	+ 0,7	.	.	.	.	.	.	− 6
− 0,5	− 1,8	+ 2,3	.	+ 3,0	− 5,9	+ 2,9	.	.	.	+ 2,3	− 1,8	− 0,5	+ 11
− 0,9	− 5,2	+ 6,1	+ 0,9	+ 0,4	− 6,9	+ 5,6	.	.	.	+ 2,3	− 1,8	− 0,5	.

einer jeden Station von allen Richtungen derselben ab, um die erstere auf Null zu reduzieren. Es ergeben sich dann als Resultat der Ausgleichung die folgenden ausgeglichenen Richtungen:

Stand	Ziel	Richtung	Stand	Ziel	Richtung
		° ′ ″			° ′ ″
A	*B*	0 00 00	*E*	*F*	0 00 00
	G	62 19 00,1		*G*	53 18 39,3
	F	93 48 34,6		*D*	102 53 38,5
B	*C*	0 00 00	*F*	*A*	0 00 00
	G	44 24 31,0		*G*	49 02 47,0
	A	123 01 13,1		*D*	84 16 09,3
				E	119 41 06,5
C	*D*	0 00 00			
	G	57 25 35,7	*G*	*A*	0 00 00
	B	116 16 45,1		*B*	39 04 18,0
				C	115 48 37,6
D	*E*	0 00 00		*D*	155 16 48,6
	F	41 41 24,3		*E*	204 29 20,3
	G	81 12 29,0		*F*	260 32 21,4
	C	164 18 42,4			

die für die Berechnung des Dreiecksnetzes in § 54, S. 120 benutzt worden sind.

§ 161. Nicht unabhängige Winkelmessungen auf jeder Station.

Bisher wurde vorausgesetzt, daß auf den Dreieckspunkten voneinander unabhängige Winkel oder vollständige Richtungssätze gemessen sind; Messungen anderer Art, wie wir sie bereits in dem Beispiel S. 354 kennen gelernt haben, führen zu einer

Komplikation der Netzausgleichung. Statt der S. 355 angewendeten Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen können wir nach bedingten Beobachtungen ausgleichen und erhalten nach Fig. 227, S. 354 die beiden Bedingungsgleichungen

$$(L_1 + \lambda_1) + (L_3 + \lambda_3) - (L_2 + \lambda_2) - (L_5 + \lambda_5) = 0$$
$$(L_4 + \lambda_4) - (L_5 + \lambda_5) - (L_6 + \lambda_6) = 0$$

oder nach Einsetzung der Messungswerte

$$\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_5 + 27 = 0$$
$$\lambda_4 - \lambda_5 - \lambda_6 \quad + 9 = 0.$$

Gehört der Stationspunkt einem Dreiecksnetz an, so treten die Winkel der vorstehenden Gleichungen auch in den Netzbedingungsgleichungen auf, und es sind deshalb die beiden Stationsgleichungen mit den Netzbedingungsgleichungen zusammen auszugleichen. Es ist ersichtlich, daß durch das Hinzutreten der Stationsbedingungen die Anzahl der Bedingungsgleichungen und hiermit die Berechnungsarbeit für die Ausgleichung ganz wesentlich vermehrt wird. *Bessel* hat bei seiner *Gradmessung in Ostpreußen* zum ersten Male eine Trennung der Stationsausgleichung von der Netzausgleichung vorgenommen, indem er die erstere nach vermittelnden Beobachtungen ausführte und die Ergebnisse unter Anwendung eines besonderen Verfahrens in die Netzausgleichung einsetzte. Hierdurch erreichte er, daß das Resultat der letzteren dasselbe war, das er durch gemeinsame Ausgleichung aller Bedingungsgleichungen erhalten hätte.

Die Trennung der Netzausgleichung von der Stationsausgleichung wird besonders einfach durch Anwendung von *Helmerts* äquivalenten Beobachtungen. Um dies an dem soeben erwähnten Beispiel zu zeigen, entnehmen wir von S. 355/356 die reduzierten Normalgleichungen

$$\begin{aligned} 2\xi \quad \cdot \quad - 1{,}00\xi \quad \cdot \quad + 27{,}00 &= 0 \\ + 3\eta - 1{,}00\xi - 1{,}00\tau \quad \cdot \quad &= 0 \\ + 2{,}17\xi - 1{,}33\tau - 22{,}50 &= 0 \\ + 0{,}85\tau - \ 4{,}79 &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir nach (3) § 151, S. 376 die äquivalenten Fehlergleichungen

$$\begin{aligned} v_1 &= +13{,}50 + \xi \cdot -0{,}50\zeta \cdot \text{Gew. } 2 \\ v_2 &= \cdot \cdot +\eta - 0{,}33\xi - 0{,}33\tau \;„\; 3 \\ v_3 &= -10{,}37 \cdot \cdot +1{,}00\xi - 0{,}61\tau \;„\; 2{,}17 \\ v_4 &= -5{,}64 \cdot \cdot \cdot +1{,}00\tau \;„\; 0{,}85. \end{aligned}$$

Werden die vier Unbekannten durch die Verbesserungen v ausgedrückt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \xi &= -6{,}60 + v_1 + 0{,}50v_3 + 0{,}30v_4 \\ \eta &= +6{,}48 + v_2 + 0{,}33v_3 + 0{,}54v_4 \\ \zeta &= +13{,}81 + v_3 + 0{,}61v_4 \\ \tau &= +5{,}64 + v_4, \end{aligned}$$

und wenn wir statt der Unbekannten ξ, η, ζ und τ wieder die ursprünglichen unbekannten Winkel x, y, z und t einführen, so ist nach S. 355

$$\begin{aligned} x &= 34^0\,28'\,17{,}40'' + v_1 \cdot +0{,}50v_3 + 0{,}30v_4 \\ y &= 121\;52\;27{,}48 \cdot +v_2 + 0{,}33v_3 + 0{,}54v_4 \\ z &= 187\;49\;58{,}81 \cdot \cdot +1{,}00v_3 + 0{,}61v_4 \\ t &= 269\;04\;22{,}64 \cdot \cdot \cdot +1{,}00v_4 \end{aligned}$$

Gewichte: 2,00 3,00 2,17 0,85.

Hierin sind die Verbesserungen v vollständig unabhängig voneinander, es ist deshalb erlaubt, die gefundenen Werte von x, y, z und t und ihre Differenzen in die Netzbedingungsgleichungen einzuführen und die Verbesserungen unter Berücksichtigung der Gewichte nach der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen.

§ 162. Unvollständige Richtungssätze.

Das Verfahren des vorstehenden Paragraphen wird auch anzuwenden sein, wenn Satzbeobachtungen mit *unvollständigen Sätzen* vorliegen, in denen aus verschiedenen Gründen nicht alle Ziele in jedem Satz anvisiert werden konnten. Es seien z. B. vier Sätze zwischen den Zielen A, B, C, D gemessen worden:

Ziel	1. Satz			2. Satz			3. Satz			4. Satz		
	°	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″
A	0	00	00	.	.	.	0	00	00	0	00	00
B	73	25	38	0	00	00	73	25	42	.	.	.
C	.	.	.	92	53	49	166	19	27	166	19	38
D	263	06	18	.	.	.	263	06	25	263	06	30

Bezeichnen wir die Winkel, die die Strahlen nach B, C und D mit dem Strahl nach A nach der Ausgleichung bilden, mit x, y und z, die zwölf Beobachtungen mit L_1, $L_2 \ldots L_{12}$ und ihre Verbesserungen mit λ_1, $\lambda_2 \ldots \lambda_{12}$, so sind die Fehlergleichungen

$$
\begin{array}{l}
\lambda_2 - \lambda_1 = -(L_2 - L_1) + x \\
\lambda_3 - \lambda_1 = -(L_3 - L_1) + z \\
\hline
\lambda_5 - \lambda_4 = -(L_5 - L_4) - x + y \\
\hline
\lambda_7 - \lambda_6 = -(L_7 - L_6) + x \\
\lambda_8 - \lambda_6 = -(L_8 - L_6) + y \\
\lambda_9 - \lambda_6 = -(L_9 - L_6) + z \\
\hline
\lambda_{11} - \lambda_{10} = -(L_{11} - L_{10}) + y \\
\lambda_{12} - \lambda_{10} = -(L_{12} - L_{10}) + z.
\end{array} \tag{1}
$$

Um diese Fehlergleichungen auf die gewöhnliche Form zu bringen, führen wir für die Verbesserungen λ_1, λ_4, λ_6 und λ_{10} vier neue Unbekannte ein. Zugleich verwenden wir Näherungswerte der Unbekannten x, y und z zur Vereinfachung der Rechnung. Wir setzen:

$$
\begin{array}{llll}
\lambda_1 = u_1 & x = & 73^0\,25'\,40'' & + \xi \\
\lambda_4 = u_2 & y = & 166\;\;19\;\;30 & + \eta \\
\lambda_6 = u_3 & z = & 263\;\;06\;\;20 & + \zeta \\
\lambda_{10} = u_4, & & &
\end{array} \tag{2}
$$

und erhalten dann mit Einsetzung der obigen Beobachtungswerte die 12 Fehlergleichungen:

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrr}
\lambda_1 = & \cdot & + u_1 & & & & & & & & \\
\lambda_2 = & + 2 & + u_1 & \cdot & \cdot & \cdot & + \xi & & & & \\
\lambda_3 = & + 2 & + u_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + \zeta & & \\
\lambda_4 = & \cdot & \cdot & + u_2 & & & & & & & \\
\lambda_5 = & + 1 & \cdot & + u_2 & \cdot & \cdot & - \xi & + \eta & \cdot & & \\
\lambda_6 = & \cdot & \cdot & \cdot & + u_3 & & & & & & \\
\lambda_7 = & - 2 & \cdot & \cdot & + u_3 & \cdot & + \xi & & & & \\
\lambda_8 = & + 3 & \cdot & \cdot & + u_3 & \cdot & \cdot & + \eta & & & \\
\lambda_9 = & - 5 & \cdot & \cdot & + u_3 & \cdot & \cdot & \cdot & + \zeta & & \\
\lambda_{10} = & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + u_4 & & & & & \\
\lambda_{11} = & - 8 & \cdot & \cdot & \cdot & + u_4 & & + \eta & & & \\
\lambda_{12} = & - 10 & \cdot & \cdot & \cdot & + u_4 & \cdot & \cdot & + \zeta. & &
\end{array}
$$

Die Normalgleichungen sind:

$$
\begin{array}{cccccccc}
3u_1 & \cdot & \cdot & \cdot & +\xi & \cdot & +\zeta & +4=0\\
\cdot & +2u_2 & \cdot & \cdot & -\xi & +\eta & \cdot & +1=0\\
\cdot & \cdot & +4u_3 & \cdot & +\xi & +\eta & +\zeta & -4=0\\
\cdot & \cdot & \cdot & +3u_4 & \cdot & +\eta & +\zeta & -18=0\\
+u_1 & -u_2 & +u_3 & \cdot & +3\xi & -\eta & \cdot & -1=0\\
\cdot & +u_2 & +u_3 & +u_4 & -\xi & +3\eta & \cdot & -4=0\\
+u_1 & \cdot & +u_3 & +u_4 & \cdot & \cdot & +3\zeta & -13=0.
\end{array}
$$

Von den reduzierten Normalgleichungen interessieren uns nur die drei letzten Systeme, die die Unbekannten u_1, u_2, u_3 und u_4 nicht mehr enthalten. Sie lauten

$$
\begin{array}{r}
+1{,}92\xi-0{,}75\eta-0{,}58\zeta-1{,}83=0\\
-0{,}75\xi+1{,}92\eta-0{,}58\zeta+2{,}50=0\\
-0{,}58\xi-0{,}58\eta+2{,}09\zeta-7{,}33=0\\
\hline
+1{,}63\eta-0{,}81\xi+1{,}79=0\\
-0{,}81\eta+1{,}91\zeta-7{,}88=0\\
\hline
+1{,}51\zeta-6{,}98=0.
\end{array}
$$

Sollen die Unbekannten x, y, z noch einer weiteren Ausgleichung, z. B. der Netzausgleichung eines Dreiecksnetzes unterworfen werden, so setzen wir an die Stelle der ursprünglichen Fehlergleichungen die äquivalenten Fehlergleichungen

$$
\begin{array}{lll}
v_1=-0{,}95+\xi-0{,}39\eta-0{,}30\zeta, & \text{Gew. } 1{,}92\\
v_2=+1{,}10\ \cdot\ +1{,}00\eta-0{,}50\zeta & \text{„ } 1{,}63\\
v_3=-4{,}62\ \cdot\ \cdot\ +1{,}00\zeta & \text{„ } 1{,}51,
\end{array}
\tag{3}
$$

aus denen wir erhalten

$$
\begin{array}{l}
\xi=+2{,}82+v_1+0{,}39v_2+0{,}50v_3\\
\eta=+1{,}20\ \cdot\ +1{,}00v_2+0{,}50v_3\\
\zeta=+4{,}62\ \cdot\ \cdot\ +1{,}00v_3.
\end{array}
\tag{4}
$$

Gehen wir zu den Unbekannten x, y, z über, so ist nach den Gl. (2)

$$
\begin{array}{lll}
x=\ 73^0\ 25'\ 42{,}8''+v_1+0{,}39v_2+0{,}50v_3\\
y=166\ \ 19\ \ 31{,}2\ \ \cdot\ +1{,}00v_2+0{,}50v_3\\
z=263\ \ 06\ \ 24{,}6\ \ \cdot\ \ \cdot\ +1{,}00v_3\\
\text{Gewichte: } 1{,}92\ \ 1{,}63\ \ 1{,}51.
\end{array}
\tag{5}
$$

Diese Werte der Unbekannten können einer beliebigen weiteren Ausgleichung unterworfen werden.

§ 163. Winkelmessungen in allen Kombinationen der Zielpunkte.

Wir betrachten noch einen besonderen Fall der Winkelmessung auf einer Station, in dem alle möglichen Winkel zwischen den Zielen gemessen werden. Bei 4 Zielen, wie in Fig. 235, sind demnach 6 Winkel zu messen. Bezeichnen wir die ausgeglichenen Winkel, die der erste Strahl mit den übrigen bildet, mit x, y, z, so haben wir die Fehlergleichungen

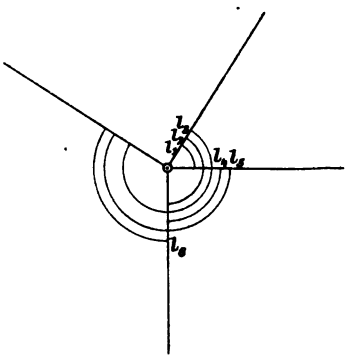


Fig. 235.

$$(1)\qquad \begin{array}{llll} \lambda_1 = -l_1 & +x & \cdot & \cdot \\ \lambda_2 = -l_2 & \cdot & +y & \cdot \\ \lambda_3 = -l_3 & \cdot & \cdot & +z \\ \lambda_4 = -l_4 & -x & +y & \cdot \\ \lambda_5 = -l_5 & -x & \cdot & +z \\ \lambda_6 = -l_6 & \cdot & -y & +z. \end{array}$$

In den Normalgleichungen behalten wir für die Absolutglieder der Einfachheit wegen die allgemeinen Bezeichnungen $-[al]$, $-[bl]$, $-[cl]$ bei und finden

$$(2)\qquad \begin{array}{rrrr} 3x - y & - z & - [al] & = 0 \\ -x + 3y - z & & - [bl] & = 0 \\ -x - y & + 3z & - [cl] & = 0 \\ \hline + \tfrac{8}{3}y & - \tfrac{4}{3}z & - [bl \cdot 1] & = 0 \\ - \tfrac{4}{3}y & + \tfrac{8}{3}z & - [cl \cdot 1] & = 0 \\ \hline & + 2z & - [cl \cdot 2] & = 0. \end{array}$$

Hieraus stellen wir die äquivalenten Fehlergleichungen auf

$$(3)\qquad \begin{array}{llll} v_1 = -\tfrac{1}{3}[al] & +x - \tfrac{1}{3}y - \tfrac{1}{3}z, & \text{Gew. } 3 \\ v_2 = -\tfrac{3}{8}[bl \cdot 1] & +y - \tfrac{1}{2}z & \text{„ } \tfrac{8}{3} \\ v_3 = -\tfrac{1}{2}[cl \cdot 2] & +z & \text{„ } \cdot 2 \end{array}$$

und finden für die Unbekannten die Werte

$$
\begin{array}{l}
x = L_1 + v_1 + \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{2}v_3 \\
y = L_2 \quad\quad + v_2 \quad + \frac{1}{2}v_3 \\
z = L_3 \quad\quad\quad\quad + v_3 \\
\hline
\text{Gew.:} \quad 3 \quad\quad \frac{8}{3} \quad\quad 2,
\end{array}
\tag{4}
$$

worin für die Absolutglieder die einfachen Bezeichnungen L_1, L_2, L_3 gesetzt sind.

Um die Winkel x, y, z auch in der Netzausgleichung verfolgen zu können, nehmen wir an, es wären nur zwei Netzbedingungsgleichungen vorhanden

$$
\begin{aligned}
A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 z &= 0 \\
B_0 + B_1 x + B_2 y + B_3 z &= 0,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

in die wir die Ergebnisse der Stationsausgleichung einsetzen. Es ergibt sich, wenn die Absolutglieder mit w_1 und w_2 bezeichnet werden

$$
\begin{array}{l}
A_1 v_1 + (\frac{1}{3}A_1 + A_2)v_2 + (\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2 + A_3)v_3 + w_1 = 0 \\
B_1 v_1 + (\frac{1}{3}B_1 + B_2)v_2 + (\frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2 + B_3)v_3 + w_2 = 0 \\
\hline
\frac{1}{3} \quad\quad\quad\quad \frac{3}{8} \quad\quad\quad\quad\quad\quad \frac{1}{2} = \text{Gew.-Rezipr.}
\end{array}
\tag{6}
$$

Mit einfacherer Bezeichnung der Koeffizienten setzen wir hierfür

$$
\begin{array}{l}
\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + w_1 = 0 \\
\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + w_2 = 0 \\
\hline
\frac{1}{3} \quad\quad \frac{3}{8} \quad\quad \frac{1}{2} \quad\quad\quad = \frac{1}{g}
\end{array}
\tag{7}
$$

und erhalten die Normalgleichungen

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\alpha\alpha}{g}\right]k_1 + \left[\frac{\alpha\beta}{g}\right]k_2 + w_1 &= 0 \\
\left[\frac{\alpha\beta}{g}\right]k_1 + \left[\frac{\beta\beta}{g}\right]k_2 + w_2 &= 0,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\alpha\alpha}{g}\right] &= \tfrac{1}{2}\{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3\} \\
\left[\frac{\alpha\beta}{g}\right] &= \tfrac{1}{4}\{(A_1+A_2+A_3)(B_1+B_2+B_3) + A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3\} \\
\left[\frac{\beta\beta}{g}\right] &= \tfrac{1}{2}\{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 + B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3\}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

ist. Sind die Korrelaten k ermittelt, so ergeben sich die Verbesserungen

$$\begin{aligned} v_1 &= \tfrac{1}{3}A_1k_1 + \tfrac{1}{3}B_1k_2 \\ v_2 &= \tfrac{1}{3}(A_1 + 3A_2)k_1 + \tfrac{1}{3}(B_1 + 3B_2)k_2 \\ v_3 &= \tfrac{1}{4}(A_1 + A_2 + 2A_3)k_1 + \tfrac{1}{4}(B_1 + B_2 + 2B_3)k_2 \end{aligned}$$

und hiermit wird nach (4)

$$\begin{aligned} x &= L_1 + \tfrac{1}{4}(2A_1 + A_2 + A_3)k_1 + \tfrac{1}{4}(2B_1 + B_2 + B_3)k_2 \\ y &= L_2 + \tfrac{1}{4}(A_1 + 2A_2 + A_3)k_1 + \tfrac{1}{4}(B_1 + 2B_2 + B_3)k_2 \\ z &= L_3 + \tfrac{1}{4}(A_1 + A_2 + 2A_3)k_1 + \tfrac{1}{4}(B_1 + B_2 + 2B_3)k_2. \end{aligned} \tag{10}$$

Dies sind die endgültigen Werte der drei Winkel, wie sie aus der Gesamtausgleichung hervorgehen.

Zu demselben Resultat gelangen wir jedoch auch auf einem zweiten wesentlich kürzeren Wege. Wir nehmen hierzu an, daß die Werte L_1, L_2 und L_3, die wir aus der Stationsausgleichung erhielten, direkt aus *vier gemessenen Richtungen* als deren Differenzen hervorgegangen sind.

In diesem Falle sind, wenn die Größen L_1, L_2, L_3 in die Netzbedingungsgleichungen eingesetzt werden, die *Richtungen* mit den Verbesserungen v_1', v_2', v_3', v_4' zu versehen. Die ausgeglichenen Winkel sind dann

$$\begin{aligned} x &= L_1 + v_2' - v_1' \\ y &= L_2 + v_3' - v_1' \\ z &= L_3 + v_4' - v_1'. \end{aligned} \tag{4*}$$

Die Gewichte der vier Richtungen nehmen wir nicht gleich der Einheit an, sondern ermitteln sie aus der Stationsausgleichung. Aus den Normalgleichungen (2) ergibt sich, daß die Gewichte der L_1, L_2, L_3 einander gleich und gleich 2 (bei n Richtungen $\frac{n}{2}$) sind. Infolgedessen müssen wir die Gewichte der vier Richtungen gleich 4 (bei n Richtungen gleich n) annehmen. Nun setzen wir die Werte von (4*) in die Bedingungsgleichungen (5) des Netzes ein, wobei die Widersprüche w dieselben sein müssen. Es wird

$$\begin{aligned} -(A_1 + A_2 + A_3)v_1' + A_1v_2' + A_2v_3' + A_3v_4' + w_1 &= 0 \\ -(B_1 + B_2 + B_3)v_1' + B_1v_2' + B_2v_3' + B_3v_4' + w_2 &= 0 \end{aligned} \tag{6*}$$

$$\tfrac{1}{4} \qquad \tfrac{1}{4} \qquad \tfrac{1}{4} \qquad \tfrac{1}{4} = \text{Gew.-Rezipr.}$$

Bilden wir hieraus die Normalgleichungen, so findet sich, daß ihre Koeffizienten identisch mit denen der Normalgleichungen (8) sind; es werden mithin auch die Korrelaten k_1 und k_2 dieselben Werte wie oben erhalten. Wir berechnen nun noch die Verbesserungen v' und finden

$$\begin{aligned} v_1' &= -\tfrac{1}{4}(A_1 + A_2 + A_3)k_1 - \tfrac{1}{4}(B_1 + B_2 + B_3)k_2 \\ v_2' &= +\tfrac{1}{4}A_1k_1 + \tfrac{1}{4}B_1k_2 \\ v_3' &= +\tfrac{1}{4}A_2k_1 + \tfrac{1}{4}B_2k_2 \\ v_4' &= +\tfrac{1}{4}A_3k_1 + \tfrac{1}{4}B_3k_2, \end{aligned}$$

womit die endgültigen Werte der Winkel nach (4*) werden

$$\begin{aligned} x &= L_1 + \tfrac{1}{4}(2A_1 + A_2 + A_3)k_1 + \tfrac{1}{4}(2B_1 + B_2 + B_3)k_2 \\ y &= L_2 + \tfrac{1}{4}(A_1 + 2A_2 + A_3)k_1 + \tfrac{1}{4}(B_1 + 2B_2 + B_3)k_2 \\ z &= L_3 + \tfrac{1}{4}(A_1 + A_2 + 2A_3)k_1 + \tfrac{1}{4}(B_1 + B_2 + 2B_3)k_2. \end{aligned} \tag{10*}$$

Die einfache Ausgleichung nach Richtungen ergibt somit dieselben Resultate, wie die Ausgleichung der äquivalenten Beobachtungen. Dies läßt sich für eine beliebige Anzahl von Zielen in derselben Weise zeigen.

Es ergibt sich somit der wichtige Satz, daß Winkelmessungen in allen Kombinationen zwischen n Zielen nach erfolgter Stationsausgleichung wie ein vollständiger Richtungssatz zu behandeln sind, dessen Richtungen das Gewicht n haben.

§ 164. Vollständige Richtungssätze.

Es könnte noch die Frage aufgeworfen werden, ob man berechtigt ist, das arithmetische Mittel mehrerer vollständiger Richtungssätze, das also auch bereits das Ergebnis einer Ausgleichung ist, ohne weiteres in die Netzausgleichung einzuführen und nochmals auszugleichen. Wir gehen auf diese Frage näher ein, weil ihre Beantwortung auch über die Berechnung des mittleren Fehlers einer Richtung Aufschluß gibt.

Wir beschränken uns auf vier Sätze mit vier Zielen und führen die Ausgleichung in derselben Weise, wie die unvollständiger Sätze (§ 162, S. 403) aus. Hierbei bezeichnen wir die Richtungen mit $L_{i,k}$, worin $i = 1 \ldots 4$ den Satz, $k = 0, 1 \ldots 3$ das Ziel angibt.

Nach (1) § 162, S. 404 werden die Fehlergleichungen der vier Sätze

$$(1)\qquad \left.\begin{aligned} L_{i,1}+\lambda_{i,1}-L_{i,0}-\lambda_{i,0}&=x\\ L_{i,2}+\lambda_{i,2}-L_{i,0}-\lambda_{i,0}&=y\\ L_{i,3}+\lambda_{i,3}-L_{i,0}-\lambda_{i,0}&=z \end{aligned}\right\}\qquad i=1\ldots4.$$

Setzen wir wieder

$$(2)\qquad \lambda_{i,0}=u_i\qquad (i=1\ldots4),$$

so erhalten wir die Normalgleichungen

$$(3)\qquad \left.\begin{aligned} +4u_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad +x\ +y\ +z &= [L_{1,k}-L_{1,0}]\\ \cdot \quad +4u_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad +x\ +y\ +z &= [L_{2,k}-L_{2,0}]\\ \cdot \quad \cdot \quad +4u_3 \quad \cdot \quad +x\ +y\ +z &= [L_{3,k}-L_{3,0}]\\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad +4u_4 \quad +x\ +y\ +z &= [L_{4,k}-L_{4,0}] \end{aligned}\right\} k=1\ldots3$$

$$\left.\begin{aligned} +u_1\ +u_2\ +u_3\ +u_4\ +4x \quad \cdot \quad \cdot &= [L_{i,1}-L_{i,0}]\\ +u_1\ +u_2\ +u_3\ +u_4 \quad \cdot \ +4y \quad \cdot &= [L_{i,2}-L_{i,0}]\\ +u_1\ +u_2\ +u_3\ +u_4 \quad \cdot \quad \cdot \ +4z &= [L_{i,3}-L_{i,0}] \end{aligned}\right\} i=1\ldots4$$

Die Summe der vier ersten Gleichungen gibt nach Division durch 4 und Umkehrung der Vorzeichen

$$(4)\qquad -u_1-u_2-u_3-u_4-x-y-z=-\tfrac{1}{4}\sum_{i=1,\,k=1}^{i=4,\,k=3}[L_{i,k}-L_{i,0}]$$

und hiermit geben die drei letzten Gleichungen (3)

$$(5)\qquad \left.\begin{aligned} 3x-y\ -z &= +\tfrac{3}{4}[L_{i,1}-L_{i,0}]-\tfrac{1}{4}[L_{i,2}-L_{i,0}]-\tfrac{1}{4}[L_{i,3}-L_{i,0}]\\ -x+3y-z &= -\tfrac{1}{4}[L_{i,1}-L_{i,0}]+\tfrac{3}{4}[L_{i,2}-L_{i,0}]-\tfrac{1}{4}[L_{i,3}-L_{i,0}]\\ -x-y\ +3z &= -\tfrac{1}{4}[L_{i,1}-L_{i,0}]-\tfrac{1}{4}[L_{i,2}-L_{i,0}]+\tfrac{3}{4}[L_{i,3}-L_{i,0}] \end{aligned}\right\} i=1\ldots4$$

Die Koeffizienten der Unbekannten sind hierin dieselben, wie in den Normalgleichungen (2) § 163, S. 406, es gilt mithin auch der Schlußsatz desselben Paragraphen, wonach die aus der Ausgleichung gefundenen Unbekannten nach Zerlegung in Richtungen in der Netzausgleichung von neuem ausgeglichen werden können. Die Gewichte der drei Unbekannten sind auch hier gleich 2, und die der vier ausgeglichenen Richtungen infolgedessen gleich 4 (bei n Sätzen gleich n).

Wird die Summe der Gleichungen (5) zu jeder einzelnen addiert, so ergibt sich

$$(6)\qquad \left.\begin{aligned} x&=\tfrac{1}{4}[L_{i,1}-L_{i,0}]\\ y&=\tfrac{1}{4}[L_{i,2}-L_{i,0}]\\ z&=\tfrac{1}{4}[L_{i,3}-L_{i,0}] \end{aligned}\right\}\qquad i=1\ldots4$$

Das Ausgleichungsresultat ist also weiter nichts als das arithmetische Mittel der vier Sätze. Hiermit ist die im Anfange dieses Paragraphen aufgeworfene Frage im bejahenden Sinne beantwortet.

Zur Berechnung des mittleren Fehlers einer Richtungsmessung haben wir aus den Fehlergleichungen (1)

$$(7)\qquad \left.\begin{aligned} \lambda_{i,1} - \lambda_{i,0} &= x - (L_{i,1} - L_{i,0}) \\ \lambda_{i,2} - \lambda_{i,0} &= y - (L_{i,2} - L_{i,0}) \\ \lambda_{i,3} - \lambda_{i,0} &= z - (L_{i,3} - L_{i,0}) \end{aligned}\right\} \quad i = 1 \ldots 4$$

und aus den vier ersten Normalgleichungen (3)

$$(8)\qquad \lambda_{i,0} = u_i = \tfrac{1}{4}([L_{i,k} - L_{i,0}] - x - y - z) \begin{matrix} i = 1 \ldots 4 \\ k = 1 \ldots 3 \end{matrix}.$$

Aus (7) und (8) können die 16 Verbesserungen λ berechnet werden, und da die Anzahl der Unbekannten gleich der Anzahl der Sätze plus der Anzahl der Richtungen minus Eins ist, so wird der mittlere Fehler im vorliegenden Falle

$$(9)\qquad \mu = \pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{9}}.$$

Beispiel: Ausgleichung von vier vollen Richtungssätzen mit je fünf Richtungen.

1 Ziel	2 Satz 1	3 S. 2	4 S. 3	5 S. 4	6 Mittel	7	8 S. 1	9 S. 2	10 S. 3	11 S. 4
	° ′ ″	″	″	″	° ′ ″		″	″	″	″
1	0 00 00	00	00	00	0 00 00		0	0	0	0
2	22 11 45	58	70	43	22 11 54	$= x$	− 9	+ 4	+ 16	− 11
3	74 43 03	15	00	10	74 43 07	$= y$	− 4	+ 8	− 7	+ 3
4	172 41 30	25	38	51	172 41 36	$= z$	− 6	− 11	+ 2	+ 15
5	234 27 30	35	40	23	234 27 32	$= t$	− 2	+ 3	+ 8	− 9
							− 21	+ 4	+ 19	− 2

Aus den vier Sätzen ergeben sich zunächst die vier Unbekannten x, y, z und t. Um die Größen u_i zu finden, berechnen wir in den Spalten 8—11 die Differenzen der Richtungen jedes Satzes und des Mittels. Es findet sich nach (8)

$$\begin{aligned} u_1 &= -\tfrac{21}{5} = -4{,}2'' = \lambda_{1,0} \\ u_2 &= +\tfrac{4}{5} = +0{,}8'' = \lambda_{2,0} \\ u_3 &= +\tfrac{19}{5} = +3{,}8'' = \lambda_{3,0} \\ u_4 &= -\tfrac{2}{5} = -0{,}4'' = \lambda_{4,0}. \end{aligned}$$

Dieselben Differenzen geben nach Gl. (7)

$$\begin{array}{llll} \lambda_{1,1} = +4{,}8'' & \lambda_{2,1} = -3{,}2'' & \lambda_{3,1} = -12{,}2'' & \lambda_{4,1} = +10{,}6'' \\ \lambda_{1,2} = -0{,}2 & \lambda_{2,2} = -7{,}2 & \lambda_{3,2} = +10{,}8 & \lambda_{4,2} = -3{,}4 \\ \lambda_{1,3} = +1{,}8 & \lambda_{2,3} = +11{,}8 & \lambda_{3,3} = +1{,}8 & \lambda_{4,3} = -15{,}4 \\ \lambda_{1,4} = -2{,}2 & \lambda_{2,4} = -2{,}2 & \lambda_{3,4} = -4{,}2 & \lambda_{4,4} = +8{,}6. \end{array}$$

Hieraus finden wir

$$[\lambda\lambda] = 991{,}60$$

und

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{991{,}60}{20-4-4}} = \pm\sqrt{82{,}63} = \pm 9{,}1''.$$

20. Kapitel.

Koordinaten-Ausgleichung von Dreieckspunkten.

§ 165. Rückwärtseinschneiden mit Richtungen.

Auf einem Neupunkt seien volle Richtungssätze nach mehr als drei Festpunkten gemessen. Wir bezeichnen den Neupunkt mit P, die Festpunkte mit P_1, $P_2 \ldots P_n$, die gemessenen Richtungen mit w_1, $w_2 \ldots w_n$ und deren Verbesserungen mit λ_1, $\lambda_2 \ldots \lambda_n$. Sind x und y die Koordinaten des Neupunktes, so sind die endgültigen Richtungswinkel der Strahlen

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \text{arctang}\,\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \\ \varphi_2 &= \text{arctang}\,\frac{y_2 - y}{x_2 - x} \\ &\vdots \\ \varphi_n &= \text{arctang}\,\frac{y_n - y}{x_n - x} \end{aligned}$$

und da die Differenzen dieser Richtungswinkel gleich den Differenzen der ausgeglichenen Richtungen sein müssen, so ist

$$\begin{aligned} w_2 + \lambda_2 - w_1 - \lambda_1 &= \text{arctang}\,\frac{y_2 - y}{x_2 - x} - \text{arctang}\,\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \\ w_3 + \lambda_3 - w_1 - \lambda_1 &= \text{arctang}\,\frac{y_3 - y}{x_3 - x} - \text{arctang}\,\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \qquad (1) \\ &\vdots \\ w_n + \lambda_n - w_1 - \lambda_1 &= \text{arctang}\,\frac{y_n - y}{x_n - x} - \text{arctang}\,\frac{y_1 - y}{x_1 - x}, \end{aligned}$$

oder in anderer Form

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= -w_2 + w_1 + \lambda_1 - \operatorname{arctang}\frac{y_1-y}{x_1-x} + \operatorname{arctang}\frac{y_2-y}{x_2-x}\\
(2)\quad \lambda_3 &= -w_3 + w_1 + \lambda_1 - \operatorname{arctang}\frac{y_1-y}{x_1-x} + \operatorname{arctang}\frac{y_3-y}{x_3-x}\\
&\vdots\\
\lambda_n &= -w_n + w_1 + \lambda_1 - \operatorname{arctang}\frac{y_1-y}{x_1-x} + \operatorname{arctang}\frac{y_n-y}{x_n-x}.
\end{aligned}$$

Die allen Gleichungen gemeinsamen Glieder, in denen teils bekannte, teils unbekannte Größen auftreten, fassen wir zusammen, indem wir setzen

$$(3)\qquad w_1 + \lambda_1 - \operatorname{arctang}\frac{y_1-y}{x_1-x} = -z,$$

wobei z eine neue Unbekannte darstellt. Zugleich hat z aber auch eine geometrische Bedeutung, indem es, wie man aus (3) sieht, der Richtungswinkel der Nullrichtung nach der Ausgleichung ist; es kann somit auch als *Orientierungsunbekannte* der gemessenen Richtungen bezeichnet werden.

Wir erhalten dann aus (3) und (2) die einfachen Fehlergleichungen

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -w_1 - z + \operatorname{arctang}\frac{y_1-y}{x_1-x}\\
(4)\quad \lambda_2 &= -w_2 - z + \operatorname{arctang}\frac{y_2-y}{x_2-x}\\
&\vdots\\
\lambda_n &= -w_n - z + \operatorname{arctang}\frac{y_n-y}{x_n-x}.
\end{aligned}$$

Die Fehlergleichungen (4) werden durch Einführung von Näherungswerten der Unbekannten und durch Reihenentwicklung linear gemacht. Wir setzen

$$x = x_0 + \xi \qquad y = y_0 + \eta,$$

und es wird

$$\operatorname{arctang}\frac{y_1-y_0-\eta}{x_1-x_0-\xi} =$$

$$= \operatorname{arctang}\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} + \frac{\partial}{\partial x_0}\operatorname{arctang}\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\,\xi + \frac{\partial}{\partial y_0}\operatorname{arctang}\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\,\eta.$$

Die beiden Differentialquotienten ergeben sich leicht analog der in § 141, S. 348 ausgeführten Entwicklung.

Mit den Bezeichnungen

$$(4^*)\qquad \begin{aligned}
\operatorname{arctang}\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} &= \varphi_1^0\\
\sqrt{(y_1-y_0)^2+(x_1-x_0)^2} &= s_1^0
\end{aligned}$$

wird

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \operatorname{arctang} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = + \frac{\sin \varphi_1^0}{s_1^0}$$
$$\frac{\partial}{\partial y_0} \operatorname{arctang} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = - \frac{\cos \varphi_1^0}{s_1^0}.$$

Um die Verbesserungen λ in Sekunden auszudrücken, sind die beiden Differentialquotienten noch mit ϱ'' zu multiplizieren, womit wir die Koeffizienten

$$(5) \qquad \begin{aligned} a_1 &= + \frac{\sin \varphi_1^0}{s_1^0} \varrho'' \qquad b_1 = - \frac{\cos \varphi_1^0}{s_1^0} \varrho'' \\ a_2 &= + \frac{\sin \varphi_2^0}{s_2^0} \varrho'' \qquad b_2 = - \frac{\cos \varphi_2^0}{s_2^0} \varrho'' \\ &\vdots \end{aligned}$$

erhalten.

Wir benutzen auch noch für die Unbekannte z einen Näherungswert, indem wir

$$(6) \qquad z = z_0 + \zeta$$

setzen, und z_0 gleich einer der Differenzen $\varphi^0 - w$ annehmen. Führen wir noch die Bezeichnungen

$$(7) \qquad \begin{aligned} l_1 &= \varphi_1^0 - w_1 - z_0 \\ l_2 &= \varphi_2^0 - w_2 - z_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

ein, so erhalten wir die endgültigen Fehlergleichungen

$$(8) \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= - l_1 - \zeta + a_1 \xi + b_1 \eta \\ \lambda_2 &= - l_2 - \zeta + a_2 \xi + b_2 \eta \\ &\vdots \\ \lambda_n &= - l_n - \zeta + a_n \xi + b_n \eta. \end{aligned}$$

Man könnte hieraus die drei Normalgleichungen für die drei Unbekannten aufstellen. Bequemer ist es aber, zunächst nur die erste Normalgleichung zu bilden und diese zur Elimination von ζ aus den Fehlergleichungen zu benutzen. Die erste Normalgleichung lautet

$$n\zeta - [a]\xi - [b]\eta + [l] = 0$$

oder

$$(9) \qquad 0 = + \frac{[l]}{n} + \zeta - \frac{[a]}{n} \xi - \frac{[b]}{n} \eta.$$

Wird diese Gleichung zu allen Fehlergleichungen hinzugefügt, so fällt ζ heraus, und es läßt sich leicht einsehen, daß

die aus den reduzierten Fehlergleichungen aufgestellten Normalgleichungen mit den einmal reduzierten Normalgleichungen des Systems (8) übereinstimmen.

Zur Berechnung des mittleren Fehlers einer Richtungsmessung haben wir

$$\mu^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n-3}. \tag{10}$$

Nachdem aus (9) die Unbekannte z und aus den Fehlergleichungen (8) die Verbesserungen λ berechnet sind, wird alles in die Gl. (4) eingesetzt, wodurch die ganze Berechnung geprüft wird.

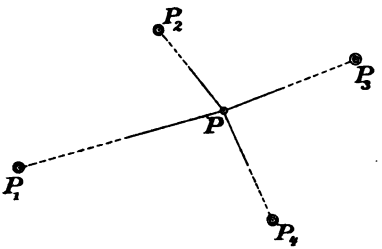


Fig. 236.

§ 166. Beispiel.

Zur Bestimmung eines Neupunktes P wurden nach vier Festpunkten die folgenden Richtungen gemessen (Fig. 236)

$$\begin{aligned} P_1 &: \quad 0^0\ 00'\ 00'' = w_1 \\ P_2 &: \quad 68\ \ 38\ \ 14{,}5 = w_2 \\ P_3 &: 174\ \ 08\ \ 53{,}5 = w_3 \\ P_4 &: 266\ \ 34\ \ 39{,}5 = w_4. \end{aligned}$$

Die Koordinaten der vier Festpunkte sind

$$\begin{aligned} y_1 &= +\ 544{,}210\ \text{m} & x_1 &= -\ 9273{,}710\ \text{m} \\ y_2 &= +\ 2576{,}849 & x_2 &= -\ 7621{,}093 \\ y_3 &= +\ 4902{,}644 & x_3 &= -\ 8335{,}019 \\ y_4 &= +\ 3613{,}630 & x_4 &= -\ 10155{,}493. \end{aligned}$$

Aus einer vorläufigen Koordinatenberechnung ergaben sich für den Neupunkt P die Näherungskoordinaten

$$y_0 = +\ 3289{,}2\ \text{m} \qquad x_0 = -\ 8791{,}8\ \text{m}.$$

Wir berechnen zuerst aus den Koordinaten nach Gl. (4*) des vorigen Paragraphen die vorläufigen Richtungswinkel $\varphi_1^0, \varphi_2^0 \cdots$, und stellen diese mit den gemessenen Richtungen in der nachfolgenden Tabelle zusammen.

	φ^0	w	$\varphi^0 - w$	$-l$	a	b
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″		
P_1	260 02 33,6	0 00 00	260 02 33,6	+ 3,6	− 72,9	+ 12,8
P_2	328 40 49,4	68 38 14,5	260 02 34,9	+ 4,9	− 78,2	− 128,6
P_3	74 11 33,7	174 08 53,5	260 02 40,2	+ 10,2	+ 118,4	− 33,5
P_4	166 37 04,1	266 34 39,5	260 02 24,6	− 5,4	+ 34,1	+ 143,1

Nachdem die Differenzen $\varphi^0 - w$ berechnet sind, nehmen wir den runden Wert

$$z_0 = 260^0\ 02'\ 30''$$

an und finden dann nach Gl. (7) des vorigen Paragraphen die Größen $-l$. Endlich berechnen wir noch nach (5) die Koeffizienten a und b.

Hierauf stellen wir die Fehlergleichungen auf, dividieren jedoch die Koeffizienten a und b durch 10, indem wir die Koordinatenverbesserungen ξ und η in Dezimetern berechnen. Es ist

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= +\ 3{,}6 - \zeta - 7{,}3\,\xi + 1{,}3\,\eta \\
\lambda_2 &= +\ 4{,}9 - \zeta - 7{,}8\,\xi - 12{,}9\,\eta \\
\lambda_3 &= +\ 10{,}2 - \zeta + 11{,}8\,\xi - 3{,}4\,\eta \\
\lambda_4 &= -\ 5{,}4 - \zeta + 3{,}4\,\xi + 14{,}3\,\eta.
\end{aligned}$$

Die erste Normalgleichung lautet

$$0 = +\ 13{,}3 - 4\,\zeta + 0{,}1\,\xi - 0{,}7\,\eta,$$

und wir haben zur Elimination von ζ

$$0 = -\ 3{,}3 + \zeta \quad \cdot \quad + 0{,}2\,\eta,$$

womit wir die reduzierten Fehlergleichungen erhalten

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= +\ 0{,}3 - 7{,}3\,\xi + 1{,}5\,\eta \\
\lambda_2 &= +\ 1{,}6 - 7{,}8\,\xi - 12{,}7\,\eta \\
\lambda_3 &= +\ 6{,}9 + 11{,}8\,\xi - 3{,}2\,\eta \\
\lambda_4 &= -\ 8{,}7 + 3{,}4\,\xi + 14{,}5\,\eta.
\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die beiden Normalgleichungen

$$\begin{aligned}
+\ 264{,}9\,\xi + 99{,}6\,\eta + 37{,}16 &= 0 \\
+\ 99{,}6\,\xi + 384{,}0\,\eta - 168{,}10 &= 0.
\end{aligned}$$

Die Unbekannten erhalten die Werte

$$\xi = -\ 0{,}338 \text{ dm} \qquad \eta = +\ 0{,}525 \text{ dm}$$

oder

$$\xi = -0{,}034 \text{ m} \qquad \eta = +0{,}052 \text{ m},$$

womit die Koordinaten werden

$$y = +3289{,}253 \text{ m} \qquad x = -8791{,}834 \text{ m}.$$

Für die Schlußprobe berechnen wir mit Hilfe von ξ und η aus der Eliminationsgleichung für ζ den Wert

$$\zeta = +3{,}2''$$

und erhalten

$$z = 260^0\ 02'\ 33{,}2''.$$

Endlich finden wir

$$\lambda_1 = +3{,}6'' \qquad \lambda_3 = +1{,}2''$$
$$\lambda_2 = -2{,}4 \qquad \lambda_4 = -2{,}3.$$

Berechnen wir die endgültigen Richtungswinkel einerseits aus den Koordinaten und andererseits aus den verbesserten Richtungen und der Orientierungsunbekannten, so ergibt sich:

$$\varphi_1 = 260^0\ 02'\ 36{,}7'' \qquad z + w_1 + \lambda_1 = 260^0\ 02'\ 36{,}8''$$
$$\varphi_2 = 328\ 40\ 45{,}2 \qquad z + w_2 + \lambda_2 = 328\ 40\ 45{,}3$$
$$\varphi_3 = 74\ 11\ 28{,}0 \qquad z + w_3 + \lambda_3 = 74\ 11\ 27{,}9$$
$$\varphi_4 = 166\ 37\ 10{,}5 \qquad z + w_4 + \lambda_4 = 166\ 37\ 10{,}4.$$

Die Übereinstimmung, die durch die Gl. (4) des vorigen Paragraphen gefordert wird, ist somit in hinreichendem Maße vorhanden.

Wir berechnen schließlich noch $[\lambda\lambda] = 25{,}45$ und erhalten hieraus

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{25{,}45}{4-3}} = \pm 5{,}0''.$$

§ 167. Rückwärtseinschneiden mit Winkelmessungen.

Sind auf dem Neupunkt statt der Richtungssätze einzelne Winkel gemessen, so ist für jeden derselben eine Fehlergleichung aufzustellen, wie es in § 141, S. 347 geschehen ist. Wir können aber auch von den Entwicklungen des vorigen Paragraphen ausgehen. Betrachten wir jeden Winkel als Differenz zweier gemessenen Richtungen, so können wir zunächst für jede Richtung eine Fehlergleichung bilden.

Ist z. B. der Winkel $w_{2,3}$ zwischen den beiden Festpunkten P_2 und P_3 gemessen, so haben wir nach (4) S. 413 für die beiden Richtungen

$$w_2 + \lambda_2 = -z + \text{arctang}\,\frac{y_2 - y}{x_2 - x}$$

$$w_3 + \lambda_3 = -z + \text{arctang}\,\frac{y_3 - y}{x_3 - x}.$$

Die Differenz gibt die Fehlergleichung für den gemessenen Winkel

$$w_{2,3} + \lambda_{2,3} = \text{arctang}\,\frac{y_3 - y}{x_3 - x} - \text{arctang}\,\frac{y_2 - y}{x_2 - x}.$$

Hieraus folgt aber unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen

$$\lambda_{2,3} = -w_{2,3} + \varphi_3^0 - \varphi_2^0 + (a_3 - a_2)\,\xi + (b_3 - b_2)\,\eta.$$

Zur Berechnung des mittleren Fehlers einer Winkelmessung haben wir, da nur zwei Unbekannte vorliegen

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-2}}.$$

§ 168. Vorwärtsabschneiden.

Zur einfachen Bestimmung eines Neupunktes durch Vorwärtsabschneiden genügt, wie wir im § 56, S. 124 gesehen haben, die Messung je zweier Richtungen auf zwei Festpunkten, deren eine durch den Neupunkt, die andere durch einen weiteren Festpunkt geht. Sind auf den Festpunkten mehr als zwei Richtungen gemessen, so sind überschüssige Beobachtungen vorhanden und es liegt für jeden Festpunkt eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung vor, aus der die *Orientierungskonstante* der Station hervorgeht. Diese Ausgleichung, die in einer einfachen Mittelbildung besteht, ist in dem Beispiel des § 56, S. 125 bereits durchgeführt.

Eine weitere Ausgleichungsaufgabe entsteht dann, wenn die Messungen auf mehr als zwei Festpunkten ausgeführt werden. Diese Ausgleichung ist in § 64, S. 144 auf graphischem Wege erfolgt, auf dem auch die der Methode der kleinsten Quadrate

entsprechenden Koordinaten des Neupunktes ermittelt werden konnten.

Demgemäß werden wir auch die folgende strenge Ausgleichung in zwei Teile zerlegen.

Wir bezeichnen mit $w_1, w_2, \cdots w_{n-1}$ und w_n die n Richtungsmessungen auf einem Festpunkte P nach den Festpunkten $P_1, P_2 \cdots P_{n-1}$ und dem Neupunkte N, ferner mit $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}$ und λ_n die Verbesserungen dieser Richtungen. Für die Richtungswinkel der Strahlen erhalten wir dann

$$(1)\qquad \begin{aligned} \varphi_1 &= \text{arctang}\,\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \\ \varphi_2 &= \text{arctang}\,\frac{y_2 - y}{x_2 - x} \\ &\vdots \\ \varphi_{n-1} &= \text{arctang}\,\frac{y_{n-1} - y}{x_{n-1} - x} \\ \varphi_n &= \text{arctang}\,\frac{y_n - y}{x_n - x}, \end{aligned}$$

worin y_n und x_n die endgültigen Koordinaten des Neupunktes sind. Die Differenzen dieser Richtungswinkel müssen gleich den Differenzen der entsprechenden ausgeglichenen Richtungen sein, folglich ist

$$(2)\qquad \begin{aligned} w_2 + \lambda_2 - w_1 - \lambda_1 &= \text{arctang}\,\frac{y_2 - y}{x_2 - x} - \text{arctang}\,\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \\ w_3 + \lambda_3 - w_1 - \lambda_1 &= \text{arctang}\,\frac{y_3 - y}{x_3 - x} - \text{arctang}\,\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \\ &\vdots \\ w_{n-1} + \lambda_{n-1} - w_1 - \lambda_1 &= \text{arctang}\,\frac{y_{n-1} - y}{x_{n-1} - x} - \text{arctang}\,\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \\ w_n + \lambda_n - w_1 - \lambda_1 &= \text{arctang}\,\frac{y_n - y}{x_n - x} - \text{arctang}\,\frac{y_1 - y}{x_1 - x}. \end{aligned}$$

Analog der Ausgleichung des Rückwärtseinschneidens im vorigen Paragraphen ersetzen wir die allen Gleichungen gemeinsamen Glieder durch eine Unbekannte z und erhalten

$$(3)\qquad z = \text{arctang}\,\frac{y_1 - y}{x_1 - x} - w_1 - \lambda_1,$$

so daß sich nun die n Fehlergleichungen ergeben

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= -w_1 - z + \operatorname{arctang}\frac{y_1 - y}{x_1 - x}\\
\lambda_2 &= -w_2 - z + \operatorname{arctang}\frac{y_2 - y}{x_2 - x}\\
&\vdots \qquad (4)\\
\lambda_{n-1} &= -w_{n-1} - z + \operatorname{arctang}\frac{y_{n-1} - y}{x_{n-1} - x}\\
\lambda_n &= -w_n - z + \operatorname{arctang}\frac{y_n - y}{x_n - x}\,.
\end{aligned}
$$

Die ersten $n-1$ Gleichungen enthalten nur die Unbekannte z, während in der letzten Gleichung auch noch die Unbekannten x_n und y_n vorkommen. Wir benutzen die ersten $n-1$ Fehlergleichungen, um einen vorläufigen Wert z_0 von z zu bestimmen und erhalten als Normalgleichung mit einfacherer Bezeichnung der Richtungswinkel

$$(n-1)\,z_0 - [\varphi_i - w_i]_{i=1}^{i=n-1} = 0, \qquad (5)$$

woraus sich ergibt

$$z_0 = \frac{[\varphi_i - w_i]}{n-1}\,. \qquad (6)$$

Nach § 151, S. 376 kann dieser Wert als eine direkte mit dem Gewicht $(n-1)$ erfolgte Beobachtung der Unbekannten z aufgefaßt werden. Infolgedessen ist es auch erlaubt, diese Beobachtung einer neuen Ausgleichung zu unterwerfen, in der sie die Verbesserung ζ erhält, so daß

$$z = z_0 + \zeta \qquad (7)$$

der endgültige Wert der Unbekannten z ist. Setzen wir dies in die letzte Gl. (4) ein, so ist

$$\lambda_n + \zeta = -w_n - z_0 + \operatorname{arctang}\frac{y_n - y}{x_n - x} \quad \text{Gew. 1 bezw. } n-1. \qquad (8)$$

Da die Beobachtungen w_n und z_0 voneinander unabhängig sind, so ist es zulässig, ihre Verbesserungen zu einer einzigen Verbesserung

$$v = \lambda_n + \zeta \qquad (8^*)$$

zusammenzufassen. Nach (4) § 10, S. 26 ist das Quadrat des mittleren Fehlers der Summe der beiden Beobachtungen $w_n + z_0$

gleich der Summe der einzelnen mittleren Fehlerquadrate, und werden statt der drei mittleren Fehler nach (5) § 12, S. 29 die Gewichte eingeführt, so ist die Gewichtsreziproke von $w_n + z_0$ gleich der Summe der Gewichtsreziproken von w_n und z_0. Mithin gilt für die Verbesserung v

$$\frac{1}{g} = \frac{n}{n-1}$$

und wir erhalten an Stelle von (8)

$$v = -w_n - z_0 + \text{arctang}\,\frac{y_n - y}{x_n - x} \quad \text{Gew.}\ \frac{n-1}{n}. \tag{9}$$

Diese Fehlergleichung ist in bezug auf die Unbekannten x_n und y_n linear zu machen. Hierzu setzen wir

$$x_n = x_0 + \xi \qquad y_n = y_0 + \eta, \tag{10}$$

worin x_0 und y_0 Näherungswerte der Unbekannten sind, und entwickeln das letzte Glied der Gleichung (9) nach *Taylors* Lehrsatz. Es ist

$$\begin{aligned}\text{arctang}\,\frac{y_0 - y + \eta}{x_0 - x + \xi} = \text{arctang}\,\frac{y_0 - y}{x_0 - x} &+ \frac{\partial}{\partial x_0}\,\text{arctang}\,\frac{y_0 - y}{x_0 - x}\,\xi \\ &+ \frac{\partial}{\partial y_0}\,\text{arctang}\,\frac{y_0 - y}{x_0 - x}\,\eta.\end{aligned} \tag{11}$$

Entsprechend dem vorigen Paragraphen erhalten wir unter Einführung von

$$\text{arctang}\,\frac{y_0 - y}{x_0 - x} = \varphi_0 \tag{12}$$

und

$$(y_0 - y)^2 + (x_0 - x)^2 = s_0^2$$

die Differentialquotienten

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_0}\,\text{arctang}\,\frac{y_0 - y}{x_0 - x} &= -\frac{y_0 - y}{s_0^2} = -\frac{\sin\varphi_0}{s_0} \\ \frac{\partial}{\partial y_0}\,\text{arctang}\,\frac{y_0 - y}{x_0 - x} &= +\frac{x_0 - x}{s_0^2} = +\frac{\cos\varphi_0}{s_0}.\end{aligned} \tag{13}$$

Da die Verbesserungen v in Sekunden berechnet werden sollen, so sind die Differentialquotienten noch mit ϱ'' zu multiplizieren und die Fehlergleichung (9) geht somit über in

$$v = -w_n - z_0 + \varphi_0 - \frac{\sin\varphi_0}{s_0}\,\varrho''\,\xi + \frac{\cos\varphi_0}{s_0}\,\varrho''\,\eta. \tag{14}$$

Zur Vereinfachung der Bezeichnungen setzen wir

$$(15)\quad \varphi_0 - w - z_0 = -l, \quad \frac{-\sin\varphi_0}{s_0}\varrho'' = a, \quad \frac{+\cos\varphi_0}{s_0}\varrho'' = b$$

und erhalten dann die Fehlergleichung

$$(16)\qquad v = -l + a\xi + b\eta \qquad g = \frac{n-1}{n}.$$

In derselben Weise sind die Richtungsmessungen auf den übrigen Standpunkten P', P'' $\cdots$ zu behandeln, deren jeder eine Fehlergleichung vorstehender Form liefert. Es ergeben sich somit die endgültigen Fehlergleichungen

$$\begin{aligned} v &= -l + a\,\xi + b\,\eta \qquad g = \frac{n-1}{n} \\ (17)\qquad v' &= -l' + a'\,\xi + b'\,\eta \qquad g' = \frac{n'-1}{n'} \\ v'' &= -l'' + a''\xi + b''\eta \qquad g'' = \frac{n''-1}{n''}, \end{aligned}$$

worin n, n', n'' $\cdots$ die Anzahl der auf den Standpunkten gemessenen Richtungen bezeichnen.

Schlußprobe. Für die Aufstellung und Auflösung der Normalgleichungen sind die gewöhnlichen Rechenproben anzuwenden. Um eine Schlußprobe namentlich für das Linearmachen der Fehlergleichungen zu erhalten, sind nach (17) die einzelnen Verbesserungen v zu berechnen. Werden hierauf alle gefundenen Werte in die Gl. (9) und die ihr entsprechenden, für die übrigen Standpunkte aufgestellten Gleichungen eingesetzt, so müssen diese bei richtiger Rechnung erfüllt werden.

Der mittlere Fehler einer Richtungsmessung ist durch die Formel

$$(18)\qquad \mu = \pm\sqrt{\frac{[vvg]}{m-2}}$$

gegeben, worin m die Anzahl der Standpunkte bezeichnet.

Vorwärtsabschneiden mit Winkelmessungen. Sind anstatt der Richtungsmessungen auf den Festpunkten Winkelmessungen ausgeführt worden, so ist für jeden gemessenen Winkel eine Fehlergleichung aufzustellen. Für den einfachen Fall, in dem auf jeder Station nur eine Winkelmessung vorliegt, wurde bereits § 141, S. 347 ein vollständiges Beispiel gegeben, das auf

alle andern Fälle unmittelbar ausgedehnt werden kann. Für jeden weiteren gemessenen Winkel erfolgt die Aufstellung der Fehlergleichung in derselben Weise.

§ 169. Beispiel.

Wir kehren nochmals zu dem S. 124 und S. 146 bearbeiteten Vorwärtsabschnitt zurück, der zunächst ohne überschüssige Beobachtungen, dann mit graphischer Ausgleichung berechnet wurde, und führen nun die Ausgleichung nach der vorstehenden Entwicklung aus.

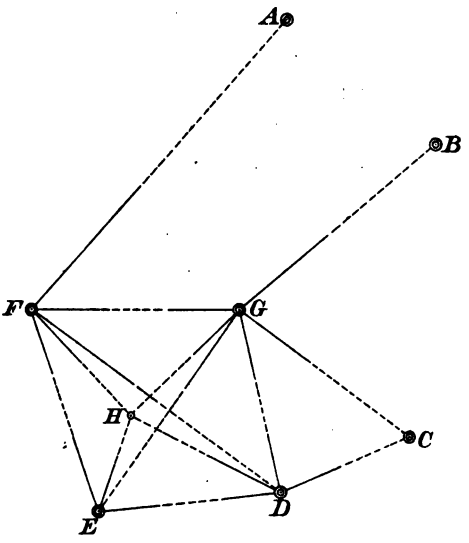


Fig. 237.

Der Punkt H (Fig. 237) ist von den Punkten E, F, G und D durch Richtungsmessungen vorwärts abgeschnitten worden. Als Näherungskoordinaten nehmen wir die S. 126 berechneten an, so daß

$$y_0 = +\ 9412{,}075 \text{ m}$$
$$x_0 = +\ 9615{,}817 \text{ m}$$

ist. Hieraus und aus den Koordinaten der Festpunkte, die S. 123 zusammengestellt sind, berechnen wir die genäherten Richtungswinkel φ_0, φ_0', $\varphi_0'' \cdots$, die übrigens auch aus den früheren Berechnungen entnommen werden können. Daneben setzen wir die vier gemessenen Richtungen w, w', $\cdots$, sowie die Orientierungsunbekannten z_0, $z_0' \cdots$, die auf S. 125 und S. 147 für die vier Stationen berechnet sind. Es ist

Stdp.	E:	φ_0	=	19°	26′	01″	w	=	33°	47′	15″	z_0	= 345°	38′ 46″	n	= 3
„	F:	φ_0'	=	134	10	02	w'	=	88	12	30	z_0'	=	45 57 32	n'	= 5
„	G:	φ_0''	=	236	50	14	w''	=	183	18	34	z_0''	=	53 32 16	n''	= 6
„	D:	φ_0'''	=	307	24	45	w'''	=	38	52	01	z_0'''	=	268 32 21	n'''	= 4.

Zur Berechnung der Koeffizienten a und b brauchen wir

noch die vier Entfernungen s_0, s_0', s_0'' und s_0''', die wir von S. 147 entnehmen.

Wir finden dann

$$\begin{array}{llll} l = 0'' & a = -106{,}3 & b = +301{,}4 \\ l' = 0 & a' = -215{,}3 & b' = -209{,}1 \\ l'' = -36 & a'' = +170{,}6 & b'' = +130{,}5 \\ l''' = +23 & a''' = +245{,}8 & b''' = -160{,}7. \end{array}$$

Hiermit ist die Aufstellung der Fehlergleichungen vorbereitet. Zur Vereinfachung der Zahlenrechnung wollen wir die Verbesserungen ξ und η in Dezimetern statt in Metern berechnen und müssen dann die Koeffizienten a und b durch 10 dividieren. Es ergeben sich die Fehlergleichungen

$$\begin{array}{lll} v = 0 - 10{,}6\,\xi + 30{,}1\,\eta & \text{Gew. } \frac{2}{3} \\ v' = 0 - 21{,}5\,\xi - 20{,}9\,\eta & \text{„ } \frac{4}{5} \\ v'' = -36 + 24{,}6\,\xi - 16{,}1\,\eta & \text{„ } \frac{5}{6} \\ v''' = +23 + 17{,}1\,\xi + 13{,}0\,\eta & \text{„ } \frac{3}{4}. \end{array}$$

Die Normalgleichungen sind

$$\begin{array}{l} +1170\,\xi - 18\,\eta - 445{,}5 = 0 \\ -18\,\xi + 1294\,\eta + 708{,}5 = 0, \end{array}$$

und es wird

$$\begin{array}{l} \xi = +0{,}374 \text{ dm} = +0{,}037 \text{ m} \\ \eta = -0{,}541 \text{ dm} = -0{,}054 \text{ m}. \end{array}$$

Hieraus ergeben sich die endgültigen Koordinaten des Punktes H

$$\begin{array}{l} y_n = +9412{,}021 \text{ m} \\ x_n = +9615{,}854 \text{ m}. \end{array}$$

Zur Berechnung des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit, der hier gleich dem mittleren Fehler einer Richtungsmessung ist, ermitteln wir aus den Fehlergleichungen die Werte der Verbesserungen und erhalten

$$\begin{array}{ll} v = -20{,}2'' & v'' = -18{,}2'' \\ v' = +3{,}2 & v''' = +22{,}3. \end{array}$$

Mit den obigen Gewichten ergibt sich

$$[vvg] = 928$$

und

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{928}{2}} = \pm 21{,}5''.$$

Um auch den mittleren Fehler der Punktbestimmung angeben zu können, müssen wir noch die Gewichtsreziproken Q_{11} und Q_{22} der beiden Unbekannten bestimmen. Hierzu dienen die beiden Gewichtsgleichungs-Systeme

$$\begin{aligned} +1170\,Q_{11} - 18\,Q_{12} &= 1 \\ -18\,Q_{11} + 1294\,Q_{12} &= 0 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} +1170\,Q_{21} - 18\,Q_{22} &= 0 \\ -18\,Q_{21} + 1294\,Q_{22} &= 1, \end{aligned}$$

aus denen wir erhalten

$$Q_{11} = 0{,}000\,8548 \qquad Q_{22} = 0{,}000\,7728.$$

Es wird dann

$$\mu_x^2 = \mu^2 Q_{11} = 0{,}3966 \qquad \mu_y^2 = \mu^2 Q_{22} = 0{,}3586,$$

also

$$M^2 = \mu_x^2 + \mu_y^2 = 0{,}7552$$

und

$$M = \pm 0{,}869 \text{ dm} = \pm 0{,}087 \text{ m}.$$

Die Schlußprobe besteht darin, daß wir die gefundenen Koordinaten und die Verbesserungen v in die ursprünglichen Fehlergleichungen (9) des vorigen Paragraphen einsetzen. Es wird

$$\text{arctang}\,\frac{y_n - y}{x_n - x} = 19^0\ 25'\ 40{,}7''$$

$$\text{arctang}\,\frac{y_n - y'}{x_n - x'} = 134^0\ 10'\ 05{,}0''$$

$$\text{arctang}\,\frac{y_n - y''}{x_n - x''} = 236^0\ 50'\ 31{,}5''$$

$$\text{arctang}\,\frac{y_n - y'''}{x_n - x'''} = 307^0\ 24'\ 44{,}4''$$

und diese Werte erfüllen mit den obigen Verbesserungen der Beobachtungen die Fehlergleichungen (9) § 168, S. 421.

§ 170. Vereinigtes Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden. Berechnung der Richtungskoeffizienten a und b.

Ist ein Neupunkt durch Vorwärtsabschneiden und Rückwärtseinschneiden gleichzeitig bestimmt worden, so bezeichnet man die auf den Festpunkten nach dem Neupunkt gemessenen Richtungen als *äußere*, die auf dem Neupunkt gemessenen als *innere* Richtungen. Nachdem durch eine vorläufige Berechnung Näherungskoordinaten des Neupunktes gefunden sind, werden die Fehlergleichungen für die äußeren Richtungen nach § 168, S. 418 und für die inneren Richtungen nach § 165, S. 412 aufgestellt. Nachdem aus den letzteren die Orientierungsunbekannte eliminiert ist, werden aus beiden Systemen zusammen die beiden Normalgleichungen gebildet, die die Unbekannten ergeben.

Es sind noch einige Bemerkungen über die Berechnung der *Richtungskoeffizienten* a und b, die bei allen Koordinatenausgleichungen auftreten, hinzuzufügen. Wie man aus den Gl. (5) § 165, S. 414 und (15) § 168, S. 422 sieht, sind die Koeffizienten, die sich auf eine äußere und die ihr entsprechende innere Richtung beziehen, identisch, denn die Verschiedenheit der Vorzeichen wird dadurch aufgehoben, daß die beiden Richtungswinkel um 180^0 verschieden sind.

Die Formeln für die Berechnung der Koeffizienten lassen sich auch noch derartig umformen, daß die Entfernungen s_0 durch die Koordinatenunterschiede ersetzt werden, die ohnedies bei der Berechnung der vorläufigen Richtungswinkel φ^0 gebraucht werden.

Wir bezeichnen mit x_i, y_i die Koordinaten eines Festpunktes P_i, mit x_0, y_0 die Näherungskoordinaten des Neupunktes P, die einen Punkt P_0 bestimmen, mit φ_i^0 den Richtungswinkel (P_0, P_i) und mit s_i^0 die Entfernung P_0P_i. Es gilt dann sowohl für Vorwärts-, als auch für Rückwärtseinschneiden

$$(1) \qquad a_i = + \frac{\sin \varphi_i^0}{s_i^0} \varrho'' \qquad b_i = - \frac{\cos \varphi_i^0}{s_i^0} \varrho''$$

und wenn s_i^0 durch $\frac{y_i - y_0}{\sin \varphi_i^0}$ bzw. durch $\frac{x_i - x_0}{\cos \varphi_i^0}$ ersetzt wird

$$(2) \qquad a_i = + \frac{\sin^2 \varphi_i^0}{y_i - y_0} \varrho'' \qquad b_i = - \frac{\cos^2 \varphi_i^0}{x_i - x_0} \varrho''.$$

Die Berechnung erfolgt entweder mit vierstelligen Logarithmen oder mit einer der für diesen Zweck besonders entworfenen Tafeln, die die Berechnung teils erleichtern, teils vollständig ersetzen.[1])

§ 171. Gleichzeitige Einschaltung mehrerer Dreieckspunkte.

Wir gehen nun zu der allgemeineren Aufgabe über, in der mehrere Neupunkte gleichzeitig in ein Netz von gegebenen Dreieckspunkten eingeschaltet werden sollen. Wir setzen hierbei vollständige Richtungssätze auf allen Punkten voraus, und haben dann sowohl Richtungen von Festpunkten zu Neupunkten und umgekehrt, als auch Richtungen zwischen je zwei Festpunkten oder je zwei Neupunkten. Es genügt, den letzteren Fall zu betrachten, der die übrigen einschließt.

Für eine Richtung $w_{1,2}$ von einem Punkte P_1 nach einem Punkte P_2 haben wir nach (4) § 165, S. 413 die Fehlergleichung

$$\lambda_{1,2} = -w_{1,2} - z_1 + \operatorname{arctang}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{1}$$

Da hierin beide Punkte Neupunkte sind, so setzen wir

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \xi_1 \qquad y_1 = y_1^0 + \eta_1 \\ x_2 &= x_2^0 + \xi_2 \qquad y_2 = y_2^0 + \eta_2 \end{aligned} \tag{2}$$

und erhalten nach *Taylors* Satz

$$\begin{aligned} \operatorname{arctang}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{arctang}\frac{y_2^0 - y_1^0}{x_2^0 - x_1^0} &+ \frac{\sin\varphi_{1,2}^0}{s_{1,2}^0}\varrho''\xi_1 \\ &- \frac{\cos\varphi_{1,2}^0}{s_{1,2}^0}\varrho''\eta_1 - \frac{\sin\varphi_{1,2}^0}{s_{1,2}^0}\varrho''\xi_2 + \frac{\cos\varphi_{1,2}^0}{s_{1,2}^0}\varrho''\eta_2 \end{aligned} \tag{3}$$

oder in einfacherer Bezeichnung

$$\operatorname{arctang}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \varphi_{1,2}^0 + a_{1,2}\xi_1 + b_{1,2}\eta_1 - a_{1,2}\xi_2 - b_{1,2}\eta_2. \tag{4}$$

Setzen wir noch analog dem Früheren

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1^0 + \xi_1 \\ \text{und} \qquad \varphi_{1,2}^0 - w_{1,2} - z_1^0 &= -l_{1,2}, \end{aligned} \tag{5}$$

1) Z. B. des Verfassers *Hilfstafel zur Berechnung der Richtungskoeffizienten für Koordinatenausgleichungen.* Berlin 1903.

so finden wir die Fehlergleichung

$$(6) \qquad \lambda_{1,2} = -l_{1,2} - \xi_1 + a_{1,2}\xi_1 + b_{1,2}\eta_1 - a_{1,2}\xi_2 - b_{1,2}\eta_2.$$

Nehmen wir an, daß auf dem Punkte P_1 die Richtungen nach den Punkten P_2, P_3, $P_4 \cdots$, deren Anzahl gleich n_1 ist, gemessen sind, so erhalten wir für P_1 die folgenden Fehlergleichungen:

$$(7) \quad \begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -l_{1,2} - \xi_1 + a_{1,2}\xi_1 + b_{1,2}\eta_1 - a_{1,2}\xi_2 - b_{1,2}\eta_2 \\ \lambda_{1,3} &= -l_{1,3} - \xi_1 + a_{1,3}\xi_1 + b_{1,3}\eta_1 \quad \cdot \quad \cdot \\ &\qquad\qquad - a_{1,3}\xi_3 - b_{1,3}\eta_3 \\ \lambda_{1,4} &= -l_{1,4} - \xi_1 + a_{1,4}\xi_1 + b_{1,4}\eta_1 \quad \cdot \quad \cdot \\ &\qquad\qquad\qquad\quad \cdot \quad \cdot \quad - a_{1,4}\xi_4 - b_{1,4}\eta_4. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nach diesem Vorbild sind die Fehlergleichungen für alle Stationspunkte ohne Unterscheidung der Neupunkte und Festpunkte aufzustellen. Hierauf setzt man für alle Festpunkte die Werte von ξ und η gleich Null und erhält dann die endgültigen Fehlergleichungen.

Für s Stationspunkte und p Neupunkte ist die Anzahl der Unbekannten, da s Orientierungsunbekannte und $2p$ Koordinaten vorkommen, gleich $s + 2p$, wodurch auch die Anzahl der Normalgleichungen gegeben ist. Wir können jedoch nach dem Verfahren des § 145, S. 358 zunächst die s Größen ζ eliminieren. Ordnen wir die Unbekannten in den Fehlergleichungen so, daß die Größen ζ die ersten s Unbekannten bilden, so wird die erste Normalgleichung nur aus den Fehlergleichungen der ersten Station hervorgehen, die zweite nur aus denen der zweiten Station usw. Wir können mithin in den Fehlergleichungen der ersten Station die Unbekannte ζ_1 weglassen, wenn wir entsprechend den Gleichungen (1)—(3) § 145, S. 358 eine fingierte Fehlergleichung hinzufügen

$$(8) \quad \begin{aligned} v_1 = &-(l_{1,2} + l_{1,3} + \cdots) + (a_{1,2} + a_{1,3} + \cdots)\xi_1 \\ &+ (b_{1,2} + b_{1,3} + \cdots)\eta_1 - a_{1,2}\xi_2 - b_{1,2}\eta_2 - a_{1,3}\xi_3 - b_{1,3}\eta_3 - \cdots \end{aligned}$$

$$\text{Gew.: } -\frac{1}{n_1}$$

oder

$$(8^*)\quad v_1' = -\frac{(l_{1,2}+l_{1,3}+\cdots)}{\sqrt{n_1}} + \frac{(a_{1,2}+a_{1,3}+\cdots)}{\sqrt{n_1}}\xi_1 + \frac{(b_{1,2}+b_{1,3}+\cdots)}{\sqrt{n_1}}\eta_1 - \frac{a_{1,2}}{\sqrt{n_1}}\xi_2 - \frac{b_{1,2}}{\sqrt{n_1}}\eta_2 - \frac{a_{1,3}}{\sqrt{n_1}}\xi_3 - \frac{b_{1,3}}{\sqrt{n_1}}\eta_3 - \cdots \quad \text{Gew.: } -1.$$

Wird eine solche fingierte Fehlergleichung für jede Station aufgestellt, so ist die Anzahl der Unbekannten und hiermit auch die Anzahl der Normalgleichungen auf $2p$ reduziert.

Sollen nach der Auflösung der Normalgleichungen auch die Verbesserungen λ berechnet werden, so ist zunächst für jede Station die Unbekannte ζ zu ermitteln. Hierzu benutzen wir für Station 1 die erste Normalgleichung der Fehlergleichungen (7) und erhalten

$$+ n_1\xi_1 - (a_{1,2}+a_{1,3}+\cdots)\xi_1 - (b_{1,2}+b_{1,3}+\cdots)\eta_1 + a_{1,2}\xi_2 + b_{1,2}\eta_2 + a_{1,3}\xi_3 + b_{1,3}\eta_3 + \cdots + (l_{1,2}+l_{1,3}+\cdots) = 0$$

oder

$$\zeta_1 = \frac{(a_{1,2}+a_{1,3}+\cdots)}{n_1}\xi_1 + \frac{(b_{1,2}+b_{1,3}+\cdots)}{n_1}\eta_1 - \frac{a_{1,2}}{n_1}\xi_2 - \frac{b_{1,2}}{n_1}\eta_2 - \frac{a_{1,3}}{n_1}\xi_3 - \frac{b_{1,3}}{n_1}\eta_3 - \cdots - \frac{(l_{1,2}+l_{1,3}+\cdots)}{n_1}.$$

Es ist somit

$$(9)\qquad \xi_1 = \frac{v_1}{\sqrt{n_1}} = v_1',$$

und wir können die fingierte Fehlergleichung (8*) zur Berechnung von ζ_1 benutzen. In derselben Weise ist die Berechnung für die übrigen Stationen auszuführen.

Diese Methode der Punkteinschaltung kann auch zur Ausgleichung selbständiger Dreiecksnetze benutzt werden, für die im allgemeinen die Methode der bedingten Beobachtungen angewendet wird. Nach der vorläufigen Auflösung der Dreiecke müssen in diesem Falle für alle Punkte rechtwinklige Koordinaten berechnet werden, die als Näherungskoordinaten dienen. Bei einem vollkommen selbständigen Dreiecksnetz ist aus der

Basismessung die Länge einer Dreiecksseite bekannt, ferner sind entweder gegeben oder willkürlich angenommen die Koordinaten eines Punktes und der Richtungswinkel einer von ihm ausgehenden Dreiecksseite. Nehmen wir an, daß die Basismessung sich ebenfalls auf die letztere bezieht, so können anstatt der vorher genannten Elemente die Endpunkte dieser Seite als gegeben betrachtet werden. Es sind mithin in den Fehlergleichungen die Größen ξ und η dieser beiden Punkte gleich Null zu setzen.

Für ein Dreiecksnetz, das sich mit mehr als zwei Punkten an ein gegebenes anschließt, kann die vorstehende Ausgleichung mitunter bequemer sein, als die nach bedingten Beobachtungen, da für die Anschlußpunkte mehrere Bedingungsgleichungen einzuführen sind. Es muß daher von Fall zu Fall entschieden werden, welche von beiden Methoden bequemer ist.

§ 172. Beispiel.

Wir wenden das vorstehende Verfahren an, um das Dreiecksnetz von § 160, S. 397 noch einmal auszugleichen. Wir bezeichnen jetzt der Einfachheit wegen die Punkte A, B, C, D, E, F, G mit 1, 2, $\cdots$ 7 und nehmen die beiden Punkte C und D oder 3 und 4 als gegeben an. Es sind somit die gegebenen Koordinaten

$$C\ (3):\ y_3 = +\,10883{,}945 \qquad x_3 = +\,9250{,}960$$
$$D\ (4):\ y_4 = +\,10175{,}056 \qquad x_4 = +\,9032{,}210.$$

Wir nehmen ferner an, daß durch eine vorläufige Auflösung der Dreiecke und Koordinatenrechnung die folgenden auf Dezimeter abgerundeten Näherungskoordinaten der übrigen fünf Punkte gefunden wurden:

$$A\ (1):\ y_1^0 = +\,10391{,}8 \qquad x_1^0 = +\,11518{,}8$$
$$B\ (2):\ y_2^0 = +\,11139{,}7 \qquad x_2^0 = +\,10842{,}0$$
$$E\ (5):\ y_5^0 = +\,\ 9197{,}5 \qquad x_5^0 = +\,\ 9007{,}2$$
$$F\ (6):\ y_6^0 = +\,\ 8919{,}2 \qquad x_6^0 = +\,10094{,}5$$
$$G\ (7):\ y_7^0 = +\,10000{,}2 \qquad x_7^0 = +\,\ 9999{,}9.$$

Hieraus berechnen wir zunächst die vorläufigen Richtungswinkel φ^0, die wir mit den von S. 397 entnommenen gemessenen Richtungen zusammenstellen. In der nachstehenden Tabelle ist dies für den Punkt 1 geschehen, und zugleich die Berechnung der $-l$ sowie der Koeffizienten a und b der Fehlergleichungen ausgeführt.

Station 1.

P	φ^0	w	$\varphi^0 - w$	$-l$	a	b
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″		
2	132 08 34,7	0 00 00	132 08 34,7	+ 0,4	+ 15,2	+ 13,7
7	194 27 25,5	62 19 01	132 08 24,5	− 9,8	− 3,3	+ 12,6
6	225 57 18,8	93 48 35	132 08 43,8	+ 9,5	− 7,2	+ 7,0

$$z_1^0 = 132^0\ 08'\ 34{,}3''.$$

Für z_1^0 nehmen wir nicht einen beliebigen Wert, sondern den Mittelwert aller $\varphi^0 - w$ der Station an, da hieraus eine kleine Erleichterung der folgenden Berechnung hervorgeht. Die Koeffizienten a und b sind für ξ und η in *Dezimetern* angegeben.

Dieselbe Tabelle stellen wir für die übrigen Punkte auf und erhalten:

Station 2.

P	φ^0	w	$\varphi^0 - w$	$-l$	a	b
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″		
3	189 07 55,2	0 00 00	189 07 55,2	+ 17,3	− 2,0	+ 12,6
7	233 32 06,8	44 24 30	189 07 36,8	− 1,1	− 11,6	+ 8,7
1	312 08 34,7	123 01 13	189 07 21,7	− 16,2	− 15,2	− 13,7

$$z_2^0 = 189^0\ 07'\ 37{,}9''.$$

Station 3.

P	φ^0	w	$\varphi^0 - w$	$-l$	a	b
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″		
4	252 51 02,8	0 00 00	252 51 02,8	− 4,2	− 26,4	+ 8,4
7	310 16 47,9	57 25 39	252 51 08,9	+ 1,9	− 13,6	− 11,5
2	9 07 55,2	116 16 46	252 51 09,2	+ 2,2	+ 2,0	− 12,6

$$z_3^0 = 252^0\ 51'\ 07{,}0''.$$

Station 4.

P	φ^0	w	$\varphi^0 - w$	$-l$	a	b
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″		
5	268 32 04,0	0 00 00	268 32 04,0	− 20,4	− 21,0	+ 0,7
6	310 13 36,7	41 41 22	268 32 14,7	− 9,7	− 9,6	− 8,0
7	349 45 27,0	81 12 28	268 32 59,0	+ 34,6	− 3,8	− 20,6
3	72 51 02,8	164 18 43	268 32 19,8	− 4,6	+ 26,4	− 8,4

$z_4^0 = 268^0\ 32'\ 24{,}4''$.

Station 5.

P	φ^0	w	$\varphi^0 - w$	$-l$	a	b
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″		
6	345 38 35,1	0 00 00	345 38 35,1	− 3,5	− 4,6	− 17,6
7	38 57 32,8	53 18 38	345 38 54,8	+ 16,2	+ 10,4	− 12,6
4	88 32 04,0	102 53 38	345 38 26,0	− 12,6	+ 21,0	− 0,7

$z_5^0 = 345^0\ 38'\ 38{,}6''$.

Station 6.

P	φ^0	w	$\varphi^0 - w$	$-l$	a	b
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″		
1	45 57 18,8	0 00 00	45 57 18,8	− 4,0	+ 7,2	− 7,0
7	95 00 04,7	49 02 48	45 57 16,7	− 6,1	+ 18,7	+ 1,6
4	130 13 36,7	84 16 09	45 57 27,7	+ 4,9	+ 9,6	+ 8,0
5	165 38 35,1	119 41 07	45 57 28,1	+ 5,3	+ 4,6	+ 17,6

$z_6^0 = 45^0\ 57'\ 22{,}8''$.

Station 7.

P	φ^0	w	$\varphi^0 - w$	$-l$	a	b
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″		
1	14 27 25,5	0 00 00	14 27 25,5	− 34,1	+ 3,3	− 12,6
2	53 32 06,8	39 04 19	14 27 47,8	− 11,8	+ 11,6	− 8,7
3	130 16 47,9	115 48 36	14 28 11,9	+ 12,3	+ 13,6	+ 11,5
4	169 45 27,0	155 16 50	14 28 37,0	+ 37,4	+ 3,8	+ 20,6
5	218 57 32,8	204 29 20	14 28 12,8	+ 13,2	− 10,4	+ 12,6
6	275 00 04,7	260 32 22	14 27 42,7	− 16,9	− 18,7	− 1,6

$z_7^0 = 14^0\ 27'\ 59{,}6''$.

Hieraus könnten wir die Fehlergleichungen (7) des vorigen Paragraphen aufstellen, jedoch wollen wir sofort zu den Rechengleichungen übergehen, indem wir die Unbekannten ξ überall weglassen und für jede Station eine Gleichung von der Form (8*) S. 429 hinzufügen. Wir erhalten somit die folgenden Rechengleichungen (1)—(33) S. 434 und 435, denen die Summen s der Koeffizienten zur Anwendung der Summenprobe und die Gewichte g beigefügt sind.

Zur Bestimmung der Unbekannten wollen wir nicht die Normalgleichungen aufstellen, sondern das Verfahren des § 145, S. 358 anwenden, bei dem die Unbekannten unmittelbar aus den Fehlergleichungen ermittelt werden. Es ergibt sich aus den 33 Fehlergleichungen die erste Normalgleichung

$$+ 487{,}9\xi_1 + 130{,}8\eta_1 - 297{,}9\xi_2 - 428{,}8\eta_2 - 2{,}3\xi_5 - 39{,}0\eta_5 - 32{,}4\xi_6 + 148{,}9\eta_6 - 117{,}9\xi_7 + 156{,}4\eta_7 - 134{,}9 = 0,$$

worin die Koeffizientensumme gleich + 5,7 ist, während sie nach der Summenprobe gleich + 5,8 wird. Aus dieser Normalgleichung bilden wir nach § 145, S. 358 eine neue fingierte Fehlergleichung, die das Gewicht $-\frac{1}{487{,}9}$ erhält. Der Einfachheit wegen dividieren wir nach § 150, S. 373 alle Glieder durch $\sqrt{487{,}9}$ und erhalten die Gleichung

$$v_8 = -6{,}1 + 22{,}1\xi_1 + 5{,}9\eta_1 - 13{,}5\xi_2 - 19{,}4\eta_2 - 0{,}1\xi_5 - 1{,}8\eta_5 - 1{,}5\xi_6 + 6{,}8\eta_6 - 5{,}3\xi_7 + 7{,}1\eta_7$$

$$s_8 = +0{,}3 \qquad g_8 = -1,$$

die als 34. Gleichung auf S. 435 hinzugefügt ist.

Aus den 34 Gleichungen wird wiederum die 1. Normalgleichung gebildet, nachdem die erste Unbekannte ξ_1 weggelassen ist, und es ergibt sich

$$+ 281{,}9\eta_1 - 10{,}6\eta_2 - 13{,}7\xi_5 + 68{,}5\eta_5 - 80{,}9\xi_6 - 99{,}9\eta_6 + 51{,}0\xi_7 - 222{,}5\eta_7 - 695{,}1 = 0$$

mit der Koeffizientensumme — 188,0, während aus der Summenprobe — 187,9 erhalten wird. Dividieren wir die vorstehende Gleichung durch $\sqrt{281{,}9}$, so erhalten wir die neue fingierte Fehlergleichung

| | | |

| | | |

$$v_9 = -41{,}4 + 16{,}8\eta_1 - 0{,}6\xi_2 - 9{,}6\eta_2 - 0{,}8\xi_5 + 4{,}1\eta_5 - 4{,}8\xi_6 - 5{,}9\eta_6 + 3{,}0\xi_7 - 13{,}2\eta_7$$

mit der Koeffizientensumme $-11{,}1$ und dem Gewicht -1, die als 35. Gleichung S. 435 aufgeführt ist.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens sind nach und nach die Gleichungen (36)–(42) gefunden worden, deren Normalgleichung (43) unmittelbar die Unbekannte η_7 gibt. Das Absolutglied der Gleichung (43) erhält aus der Summenprobe den Wert $+34{,}4$; die mangelhafte Übereinstimmung erklärt sich durch die Ungenauigkeit der Berechnung, bei der überall nur die erste Dezimalstelle mitgeführt wurde.

Die Gleichung (43) gibt

$$\eta_7 = -1{,}99 \text{ dm} = -0{,}199 \text{ m}.$$

Werden nun in den Gl. (36)—(42) die Verbesserungen v gleich Null gesetzt, so erhält man durch Einsetzen von η_7 nacheinander ξ_7, η_6, $\xi_6 \cdots$ in Dezimetern. Das Resultat ist, wenn alle Unbekannten in Metern ausgedrückt werden

$\xi_1 = +0{,}162$ m	$\eta_1 = +0{,}102$ m
$\xi_2 = +0{,}116$	$\eta_2 = -0{,}037$
$\xi_5 = +0{,}076$	$\eta_5 = -0{,}128$
$\xi_6 = +0{,}186$	$\eta_6 = -0{,}117$
$\xi_7 = +0{,}098$	$\eta_7 = -0{,}199$.

Aus der Ausgleichung ergeben sich somit die folgenden Koordinaten der Dreieckspunkte

$y_1 = +10391{,}902$	$x_1 = +11518{,}962$
$y_2 = +11139{,}663$	$x_2 = +10842{,}116$
$y_3 = +10883{,}945$	$x_3 = +9250{,}960$
$y_4 = +10175{,}056$	$x_4 = +9032{,}210$
$y_5 = +9197{,}372$	$x_5 = +9007{,}276$
$y_6 = +8919{,}083$	$x_6 = +10094{,}686$
$y_7 = +10000{,}001$	$x_7 = +9999{,}998$,

die von den Koordinaten der früheren Ausgleichung im Maximum um 6 mm abweichen. Diese Abweichungen können jedoch auch in einer geringen Drehung und Größenänderung des Dreiecksnetzes ihre Ursache haben, wie sie bei der vorstehenden Ausgleichungsmethode leicht zu erklären sind. Drehen wir das Dreiecksnetz um den Punkt 4 um $-0{,}5''$, und multiplizieren alle

Seiten desselben mit $+4\cdot10^{-7}$, so wird die Übereinstimmung beider Ausgleichungen wesentlich besser. Diese Drehung und Dehnung kann am bequemsten nach den für Koordinaten-Transformationen in § 68, S. 160 entwickelten Formeln ausgeführt werden, in denen

$$\sin\alpha = -\,0{,}0000025$$
$$\cos\alpha - 1 = +\,0{,}0000004$$

zu setzen ist. Es finden sich dann die Koordinaten

$y_1 = +\,10391{,}896$	$x_1 = +\,11518{,}963$
$y_2 = +\,11139{,}659$	$x_2 = +\,10842{,}118$
$y_3 = +\,10883{,}945$	$x_3 = +\,9250{,}962$
$y_4 = +\,10175{,}056$	$x_4 = +\,9032{,}210$
$y_5 = +\,9197{,}372$	$x_5 = +\,9007{,}274$
$y_6 = +\,8919{,}080$	$x_6 = +\,10094{,}683$
$y_7 = +\,9999{,}999$	$x_7 = +\,9999{,}998.$

Die Differenzen gegen die früheren Koordinaten betragen jetzt nur noch im Maximum 2 mm; eine bessere Übereinstimmung ist bei der starken Kürzung der Koeffizienten der Fehlergleichungen nicht zu erwarten.

Eine umfassende Darstellung der geodätischen Ausgleichungsrechnung findet sich im 2. Bande von *W. Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde. — Besondere Lehrbücher der Ausgleichungsrechnung sind:

F. R. Helmert, Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Leipzig 1872.

C. Koppe, Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate in der praktischen Geometrie. Nordhausen 1885.

Eine Zusammenstellung der Gebrauchsformeln und eine große Anzahl von Beispielen enthält

E. Hegemann, Übungsbuch für die Anwendung der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate auf die praktische Geometrie. Berlin 1902.

Die Theorie der Methode der kleinsten Quadrate ist ausführlich behandelt in

Emanuel Czuber, Theorie d. Beobachtungsfehler. Leipzig 1891.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

89078557899

B89078557899A